

Matriisilaskenta

Ville Tilvis

1. joulukuuta 2013

Sisältö

Johdanto	1
1 Matriisit ja vektorit	2
1.1 Nimityksiä	2
1.2 Peruslaskutoimitukset	4
2 Lineaariset yhtälöryhmät	10
2.1 Lineaarinen yhtälö ja yhtälöryhmä	10
2.2 Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen	11
2.3 Gaussin eliminaatiomenetelmä	12
2.4 Lineaarisen yhtälöryhmän ominaisuuksia	17
2.5 Yhtälöryhmien geometrinen tulkinta	22
2.6 Lineaarisen yhtälöryhmän matriisimuoto	24
3 Käänteismatriisi ja determinantti	25
3.1 Determinantti	25
3.2 Käänteismatriisi	30
3.3 Gaussin-Jordanin menetelmä	33
3.4 Cramerin sääntö	35
3.5 Matriisiyhtälö	37
3.6 Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu	37
4 Kuvaukset tasossa	39
4.1 Yleisesti lineaarikuvauksista	39
4.2 Affiinikuvaukset	40
5 Markovin ketjut	43
5.1 Todennäköisyyslaskennan alkeita	43
5.2 Malli, systeemi ja tila	43
5.3 Vuokaavio ja tilakone	45
5.4 Tilansiirtomatriisi	46
5.5 Tasapainotila	48
5.6 Esimerkkejä	49

6	Käyrän sovitus pistejoukkoon	52
6.1	Pienimmän neliösumman käyrä	53
6.2	Suoran sovitus	54
6.3	Polynomin sovitus	56
A	Summamerkintä Σ	59
B	Harjoitustehtäviä	61
C	Harjoitustehtävien vastaukset	68

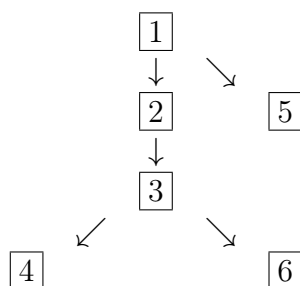
Johdanto

Tämä on kurssimoniste Helsingin matematiikkalukion kurssille Matriisilaskenta. Sen tavoitteena on esitellä matriisien perusteet ja joitakin sovelluksia. Matriiseihin törmää pian joka tapauksessa matemaattisten alojen korkeakouluopinnoissa, joten niiden tunteminen on eduksi. Kurssi pysyttelee lähellä käytännön sovelluksia, ja aiheeseen luontevasti liittyvä vektoriavaruuksien teoria on sivuutettu.

Koska kurssi kuuluu ensimmäisen lukiovuoden syksyn ohjelmaan, esitietovaatimuksena oletetaan vain peruskoulun oppimäärä ja kelvollinen mekaaninen laskutaito. Lukion vektorilaskennan ja analyyttisen geometrian hallitseminen on hyödyksi, mutta ei välttämätöntä. Läpi tekstin uudet termit on *korostettu*.

Matriisien perusteet käsitellään luvuissa 1 – 3. Näihin lukuihin liittyvät tehtävät on tarkoitettu laskea käsin. Luvut 4, 5 ja 6 esittelevät matriisien sovelluksia. Niissä sopiva matemaattinen tietokoneohjelma (esimerkiksi Matlab) tai graafinen laskin on käytännössä välttämätön.

Esitietovaatimukset ovat seuraavat, joskin lukujen 1 ja 2 järjestyksellä ei juuri ole merkitystä.



Lukujen esitietovaatimukset

Kurssimoniste on vielä monella tapaa keskeneräinen ja puutteellinen. Parannusehdotukset ja kommentit virheistä ovat erittäin tervetulleita.

Luku 1

Matriisit ja vektorit

Matriisia voidaan pitää eräänlaisena luvun yleistyksenä.

1.1 Nimityksiä

Valitsemme käytännöllisen lähestymistavan ja määrittelemme seuraavasti: *Matriisi* on taulukko, jonka *alkiot* ovat lukuja. Matriisin ympärille merkitään kaari- tai hakasulut. Esimerkkejä matriiseista:

$$\begin{pmatrix} 3,3 & 2,4 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 & \frac{1}{8} \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Matriisien pystyrivejä kutsutaan *sarakkeiksi* ja vaakarivejä *riveiksi*.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Sarakkeet} \\ & & \downarrow \downarrow \\ \text{Rivit} & \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriisin *koko* määräytyy rivien ja sarakkeiden lukumäärän perusteella. Jos matriisissa on m riviä ja n saraketta, sen koko on $m \times n$. (Luetaan ” m kertaa n ”.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

(3×3) -matriisi (4×2) -matriisi

Matriisi on *neliömatriisi*, mikäli siinä on yhtä monta riviä ja saraketta. Matriisit ovat *samankokoiset*, mikäli niissä on yhtä monta riviä ja yhtä monta saraketta. Muuten matriisit ovat *erikokoiset*. Näin ollen esimerkiksi (3×2) -matriisi on erikokoinen kuin (2×3) -matriisi.

Matriisia, jossa on vain yksi sarake tai vain yksi rivi, kutsutaan *vektoriksi*. Jos sarakkeita on vain yksi, kyseessä on *pystyvektori*; jos rivejä on vain yksi, kyseessä on *vaakavektori*. (1×1) -matriisia voidaan pitää tavallisena lukuna.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad [4 \ 5 \ 6 \ 7]$$

Pystyvektori Vaakavektori

Lukion peruskursseilla vektoreita merkitään hieman toisin, mutta kyseessä ovat samat matemaattiset olennot. Lukiossa ei myöskään erotella pysty- ja vaakavektoreita, koska käsiteltävissä laskutoimituksissa (piste- ja ristitulo) ne käyttäytyvät samalla tavalla. Matriisilaskennassa ero on kuitenkin oleellinen.

Matriiseja merkitään yleensä isoilla kirjaimilla ja vektoreita pienillä kirjaimilla, jonka päälle on piirretty viiva.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \end{bmatrix} \quad \bar{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Matriisi A Vektori $\bar{v}$

Matriisin alkioihin voidaan viitata rivin ja sarakkeen numerolla. Merkintä a_{mn} (vaihtoehtoisesti $(A)_{mn}$) tarkoittaa matriisin A alkioita, joka on rivillä m ja sarakkeessa n . Edellisen esimerkin tapauksessa $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 6$. Vektorien alkioihin viitataan yhdellä numerolla (sekaannuksen vaaraa kun ei ole) ja yläviiva jätetään pois. Edellisen esimerkin tapauksessa $v_1 = 6$, $v_3 = 4$.

Nollamatriisi on matriisi, jonka kaikki alkiot ovat nollia. Nollamatriisia merkitään lihavoidulla luvulla nolla (**0**). *Yksikkömatriisi* (ykkösmatriisi) on neliömatriisi, jonka *diagonaalilla* (viistorivi vasemmasta yläkulmasta oikean alakulmaan) on ykkösiä ja muut alkiot ovat nollia. Yksikkömatriisia merkitään lihavoidulla ykkösellä (**1**) tai isolla kirjaimella I .

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nollamatriisi **0** Yksikkömatriisi I

1.2 Peruslaskutoimitukset

Yhteenlasku

Matriiseja voidaan laskea yhteen, mikäli yhteenlaskettavat ovat samankokoiset. Erikokoisten matriisien yhteenlaskua ei ole määritelty.

Yhteenlasku suoritetaan summaamalla matriisien vastinalkiot. Muodollisesti voidaan kirjoittaa, että jos $C = A + B$, niin matriisin C alkioille pätee

$$c_{mn} = a_{mn} + b_{mn}.$$

Esimerkkejä yhteenlaskusta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 6 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+0 & 3+7 \\ 4+1 & 5-2 & 6+6 \\ 7-3 & 8+3 & 9+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 10 \\ 5 & 3 & 12 \\ 4 & 11 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ Ei määritelty, matriisit erikokoiset.}$$

Vähennyslasku määritellään vastaavasti.

Matriisien yhteenlasku toteuttaa tutut ominaisuudet

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C,$$

$$A + B = B + A,$$

mikäli yhteenlasku on määritelty (matriisit A , B , C samankokoiset).

Matriisin kertominen luvulla

Kun matriisi kerrotaan luvulla, sen jokainen alkio kerrotaan erikseen. Muodollisesti ilmaistuna: jos $A = c \cdot B$ (c on tässä mikä tahansa luku), niin matriisin A alkioille pätee $a_{mn} = c \cdot b_{mn}$.

Esimerkiksi

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 0 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 15 & -10 \end{bmatrix}$$
$$0 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriisien kertolasku

Kahden matriisin välinen kertolasku määritellään äkkiseltään kummalliselta vaikuttavalla tavalla, mutta tähän on syynsä, kuten myöhemmin tullaan näkemään.

Aloitamme vaakavektorin ja pystyvektorin tulolla. Se lasketaan kertomalla vektorien ensimmäiset alkiot keskenään, toiset alkiot keskenään ja niin edelleen, ja laskemalla lopulta kaikki tulot yhteen. Tuloksena on tavallinen luku. Esimerkiksi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = 9$$

Jotta tulo voitaisiin laskea, täytyy vektoreiden olla yhtä pitkät.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ Ei määritelty!}$$

Sama asia muodollisesti kirjoitettuna: $(1 \times n)$ -vektorin $\bar{v}$ ja $(n \times 1)$ -vektorin $\bar{u}$ tulo on

$$\bar{v} \cdot \bar{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n = \sum_{i=1}^n v_i u_i.$$

Tämä on lukion peruskurssien vektorilaskennassa esitelty pistetulo. (Summalyhennysmerkinnän Σ käytöstä katso liite A. Sen käyttäminen ei ole välttämätöntä.)

Määritelmä. Kun kaksi matriisia kerrotaan keskenään, syntyy matriisi, jonka alkiot muodostuvat vasemmanpuoleisen matriisin *rivien* ja oikeanpuoleisen matriisin *sarakkeiden* tuloista alla olevan kaavion muokaisesta. Rivien ja sarakkeiden tulot lasketaan kuten vaakavektoreiden ja pystyvektoreiden tulot (katso edellä).

$$\begin{array}{l} \text{Rivit (R)} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b & \cdots \\ c & d & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} \text{Sarakkeet (S)} \\ \downarrow \downarrow \downarrow \\ \left[\begin{array}{c|c|c} e & f & \cdots \\ g & h & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right] \end{array} = \begin{bmatrix} R_1 \cdot S_1 & R_1 \cdot S_2 & \cdots \\ R_2 \cdot S_1 & R_2 \cdot S_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{array}$$

Tulon AB alkio $(AB)_{mn}$ saadaan siis kertomalla B :n n . sarake A :n m . rivillä.

Jotta tulo voitaisiin laskea, täytyy vasemmanpuoleisen matriisin rivien olla yhtä pitkiä kuin oikeanpuoleisen sarakkeiden. Jos siis matriisi A on $(m \times n)$ -matriisi ja B $(l \times k)$ -matriisi, tulo $A \cdot B$ voidaan laskea vain, kun $n = l$.

Tulomatriisin koko määräytyy kerrottavien ulompien indeksien mukaan:

$$\begin{array}{ccc} A & \cdot & B = C \\ m \times n & & n \times k \quad m \times k \\ & \nwarrow \nearrow & \\ & \text{samat!} & \end{array}$$

Kertolaskun muodollinen määritelmä: Jos A on $(m \times n)$ -matriisi ja B $(n \times k)$ -matriisi, tulomatriisi AB on $(m \times k)$ -matriisi, jonka alkioille pätee

$$(AB)_{mk} = \sum_{i=1}^n a_{mi} b_{ik}.$$

Muodollista määritelmää ei tarvitse tällä tasolla osata käyttää, riittää kun ymmärtää kuinka tulo lasketaan.

Kuten kertolaskussa yleensäkin, matriisitulossa kertomerkin $(\cdot)$ saa jättää merkitsemättä. Samoin matriisin tuloa itsensä kanssa voi merkitä potenssilla:

$$A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A \cdot A \cdot A \quad \text{jne.}$$

Matriisien alle voi halutessaan (selkeyden vuoksi) kirjoittaa niiden koot, kuten seuraavissa esimerkeissä.

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 1 \cdot a + 2 \cdot c & 1 \cdot b + 2 \cdot d \\ 3 \cdot a + 4 \cdot c & 3 \cdot b + 4 \cdot d \end{bmatrix} \\ 2 \times 2 & 2 \times 2 & 2 \times 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix} \\ 2 \times 3 & 3 \times 1 & 2 \times 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} & & \text{Ei määritelty, matriisit väärän kokoiset.} \\ 3 \times 2 & 3 \times 2 & \end{array}$$

Yksikkömatriisi

Matriisien kertolaskun neutraalialkio (eli matriisi, jolla kertominen ei muuta toista matriisiä) on yksikkömatriisi I . Yksikkömatriisi on neliömatriisi, jonka diagonaalilla vasemmasta yläkulmasta oikeaan alakulmaan on ykkösiä ja jonka muut alkiot ovat nollia.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Koska kertolasku on määritelty vain tietynkokoisten matriisien välille, yksikkömatriiseja tarvitaan kutakin kokoa ($n \times n$). Jos on tarve tehdä selväksi yksikkömatriisin koko, voidaan käyttää alaindeksiä: I_2 , I_3 ja niin edelleen.

Yksikkömatriiseille pätee

$$I \cdot A = A \cdot I = A$$

kunhan yksikkömatriisi on sen kokoinen, että tulo on määritelty. Matriisin A ei tarvitse olla neliömatriisi. Kokeile!

Esimerkki:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot c & 1 \cdot b + 0 \cdot d \\ 0 \cdot a + 1 \cdot c & 0 \cdot b + 1 \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Matriisitulo ei ole vaihdannainen!

Usein käy, että $A \cdot B \neq B \cdot A$, esimerkiksi

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}, \text{ mutta}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tästä nähdään myös, että tulon nollasääntö ei ole voimassa: voi olla $AB = \mathbf{0}$, mutta $A \neq \mathbf{0}, B \neq \mathbf{0}$.

Voi käydä niinkin, että vain toinen tuloista AB ja BA on määritelty:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2}, \text{ mutta}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \text{ ei määritelty!}$$

Muita matriisitulon ominaisuuksia

Vaikka matriisitulo ei ole vaihdannainen, sillä on muut tutut kertolaskun ominaisuudet:

$$\text{Kertolasku luvun kanssa} \quad A \cdot (cB) = (cA) \cdot B = cAB, \\ \text{missä } c \text{ on luku.}$$

$$\text{Osittelulaki} \quad A \cdot (B + C) = AB + AC \\ (B + C) \cdot A = BA + CA$$

$$\text{Liitännäisyys} \quad A(BC) = (AB)C = ABC$$

Todistamme näistä liitännäisyyden hivin ja urheilun vuoksi.

Todistus. Olkoon matriisin A koko $(m \times n)$, matriisin B $(n \times k)$ ja matriisin C $(k \times l)$. Matriisitulon määritelmän perusteella tulon $A(BC)$ alkioille pätee

$$[A(BC)]_{ml} = \sum_{i=1}^n A_{mi}(BC)_{il}$$

Kun kirjoitetaan vielä $(BC)_{il}$ auki, saadaan

$$[A(BC)]_{ml} = \sum_{i=1}^n A_{mi} \left(\sum_{j=1}^k B_{ij} C_{jl} \right)$$

Ryhmitellään summa uudestaan:

$$\sum_{i=1}^n A_{mi} \left(\sum_{j=1}^k B_{ij} C_{jl} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k A_{mi} B_{ij} C_{jl} = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n A_{mi} B_{ij} \right) C_{jl}$$

Havaitaan, että $\sum_{i=1}^n A_{mi} B_{ij} = (AB)_{mj}$, joten on saatu

$$[A(BC)]_{ml} = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n A_{mi} B_{ij} \right) C_{jl} = \sum_{j=1}^k (AB)_{mj} C_{jl} = [(AB)C]_{ml}$$

Matriisien $A(BC)$ ja $(AB)C$ kaikki alkiot ovat siis samat, joten

$$A(BC) = (AB)C. \quad \square$$

Transpoosi

Matriisin *transpoosi* saadaan vaihtamalla rivit sarakkeiksi. Ensimmäisestä rivistä tulee ensimmäinen sarake, toisesta toinen ja niin edelleen. Matriisin A transpoosia merkitään $\text{trans } A$ tai yläindeksillä A^T tai A^t .

Muodollinen määritelmä: Kun $B = A^T$, pätee $b_{mn} = a_{nm}$.

Esimerkiksi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Luonnollisesti transpoosi tekee $(m \times n)$ -matriisista $(n \times m)$ -matriisin.

Transpoosin ominaisuuksia:

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Todistamme viimeisen.

Todistus. Verrataan matriisien $(AB)^T$ ja $B^T A^T$ alkioita:

$$((AB)^T)_{nm} = (AB)_{mn} = (\text{matriisin } A \text{ } m. \text{ rivi}) \cdot (\text{matriisin } B \text{ } n. \text{ sarake})$$

$$\begin{aligned} (B^T A^T)_{nm} &= (\text{matriisin } B^T \text{ } n. \text{ rivi}) \cdot (\text{matriisin } A^T \text{ } m. \text{ sarake}) \\ &= (\text{matriisin } A \text{ } m. \text{ rivi}) \cdot (\text{matriisin } B \text{ } n. \text{ sarake}) \end{aligned}$$

(Mieti viimeistä välivaihetta!)

Matriisien alkiot ovat siis samat, joten $(AB)^T = B^T A^T$. $\square$

Luku 2

Lineaariset yhtälöryhmät

2.1 Lineaarinen yhtälö ja yhtälöryhmä

Yhtälö on *lineaarinen*, mikäli se voidaan esittää *standardimuodossa*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

missä $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ ovat tunnettuja lukuja eli *vakioita* (lukuja a_i kutsutaan *kertoimiksi* ja lukua b *vakiotermiksi*) ja $x_1, x_2, \dots, x_n$ tuntemattomia eli *muuttujia*. Lineaarinen yhtälö sisältää siis ainoastaan vakioilla kerrottuja muuttujia, ei muuttujien potensseja, kahden eri muuttujan tuloja tai muita monimutkaisempia laskutoimituksia.

Esimerkiksi yhtälöt

$$5x + 3y = 7$$

$$3 + \frac{5}{3}x = 6z - 12y$$

ovat lineaarisia, mutta yhtälöt

$$4x^2 = y$$

$$z + 3xy = 2$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$$

eivät. Tällä kurssilla käsitellään ainoastaan lineaarisia yhtälöitä.

Mikäli samoja muuttujia sitoo useampi lineaarinen yhtälö, kyseessä on *lineaarinen yhtälöryhmä*, joka on jo peruskoulusta tuttu. Esimerkiksi

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

on kahden yhtälön lineaarinen yhtälöryhmä eli *yhtälöpari*. Yhtälöryhmän (samoin kuin yhtälön) *ratkaisu* koostuu muuttujien niistä arvoista, jotka toteuttavat kyseiset yhtälöt. Esimerkkinä tapauksessa ratkaisuja on vain yksi: $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$. Tapauksesta riippuen lineaarisella yhtälöryhmällä on yksi, äärettömän monta tai ei lainkaan ratkaisuja.

2.2 Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen

Yhtälöparien ratkaisemista käsitellään jo peruskoulussa. Ratkaiseminen perustuu kahteen seikkaan: yhtälöryhmän ratkaisujen muuttumatta voidaan

- Laskea yhteen tai vähentää yhtälöitä toisistaan puolittain
- Kertoa yhtälöitä nolasta poikkeavalla luvulla

Peruskoulussa ratkaisuun käytettiin kahta eri metodia. Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

kahdella eri tavalla.

Tapa 1: Sijoittaminen. Ratkaistaan ensimmäisestä yhtälöstä $y = 1 - x$ ja sijoitetaan se toiseen yhtälöön: $2x + 1 - x = 0$. Tästä ratkaistaan $x = -1$. Sijoitetaan tämä ensimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan $y = 2$.

Tapa 2: yhtälöiden yhteenlasku. Kerrotaan ylempi yhtälö luvulla -1 ja lasketaan yhtälöt puolittain yhteen.

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases} & \parallel \cdot (-1) & \\ \hline \begin{cases} -x - y = -1 \\ 2x + y = 0 \end{cases} & + & \\ \hline x + 0 = -1 & & \end{array}$$

Sijoitetaan tulos taas jompaan kumpaan alkuperäiseen yhtälöön ja saadaan sama vastaus kuin edellä.

Seuraavaksi tutustutaan uuteen tapaan ratkaista yhtälöryhmiä. Se on käsin laskiessa toisinaan näppärä, mutta ennen kaikkea tarvitsemme sen matriiseja varten. Aluksi kehitetään merkintöjä.

2.3 Gaussin eliminaatiomenetelmä

Otetaan käyttöön merkintä $\cdot a \downarrow$, joka tarkoittaa ”lisätään ylempi yhtälö alemman luvulla a kerrottuna”. Ylempää yhtälöä ei muuteta. Tällaista toimitusta kutsutaan *Gaussin muunnokseksi*. Muunnokselle ei ole vakiintunutta merkin­tää, tässä käytetty nuolimerkintä ei ole standardi. Sen avulla yhtälön ratkaisu voidaan kirjoittaa seuraavasti.

$$\begin{aligned} \cdot(-1) \downarrow \quad & \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad || \text{ lisätään puolittain } -x - y = -1 \\ \\ \cdot(-1) \uparrow \quad & \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 0 = -1 \end{cases} \quad || \text{ lisätään puolittain } -x = 1 \\ \\ & \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vastaus on nyt helposti luettavissa. Vielä yksinkertaisempaan päästään, kun korvataan yhtälöt kaaviolla, johon on merkitty ainoastaan kertoimet ja vakiotermit. Yhtälöparia

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

merkitään kaaviolla

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Kaavion ensimmäinen sarake kertoo muuttujan x kertoimet, toinen sarake muuttujan y kertoimet ja kolmas vakiotermit. Nyt yhtälöparin ratkaiseminen näyttää tältä:

$$\cdot(-1) \downarrow \quad \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\cdot(-1) \uparrow \quad \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}$$

Tästä nähdään vastaus $y = 2, x = -1$. Ratkaisemisen voi tehdä myös toisessa järjestyksessä:

$$\cdot(-2) \downarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\cdot 1 \uparrow \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \quad || : (-1)$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Vastaus on toki sama kuin ennenkin. Lyhennysmerkintää käytettäessä tulee aina muistaa, mitä on tekemässä: Numerot merkitsevät yhtälöiden kertoimia ja vakiotermejä; kyse on vain yhtälöiden kertomisesta luvulla ja niiden laskeemisesta yhteen. Missä vaiheessa tahansa voi palata tavalliseen merkintään, jos hahmotaminen on vaikeaa.

Vaikka yhtälöitä olisi enemmän kuin kaksi, ratkaisu tapahtuu samoin kuin edellä. Yhtälöryhmälle tehdään Gaussin muunnoksia, kunnes kussakin sarakkeessa on jäljellä vain nollia ja yksi ykkönen. Tätä menetelmää kutsutaan *Gaussin-Jordanin eliminaatiomenetelmäksi*. Puhumme jatkossa lyhyesti vain Gaussin menetelmästä, vaikka se itse asiassa tarkoittaa ratkaisutapaa, jossa yhden muuttujan selvittyä ruvetaan sijoittamaan sen arvoja muihin yhtälöihin.



Saksalainen matemaatikko ja fyysikko Carl Friedrich Gauss, 1777-1855

Esimerkki. Ratkaistaan Gaussin-Jordanin eliminaatiolla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2y + x + 2z - 2 = 0 \\ x + y = 1 - z \\ 2x + z + 3y + 3 = 1 \end{cases}$$

Sivennetään yhtälöt standardimuotoon:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = -2 \end{cases}$$

Muunnetaan lyhennettyyn merkintään ja ryhdytään järjestelmällisesti eliminoimaan kertoimia nolliksi.

$$\begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot(-2) \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot(-1) \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \parallel :(-1) \\ \parallel :(-2) \end{array}$$

$$\cdot(-1) \quad \curvearrowright \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}$$

Nyt voidaan palata tavalliseen merkintään ja nähdä vastaus:

$$\begin{cases} x & = & 0 \\ y & = & -\frac{3}{2} \\ z & = & \frac{5}{2} \end{cases}$$

Tulee huomata, että Gaussin muunnoksia voi tehdä monessa eri järjestyksessä. Nyt aloitettiin puhdistustyö x -sarakkeesta, toisinkin olisi voitu valita. Käsien laskien laskut ovat helpoimmat, kun luvut pysyvät mahdollisimman pieninä ja ennen kaikkea kokonaislukuina. Usein tämä ei kuitenkaan ole mahdollista.

Huomautus käsin laskemisesta

Mikäli ainoana tavoitteena on ratkaista yhtälöryhmä käsin, Gaussin muunnokset voidaan lopettaa, kun vasen alakolmio on muutettu nolliksi. Tämän jälkeen voidaan sijoittaa. Edellinen esimerkki menisi näin:

$$\begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot(-2) \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \end{array}$$

$$\cdot(-1) \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{array} \quad \begin{array}{l} || :(-1) \\ || :(-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}$$

Saatiin siis

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ y + z = 1 \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Tästä voidaan sijoittaa z keskimmäiseen yhtälöön ja saada $y = -\frac{3}{2}$. Lopuksi sijoitetaan y ja z ylimpään yhtälöön ja saadaan $x = 0$.

Tämä menetelmä on varsinainen Gaussin eliminaatio. Aiemmin esitetty Gauss-Jordan on kuitenkin välttämätön jatkossa, joten kannattaa opetella suoraan se.

Monen yhtälöryhmän ratkaiseminen kerralla

Halutaan ratkaista yhtälöryhmät

$$\begin{cases} -x + 3y = 1 \\ -2x + 5y = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} -z + 3w = -2 \\ -2z + 5w = 4 \end{cases}.$$

Lyhennysmerkinnässä tilanne näyttää tältä:

$$\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{cc|c} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 4 \end{array}$$

Havaitaan, että yhtälöryhmien kertoimet ovat samat ja vakiotermit erit. Koska Gaussin eliminaatiomenetelmässä vakiotermit eivät mitenkään vaikuta kertoimien käsittelyyn, voidaan yhtälöryhmät ratkaista yhtä aikaa. Kirjoitetaan molemmat vakiotermirivit näkyviin ja suoritetaan Gaussin muunnokset molemmille:

$$\begin{array}{cc|cc} & & x, y & z, w \\ & & \downarrow & \downarrow \\ \cdot(-2) \downarrow & \begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \end{array} & \begin{array}{cc|c} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{array} \\ \\ \cdot 3 \uparrow & \begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} & \begin{array}{cc|c} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{array} \\ \\ & \begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -5 & 22 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{array} & \begin{array}{l} || : (-1) \\ || : (-1) \end{array} \\ \\ & \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -22 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \end{array} \end{array}$$

Nyt voidaan lukea

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} z = -22 \\ w = -8 \end{cases}.$$

Tätä temppua tarvitsemme luvussa 3 käänteismatriisin määrittämiseen.

2.4 Lineaarisen yhtälöryhmän ominaisuuksia

Lause. Lineaarisella yhtälöryhmällä on ratkaisuja joko

- tasan yksi
- ei lainkaan tai
- äärettömän monta.

Seuraavassa esimerkkejä. Todistamme lauseen lopuksi.

Kaikilla yhtälöryhmillä ei ole ratkaisua

Yhtälöryhmän ratkaisuksi kutsutaan niitä muuttujien arvoja, joilla kaikki yhtälöryhmän yhtälöt ovat yhtä aikaa tosia. Mikäli yhtälöt eivät voi olla yhtä aikaa tosia muuttujien arvosta riippumatta, yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Esimerkki. Tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 2y = 5. \end{cases}$$

Lienee ilmeistä, että emme voi löytää lukuja x ja y , jotka toteuttaisivat molemmat yhtälöt, koska kyseinen yhtälöpari väittää $3 = 5$ lukujen x ja y arvoista riippumatta. Mikäli yhtälöparia yritetään ratkaista Gaussin eliminointimenetelmällä, törmätään heti ristiriitaan:

$$\begin{array}{rcl} \cdot(-1) \downarrow & \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \\ & \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \end{array}$$

Alempi yhtälö kertoo $0 \cdot x + 0 \cdot y = 2$ eli $0 = 2$, mikä on ristiriita. Siispä ei ole olemassa lukuja x ja y , jotka toteuttaisivat yhtä aikaa molemmat yhtälöt.

Aina ratkaisun puuttuminen ei ole yhtä ilmeistä, mutta Gaussin eliminaatiomenetelmää käyttämällä asia selviää. Mikäli jollekin riville tulee kertoimiksi pelkkiä nollia ja vakiotermiksi nollasta poikkeava luku, ollaan päädytty ristiriitaan ja ratkaisuja ei ole.

Joillakin yhtälöryhmillä on äärettömän monta ratkaisua

Tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 6. \end{cases}$$

Huomataan, että alempi yhtälö onkin sama kuin ylempi yhtälö, mutta vain kahdella kerrottuna. Se ei siis anna lisäinformaatiota. Tämä huomataan myös Gaussin eliminaatiolla:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ \cdot(-2) \downarrow & 2 & -4 & 6 \end{array}$$
$$\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Alin rivi kertoo $0 = 0$, mikä on toki totta, mutta ei kerro mitään muuttujista x ja y . Alempi rivi voidaan siis poistaa.

Yhtälöparimme on kutistunut yhdeksi yhtälöksi: $x - 2y = 3$. Tällä yhtälöllä on äärettömän monta ratkaisua, sillä voidaan ratkaista $x = 2y + 3$. Näin jokaiselle luvulle y voidaan laskea pariksi x kyseisellä kaavalla. Yhtälöparin vastaus voidaan ilmoittaa näin:

$$\begin{cases} x = 2y + 3 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

tai hienommin

$$\begin{cases} x = 2c + 3 \\ y = c \end{cases}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Jälkimmäistä muotoa kutsutaan *parametriesitykseksi*.

Vapaasti määriteltäviä parametreja voi jäädä useampiakin kuin yksi, kuten seuraavassa esimerkissä nähdään.

Esimerkki. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + z - w = -1 \\ 2x + y - z + 3w = 3 \\ 3x - y + 2w = 2 \end{cases}$$

Tässä kolmas yhtälö on kahden ensimmäisen summa, eikä siten sisällä lisää informaatiota. Katsotaan, mitä tapahtuu jos lähdetään suoraviivaisesti käyttämään Gaussin eliminointia.

$$\begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \cdot(-3) \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \quad \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 5 & 5 \end{array} \right|$$

Kaksi viimeistä riviä ovat samat, joten toinen voidaan tiputtaa pois:

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 5 & 5 \end{array} \right| \quad || : 5$$

$$\cdot 2 \uparrow \quad \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 1 & 1 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 1 & 1 \end{array} \right|$$

Nyt Gaussin muunnoksia ei voida enää tehdä ilman, että jokin jo saavutetuista nolista katoaa. Tarkastellaan tilannetta vielä tavallisessa merkintätavassa:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{5}z + w = 1 \\ y - \frac{3}{5}z + w = 1 \end{cases},$$

mistä ratkaistuna

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{5}z - w \\ y = 1 + \frac{3}{5}z - w \end{cases}.$$

Muuttujat z ja w voidaan valita mielivaltaisesti, jolloin x ja y määräytyvät esitettyjen kaavojen mukaan. Vastaukseksi kirjoitetaan

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{5}c - d \\ y = 1 + \frac{3}{5}c - d \\ z = c \\ w = d \end{cases}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Yhtälöitä ja muuttujia eri määrä

Tähän mennessä on käsitelty lähinnä yhtälöryhmiä, joissa muuttujia ja yhtälöitä on ollut yhtä monta. Näin ei tietenkään aina ole. Yhtälöryhmää, jossa on yhtälöitä enemmän kuin muuttujia, kutsutaan *ylimäärätyksi*; mikäli muuttujia taas on enemmän kuin yhtälöitä, yhtälöryhmä on *alimäärätty*.

Ratkaisuista voidaan sanoa seuraavaa

- Mikäli yhtälöitä on *saman verran* kuin tuntemattomia, yhtälöryhmällä on *yleensä* yksi ratkaisu.
Ratkaisuja voi olla myös äärettömän monta tai ei lainkaan.
- Mikäli yhtälöitä on *vähemmän* kuin tuntemattomia (alimäärätty), yhtälöryhmällä on *yleensä* äärettömän monta ratkaisua.
On mahdollista, että ratkaisuja ei ole lainkaan.
- Mikäli yhtälöitä on *enemmän* kuin tuntemattomia (ylimäärätty), yhtälöryhmällä ei *yleensä* ole ratkaisua.
Ratkaisuja voi olla myös yksi tai äärettömän monta.

Tämä on helppo ymmärtää, kun tarkastellaan seuraavaa esimerkkiä. Yhtälöparilla

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

on ratkaisu $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

Jos lukujen x ja y vaaditaan lisäksi toteuttavan kolmas yhtälö $x + y = 7$, seuraa ristiriita $2 + 1 = 7$. Näin ollen ylimäärätyllä yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

ei ole ratkaisua. Kun kahdelta luvulta vaaditaan kolmea ehtoa, tulos on yleensä mahdoton.

Jos taas alkuperäisestä yhtälöparista poistetaan toinen yhtälö, jäljelle jää $x - y = 1$, ja ratkaisuja löytyy äärettömän monta muodossa $x = y + 1$.

Korostettakoon vielä, että yhtälöiden ja muuttujien lukumäärästä riippumatta ratkaisuja voi olla yksi, ei lainkaan tai äärettömän monta. Ainoa erikoistapaus on se, ettei alimäärätyllä yhtälöryhmällä voi olla tasan yhtä ratkaisua. Lukijaa kehoitetaan keksimään esimerkkejä ylimäärätyistä yhtälöistä, joilla on äärettömän monta ratkaisua sekä alimäärätyistä, joilla ei ole ratkaisua.

Yhtälöiden ja muuttujien lukumäärästä riippumatta kaikki lineaariset yhtälöryhmät voidaan ratkaista Gaussin eliminaatiomenelmällä.

Todistus ratkaisujen olemassaolosta ja lukumäärästä

Lause. Lineaarisella yhtälöryhmällä on joko yksi, nolla tai äärettömän monta ratkaisua. Lineaarinen yhtälöryhmä voidaan aina ratkaista Gaussin eliminaatiolla.

Todistus.

Tarkastellaan lyhennysmerkinnässä lineaarista yhtälöryhmää, jossa on n tuntematonta ja m yhtälöä. Se näyttää tältä:

$$\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

Voimme olettaa, että jokaisessa sarakkeessa viivan vasemmalla puolella on ainakin yksi nollasta poikkeava kerroin (sillä muuten kyseinen tuntematon ei itse asiassa esiintyisi yhtälöryhmässä). Tämä tilanne säilyy, vaikka yhtälöryhmälle tehtäisiin Gaussin muunnoksia: sarakkeen kaikki kertoimet eivät voi muuntua nolliksi. (Miten viimeinen voisi kadota?)

Järjestetään nyt yhtälörivit siten, että $a_{11} \neq 0$. Eliminoidaan muut sarakkeen kertoimet nolliksi. (Alempien rivien kertoimet muuttuvat.) Saadaan:

$$\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \cdots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ 0 & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \cdots & \tilde{a}_{3n} & \tilde{b}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{m2} & \tilde{a}_{m3} & \cdots & \tilde{a}_{mn} & \tilde{b}_m \end{array}$$

Tämän jälkeen vaihtoehtoja on kaksi.

1° Jos kaikki toisen sarakkeen luvut toisesta lähtien (eli $\tilde{a}_{22}, \dots, \tilde{a}_{m2}$) ovat nollia, siirretään kyseinen sarake viimeiseksi eli vaihdetaan muuttujien järjestystä.

2° Jos jokin kertoimista $\tilde{a}_{22}, \dots, \tilde{a}_{m2}$ ei ole nolla, siirretään sen rivi toiseksi riviksi ja eliminoidaan. Saadaan

$$\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & 0 & a_{13}^* & \cdots & a_{1n}^* & b_1^* \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \cdots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & a_{33}^* & \cdots & a_{3n}^* & b_3^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{m3}^* & \cdots & a_{mn}^* & b_m^* \end{array}$$

Seuraavaksi tarkastellaan kolmannen sarakkeen lukuja $a_{33}^*, \dots, a_{m3}^*$ ja toimitaan kuten edellä. Eliminointia jatketaan sarake sarakkeelta, kunnes sitä ei

voida enää jatkaa. Sanottakoon, että onnistumme tekemään k eliminointia. Lopuksi jaetaan kukin rivi diagonaalille jääneillä luvuilla, jolloin diagonaalille saadaan ykköset. Alla nollat on jätetty merkitsemättä.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & & \alpha_{1(k+1)} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ & 1 & \alpha_{2(k+1)} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ & & \ddots & & \vdots & \\ & & & 1 & \alpha_{k(k+1)} & \cdots & \alpha_{kn} & \beta_k \\ & & & & & & & \beta_{k+1} \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & \beta_m \end{array}$$

Jos eliminoinnin seurauksena saatiin nollarivejä, ne ovat riveillä $k+1, \dots, m$. Vastaavasti voi olla, että kaikkia sarakkeita ei voida eliminoida, α :lla merkityjä kertoimia on jäänyt sarakkeisiin $k+1, \dots, n$.

Nyt nähdään, että yhtälöryhmällä on ratkaisuja

1. **Ei yhtään**, kun jokin luvuista $\beta_{k+1}, \dots, \beta_m$ ei ole nolla.
2. **Äärettömän monta**, kun luvut $\beta_{k+1}, \dots, \beta_m$ ovat nollia ja $k < n$. (Tällöin sarakkaiden $k+1, \dots, n$ muuttujat voidaan valita vapaasti.)
3. **Tasan yksi**, kun luvut $\beta_{k+1}, \dots, \beta_m$ ovat nollia ja $k = n$.

Kaikki lineaariset yhtälöryhmät voidaan siis ratkaista Gaussin eliminaatiomenetelmällä ja ratkaisuja on joko yksi, ei lainkaan tai äärettömän monta.

□

2.5 Yhtälöryhmien geometrinen tulkinta

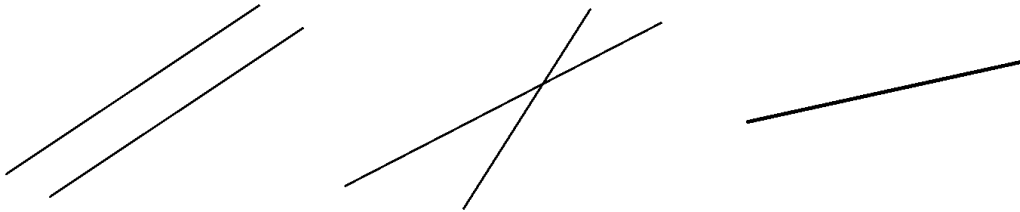
Muuttujien $x, y, z, \dots$ voidaan tulkita tarkoittavan koordinaatiston koordinaatteja. Esimerkiksi tason pisteiden koordinaatit ovat järjestettyjä pareja (x, y) ja avaruuden pisteet muotoa (x, y, z) .

Kun koordinaatteja sitoo lineaarisella yhtälöllä, ratkaisujoukkona on yhtä ulottuvuutta pienempi olio. Esimerkiksi yhtälön $x + y = 1$ ratkaisujoukko (x, y) -tasossa on suora $y = -x + 1$. Vastaavasti kolmiulotteisessa avaruudessa (x, y, z) yhtälö $x = 0$ rajaa ratkaisujoukoksi (y, z) -tason.

Yleisesti n -ulotteisessa avaruudessa on n vapaata muuttujaa, ja lineaarinen yhtälöryhmä vähentää vapaiden muuttujien määrää yhdellä. Jokaisen lineaarisen yhtälön ratkaisu rajaa siis n -ulotteisesta avaruudesta $(n-1)$ -ulotteisen *aliavaruuden*. Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu koostuu näiden aliavaruuksien yhteisistä osista.

Yhtälöpari tasossa

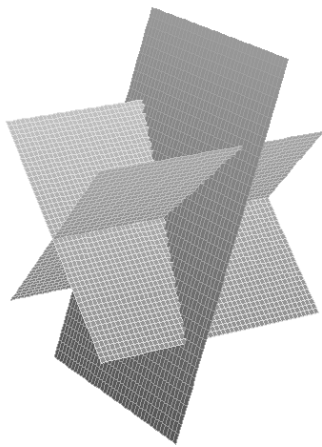
Yhtälöparin kummankin yhtälön ratkaisujoukko on suora. Jos suorat eivät leikkaa (eli ovat yhdensuuntaiset), yhtälöparilla ei ole ratkaisuja. Yksikäsitteinen ratkaisu löytyy, mikäli suorat leikkaavat yhdessä pisteessä. Ratkaisuja on äärettömän monta, jos suorat yhtyvät eli ovat samat.



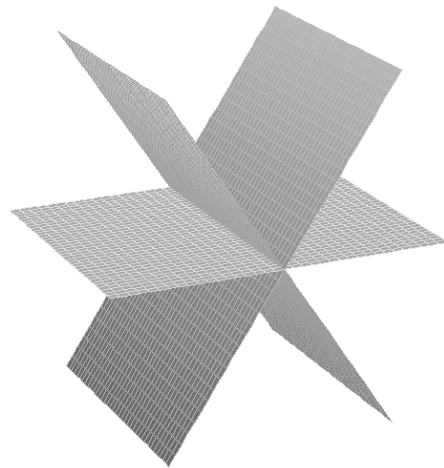
Yhdensuuntaiset, leikkavat ja yhtyvät suorat

Kolme yhtälöä, kolme tuntematonta

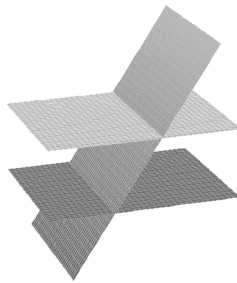
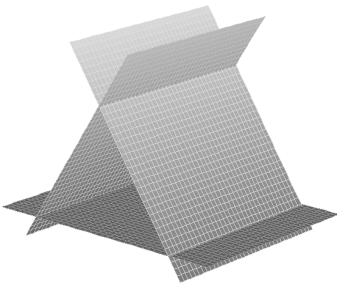
Kolme vapaata muuttujaa edustaa avaruutta, joten jokaisen lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisujoukko on taso. Kolme tasoa voi leikata toisensa monella tavalla. Tässä esimerkkejä.



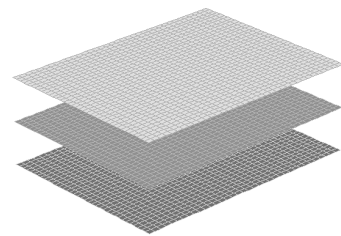
Yksi ratkaisu



Äärettömän monta ratkaisua



Ei ratkaisua



2.6 Lineaarisen yhtälöryhmän matriisimuoto

Edellä olemme käsitelleet lineaarisia yhtälöryhmiä kokonaisuuksina, joilla on tiettyjä ominaisuuksia. Tämä ajattelutapa tulee erityisen luontevaksi, kun yhtälöryhmä esitetään matriisien avulla. Merkinnän etuna on, että se on tavattoman tiivis ja helpottaa teoreettisia tarkasteluja. Valitettavasti käsin laskemiseen emme tästä saa apua.

Lineaarinen yhtälöryhmä voidaan esittää matriisien avulla seuraavasti. Olkoot yhtälöryhmässä m yhtälöä ja n tuntematonta. Merkitään kertoimia a_{ij} , muuttujia x_i ja vakio termejä b_j .

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Kaikki m yhtälöä voi esittää kahden $m \times 1$ -vektorin yhtäsuuruutena:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Koska kullakin rivillä esiintyvät samat muuttujat x_i , ne voidaan poimia erilliseen $n \times 1$ -vektoriin ja esittää yhtälön vasen puoli matriisien tulona:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

Valmista tuli! Otetaan käyttöön lyhyet merkinnät

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

jolloin koko yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa siististi

$$\boxed{A \cdot \bar{x} = \bar{b}}$$

Yhtälöryhmän ratkaiseminen on muuttunut tämän *matriisiyhtälön* ratkaisemiseksi. Ongelma käsitellään seuraavassa luvussa.

Luku 3

Käänteismatriisi ja determinantti

3.1 Determinantti

Determinantti on $n \times n$ -yhtälöryhmän kertoimista (tai $n \times n$ -matriisista) laskettava luku, jonka avulla voi tarkistaa, ratkeako yhtälöryhmä yksikäsitteisesti. Determinantilla on myös muita ominaisuuksia, mutta edellä mainittu on tärkein.

Motivointi

Yhden muuttujan lineaarisella yhtälöllä

$$ax = b$$

on yksikäsitteinen ratkaisu täsmällään silloin, kun $a \neq 0$. Lukua a voidaan kutsua yhtälön *determinantiksi*. Yhtälö ratkeaa, kun determinantti ei ole nolla.

Myös kahden tuntemattoman lineaarisen yhtälöparin ratkeavuus on suhteellisen helppo tarkistaa. Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f. \end{cases}$$

Kun $a \neq 0$, voidaan ratkaista seuraavasti:

$$\begin{array}{l} \begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array} \quad \parallel \cdot a \\ \cdot(-c) \downarrow \begin{array}{cc|c} a & b & e \\ ac & ad & af \end{array} \\ \begin{array}{cc|c} a & b & e \\ 0 & ad - bc & af - ec \end{array} \end{array}$$

Nyt jos luku $ad - bc \neq 0$, sillä voidaan jakaa alempi yhtälö ja yhtälöryhmä ratkeaa yksikäsitteisesti. Jos taas $ad - bc = 0$, yksikäsitteistä ratkaisua ei ole: ratkaisuja on joko äärettömän monta (jos myös $af - ce = 0$) tai ei lainkaan. Determinantti $ad - bc$ siis määrää, ratkeako yhtälöpari yksikäsitteisesti vai ei.

Edellä oletettiin, että $a \neq 0$. Jos taas $a = 0$, determinantti typistyy tuloksi $-bc$. Se on nolla, kun $b = 0$ tai $c = 0$. Kummassakaan tapauksessa yhtälöparilla ei ole yksikäsitteistä ratkaisua. Jos taas $b \neq 0 \neq c$, ratkaisu löytyy. Luku $ad - bc$ on siis yleispätevä mittari yhtälöryhmän ratkeavuudelle.

Kun yhtälöiden ja tuntemattomien määrä kasvaa, determinantti muuttuu monimutkaisemmaksi, mutta se on kuitenkin yksikäsitteinen luku, joka on laskettavissa. Seuraavaksi determinantin yleinen määritelmä.

Determinantin määritelmä

Determinantti on $n \times n$ -neliomatriisista laskettava luku. Matriisin A determinanttia merkitään $\det A$ tai korvaamalla matriisia ympäröivät sulut pystyviivoilla:

$$\text{matriisin} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{determinanttia merkitään} \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

1×1 -matriisin determinantti on sen ainoa alkio:

$$\det[a] = a.$$

2×2 -matriisin determinantti lasketaan seuraavasti:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Yleisesti determinantti määritellään rekursiivisesti (itseensä viitaten) siten, että se palautuu pienempien determinanttien laskemiseen ja lopulta 2×2 -determinanttiin.

Otetaan hetkeksi käyttöön merkintä $(A)_{ij}$, jolla tarkoitetaan *alimatriisia*, joka syntyy kun matriisista A poistetaan i :s rivi ja j :s sarake.

Esimerkiksi jos

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

niin

$$(A)_{12} = \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix}.$$

Determinantti lasketaan seuraavasti

1. Valitaan jokin rivi **tai** sarake.
2. Lasketaan kutakin tämän rivin (tai sarakkeen) alkiota vastaavien alimatriisien determinantit
3. Kerrotaan kukin alideterminantti vastaavalla valitun rivin (tai sarakkeen) alkiolla.
4. Lasketaan nämä tulot yhteen vaihtuvalla etumerkillä.
(Joka toinen +, joka toinen −.)

Etumerkki määräytyy ”shakkilautasäännön” mukaan:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Alimatriisen determinantit lasketaan samalla tavalla, kunnes päädytään 2×2 -determinantteihin. Tätä kutsutaan determinantin kehittämiseksi rivin i (tai sarakkeen j) suhteen.

Sama tiiviisti ilmaistuna: kehittäminen rivin i suhteen antaa

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \det[(A)_{ij}].$$

Esimerkki:

(3×3) -determinantti kehitettynä 1. rivin suhteen

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= \mathbf{a} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - \mathbf{b} \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + \mathbf{c} \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{a}(ei - fh) - \mathbf{b}(di - fg) + \mathbf{c}(dh - eg) \\ &= aei - afh + bfg - bdi + cdh - ceg \end{aligned}$$

Lasketaan sama 3×3 -determinantti kehitettynä 2. sarakkeen suhteen.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & \mathbf{b} & c \\ d & \mathbf{e} & f \\ g & \mathbf{h} & i \end{vmatrix} &= -\mathbf{b} \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + \mathbf{e} \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - \mathbf{h} \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ &= -\mathbf{b}(di - fg) + \mathbf{e}(ai - cg) - \mathbf{h}(af - cd) \\ &= -bdi + bfg - ceg + aei - afh + cdh \end{aligned}$$

Tuli sama tulos! Tämä yleistyy: determinantin arvo ei riipu valitusta rivistä tai sarakkeesta.

Determinantin ominaisuuksia

- Determinantin arvo ei riipu siitä, minkä rivin tai sarakkeen suhteen determinantti kehitetään.
- $\det(A^T) = \det A$
- Kahden rivin paikkojen vaihtaminen vaihtaa determinantin etumerkin.
- $\det(c \cdot A) = c^n \cdot \det A$, koska luku c tulee mukaan tuloon joka riviltä.
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- Determinantin arvo ei muutu Gaussin muunnoksissa.
- $\det A = 0$ täsmälleen silloin kun vastaavalla yhtälöryhmällä ei ole yksikäsitteistä ratkaisua.

Näistä kaksi viimeistä ovat erityisen tärkeitä.

Determinantin laskeminen käytännössä

Isojen determinanttien laskeminen on työlästä. Laskuja helpottaa merkittävästi se, että **determinantin arvo ei muutu Gaussin muunnoksissa**. (Tämä on luonollista, koska Gaussin muunnokset eivät muuta yhtälön ratkaisuja.) Todistuksen sijasta tyydymme 2×2 -esimerkkiin:

$$\begin{aligned} \cdot k \downarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ c + ka & d + kb \end{vmatrix} &= a(d + kb) - b(c + ka) = ad + akb - bc - bka \\ &= ad - bc. \end{aligned}$$

Koska $\det(A^T) = \det A$, voidaan Gaussin muunnoksia tehdä myös sarakkeiden kesken! Determinanttia kannattaa muokata niin, että nollija on mahdollisimman paljon, jolloin laskeminen on helppoa.

Esimerkki:

$$\begin{array}{c}
 \cdot 2 \\
 \curvearrowright \\
 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{array} \right| \\
 \\
 = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{array} \right|
 \end{array}$$

Kehitetään 2. rivin suhteen, koska se on helpoin:

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{array} \right| &= -(-1) \left| \begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{array} \right| + 0 \left| \begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{array} \right| - 0 \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right| \\
 &= 2 \cdot 6 - 5 \cdot 1 = 7.
 \end{aligned}$$

Suuren determinantin laskeminen muokkaamatta suoraan määritelmästä lähtien on erittäin työlästä, joten Gaussin muunnoksia kannattaa käyttää. Determinantteja laskevat tietokoneohjelmat tekevät juuri niin.

3.2 Käänteismatriisi

Motivointi

Osiassa 2.6 todettiin, että lineaarinen yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa matriisiyhtälöksi

$$A \cdot \bar{x} = \bar{b},$$

josta vektori $\bar{x}$ tulisi ratkaista. Mikäli A olisi luku, sillä voitaisiin jakaa. Mutta miten jakaa matriisilla?

Reaalilukujen tapauksessa jakaminen voidaan mieltää käänteisluvulla kertomiseksi. Jokaisella nollasta eroavalla luvulla a on käänteisluku a^{-1} . Määritelmän mukaan luvun ja sen käänteisluvun tulo on yksi. ($5 \cdot 5^{-1} = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$ ja niin edelleen.)

Matriisien tapauksessa jakolaskun korvaa *käänteismatriisilla* kertominen; varsinaisesta jakolaskusta ei puhuta. Tämä lienee järkevää väärinkäsitysten välttämiseksi. Merkintä $\frac{A}{B}$ voisi yhtä luontevasti tarkoittaa laskua $A \cdot B^{-1}$ tai $B^{-1} \cdot A$, ja niiden tulos on yleensä eri (matriisitulo ei ole vaihdannainen).

Käänteismatriisin määritelmä

Neliömatriisin A *käänteismatriisi* A^{-1} on matriisi, jolle pätee

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Käänteismatriisi on määritelty vain neliömatriiseille. (Ja kaikilla neliömatriiseillakaan ei ole käänteismatriisia.)

Esimerkki: Matriisit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ovat toistensa käänteismatriiseja, sillä

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Voidaan siis merkitä $B = A^{-1}$ ja $A = B^{-1}$.

Kaikilla matriiseilla ei ole käänteismatriisia

Nollamatriisilla ei ole käänteismatriisia, sillä $\mathbf{0} \cdot A = \mathbf{0} \neq I$ kaikilla matriiseilla A , joilla kyseinen kertolasku on määritelty. Nollamatriisi ei kuitenkaan ole ainoa käänteismatriisiton matriisi. Esimerkiksi matriisilla

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ei ole käänteismatriisia, kuten pian osoitetaan.

Matriisi, jolla on käänteismatriisi, on *säännöllinen* eli *kääntyvä*. Jos käänteismatriisia ei ole, matriisi on *singulaarinen*.

Käänteismatriisin ominaisuuksia

Kääntyville neliömatriiseille A ja B pätee

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Jos $AB = I$, niin myös $BA = I$.
Riittää siis tarkistaa näistä ehdoista toinen.

Todistetaan kaksi ensimmäistä ominaisuutta.

Käänteismatriisin määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} (A^{-1})^{-1}A^{-1} &= I & || \cdot A & \text{Kerrotaan oikealta.} \\ (A^{-1})^{-1}\underbrace{A^{-1}A}_I &= I \cdot A \\ (A^{-1})^{-1} &= A. \quad \square \end{aligned}$$

Vastaavasti

$$\begin{aligned} AB(AB)^{-1} &= I & || A^{-1} \cdot & \text{Kerrotaan vasemmalta.} \\ \underbrace{A^{-1}A}_I B(AB)^{-1} &= A^{-1} \cdot I & || B^{-1} \cdot \\ \underbrace{B^{-1}B}_I (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}. \quad \square \end{aligned}$$

Matriisin kääntäminen

Matriisin käänteismatriisin etsimistä kutsutaan kyseisen matriisin *kääntämissiksi*. Kuinka matriisi sitten käännetään? Luonteva lähtökohta on merkitä käänteismatriisin alkioit tuntemattomiksi ja yrittää ratkaista A^{-1} yhtälöstä $A \cdot A^{-1} = I$. Tämä vaatii lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemisen, johon puolestaan voidaan käyttää Gaussin-Jordanin eliminaatiota. Menetelmä esitellään tässä esimerkin kautta.

Etsitään matriisin

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi. Halutaan siis löytää

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \text{jolle}$$

$$B \cdot B^{-1} = I \quad \text{eli}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a - c & 3b - d \\ -2a + c & -2b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Auki kirjoitettuna tämä tarkoittaa yhtälöpareja

$$\begin{cases} 3a - c = 1 \\ -2a + c = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 3b - d = 0 \\ -2b + d = 1 \end{cases}.$$

Huomataan, että on ratkaistava kaksi lineaarista yhtälöryhmää, joilla on samat kertoimet, mutta eri vakio-termit. Ratkaistaan molemmat yhtälöt kerralla kuten osiossa 2.3.

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} a, c & b, d \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \right| \\ \begin{array}{c} \cdot 1 \uparrow \\ \cdot 2 \downarrow \end{array} \left| \begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right| \end{array}$$

Nyt ensimmäisestä vastaussarakkeesta voidaan lukea $a = 1$, $c = 2$ ja toisesta $b = 1$, $d = 3$. Koottuna saadaan

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

eli B^{-1} on juuri se matriisi, joka muodostui eliminoitaessa pystyviivan oikealle puolelle!

Tämä on Gaussin-Jordanin menetelmä matriisin kääntämiseksi, ja se yleistyy luontevasta kaikille neliömatriiseille, kuten seuraavassa esitetään.

3.3 Gaussin-Jordanin menetelmä

Gaussin-Jordanin menetelmä matriisin A kääntämiseksi on seuraava. Kirjoitetaan A :n alkiot ja sen viereen saman kokoisen yksikkömatriisin alkiot.

$$\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}$$

Tässä ovat lyhennysmerkinnässä käänteismatriisin ratkaisemiseksi tarvittavat n kappaletta $n \times n$ -yhtälöryhmää. Ratkaistaan yhtälöryhmät yhtä aikaa (kuten osiossa 2.3) ryhtymällä tekemään Gaussin muunnoksia. Suoritetaan ratkaiseminen loppuun siten, että vasemmalle muodostuu yksikkömatriisi. (Rivejä voi joutua järjestämään lopuksi.)

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}$$

Viivan oikealle puolelle muodostunut matriisi B on A :n käänteismatriisi.

Mikäli ratkaistaessa jollekin riville tulee viivan vasemmalle puolelle pelkkiä nollia, yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua. (Sillä oikealle puolelle ei voi syntyä nollariviä!) Tällöin matriisi ei ole kääntyvä.

Esimerkki kääntämisestä: Käännetään matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kirjoitetaan matriisin alkiot sekä yksikkömatriisi ja ryhdytään ratkomaan.

$$\begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot(-2) \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot(-1) \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ || :(-1) \\ || :(-2) \end{array}$$

$$\cdot(-1) \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Nyt voidaan lukea, että

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Tarkistus:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esimerkki: Yritetään kääntää matriisi

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\cdot 2 \uparrow \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\text{nollat} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Matriisi C ei ole kääntyvä!

Determinantin yhteys kääntyvyyteen

Koska matriisin kääntäminen vastaa yhtälöryhmän ratkaisemista, matriisin kääntyvyyttä voidaan testata determinantin avulla. Determinantti kertoo, ratkeeko yhtälöryhmä yksikäsitteisesti. Kun $\det A = 0$, matriisin kääntäminen ei onnistu.

Matriisi A on kääntyvä täsmälleen silloin, kun $\det A \neq 0$.

Tulolle pätee $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. Tulon determinantti on siis nolla, kun yhdenkin tulon tekijän determinantti on nolla. Saadaan laskusäännöt

- kääntyvä $\cdot$ kääntyvä = kääntyvä
- singulaarinen $\cdot$ kääntyvä = singulaarinen
- singulaarinen $\cdot$ singulaarinen = singulaarinen

Tämä on mielenkiintoinen analogia (vastaavuus) reaalityöryhmien kertolaskuun, jossa yksikin nolla tekee tulosta nollan. Nollalla kertominen tekee mistä tahansa luvusta nollan; singulaarisella matriisillä kertominen tekee mistä tahansa matriisista singulaarisen.

3.4 Cramerin sääntö

Nimitys Cramerin sääntö viittaa itse asiassa tapaan ratkaista lineaarinen yhtälöryhmä. Sitä ei käsitellä tässä, mutta kun sääntöä sovelletaan käänteismatriisin ratkaisemiseen, saadaan käänteismatriisille kirjoitettua suoraan lauseke, joskin hieman monimutkainen.

Olkoon A neliömatriisi kokoa $n \times n$. Merkinnällä $(A)_{ij}$ tarkoitetaan matriisia, joka jää jäljelle kun matriisista A poistetaan rivi i ja sarake j . Käänteismatriisin alkiot ovat kahden determinantin osamääriä:

$$A^{-1}_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det [(A)_{ji}]}{\det A}$$

Koottuna käänteismatriisiksi saadaan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} +\det[(A)_{11}] & -\det[(A)_{12}] & +\det[(A)_{13}] & \cdots & \pm\det[(A)_{1n}] \\ -\det[(A)_{21}] & +\det[(A)_{22}] & -\det[(A)_{23}] & \cdots & \mp\det[(A)_{2n}] \\ +\det[(A)_{31}] & -\det[(A)_{32}] & +\det[(A)_{34}] & \cdots & \pm\det[(A)_{3n}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm\det[(A)_{n1}] & \mp\det[(A)_{n2}] & \pm\det[(A)_{n3}] & \cdots & \pm\det[(A)_{nn}] \end{bmatrix}^T.$$

Huomattakoon kaavaan merkitty transpoosi.

Yleisen 2×2 -matriisin käänteismatriisi

Kun Cramerin sääntöä sovelletaan 2×2 -matriisiin $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, saadaan alimatriiseiksi 1×1 -matriisit

$$(A)_{11} = [d], \quad (A)_{12} = [c], \quad (A)_{21} = [b], \quad (A)_{22} = [a],$$

joiden determinantit ovat kyseiset luvut itse. Käänteismatriisiksi saadaan

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \det[(A)_{11}] & -\det[(A)_{12}] \\ -\det[(A)_{21}] & \det[(A)_{22}] \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tarkistetaan tuloksen oikeellisuus suoralla laskulla:

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} da-bc & 0 \\ 0 & ad-cb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tulos kannattaa muistaa ulkoa:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Käytännön laskennasta

Kumpaa menetelmää (Gauss-Jordania vai Crameria) sitten kannattaa käyttää matriisin kääntämiseen? Käytännön laskuissa niin tietokoneella kuin käsininkin Gauss-Jordan on ylivoimainen, sillä se vaatii paljon vähemmän laskutoimituksia. Cramerin säännön heikkous on siinä, että suurien determinanttien laskeminen on työlästä.

Gaussaamalla $n \times n$ -matriisin yhden sarakkeen eliminoimiseen tarvitaan $2n \cdot (n-1) \approx 2n^2$ kertolaskua, joten n sarakkeen eliminoiminen vie kokoluokkaa $2n^3$ kertolaskua. Laskennan vaativuus on siis verrannollinen matriisin koon kolmanteen potenssiin.

Cramerin sääntöä käyttäen joutuu laskemaan n^2 kappaletta determinantteja, jokainen kokoa $(n-1) \times (n-1)$. Näistä kukin vaatii $(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ lakutoimitusta, jos ne lasketaan suoraan kehittämällä rivin tai sarakkeen suhteen (ks. tehtävä 30). Tätä tuloa on tapana merkitä $(n-1)!$, joten yhteensä kertolaskuja tulee $n^2 \cdot (n-1)! = n \cdot n!$ kappaletta. Tämä on merkittävästi Gauss-Jordania huonompi tulos, kun n on suuri.

Tilannetta voidaan hieman tasoittaa laskemalla determinantit viisaasti (jolloin kertolaskuja tarvitaan kokoluokkaa n^3), mutta se ei riitä pelastamaan Cramerin sääntöä. Eräät edistyneemmät algoritmit päihittävät Gaussinkin suurten matriisien tapauksissa, mutta ovat kovin monimutkaisia.

3.5 Matriisiyhtälö

Nyt kun käänteismatriisi on käytössä, osaamme ratkaista tehokkaasti yhtälöitä, joissa esiintyy kertoimina ja tuntemattomina matriiseja.

Matriisiyhtälön ratkaisemiseksi on käytössä kolme keinoa. Yhtälön ratkaisujen muuttumatta voidaan

- lisätä yhtälön molemmille puolille sama matriisi
- kertoa tai jakaa puolittain samalla nollasta poikkeavalla luvulla
- kertoa puolittain samalla **kääntyvällä** matriisilla **samasta suunnasta**

Kertomisen suunta on tärkeä, koska matriisitulo ei ole vaihdannainen.

Esimerkki 1. Ratkaistaan yhtälö $AX = B$, missä A on kääntyvä matriisi.

$$\begin{array}{rcll} AX & = & B & || \quad A^{-1} \cdot \quad (\text{kerrotaan vasemmalta}) \\ A^{-1} \cdot AX & = & A^{-1}B & || \quad A^{-1} \cdot A = I \\ I \cdot X & = & A^{-1}B & || \quad I \cdot X = X \\ X & = & A^{-1}B & \end{array}$$

Vastaukseksi saatiin siis $X = A^{-1}B$. Jos matriisi A ei olisi kääntyvä, yhtälön ratkaisu olisi paljon työläämpää. Yhtälö täytyisi kirjoittaa auki komponentteittain ja ratkaista yhtälöryhmä.

Esimerkki 2. Ratkaistaan X , kun A , B ja C ovat kääntyviä neliömatriiseja:

$$\begin{array}{rcll} 2AXB - C & = & 2A + C & || \quad + C \\ 2AXB & = & 2A + 2C & || \quad : 2 \\ AXB & = & A + C & || \quad A^{-1} \cdot \\ XB & = & A^{-1}(A + C) & || \quad \cdot B^{-1} \\ X & = & A^{-1}(A + C)B^{-1}. & \end{array}$$

3.6 Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu

Kuten osiossa 2.6 todettiin, lineaarinen yhtälöryhmä

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \right.$$

voidaan esittää matriisimuodossa

$$A \cdot \bar{x} = \bar{b},$$

kun merkitään

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Kyseisen matriisiyhtälön ratkaisu jakautuu kahteen tapaukseen.

1° Kun A on kääntyvä (eli $\det A \neq 0$), voidaan ratkaista

$$A \bar{x} = \bar{b} \quad || \quad A^{-1}.$$

$$\bar{x} = A^{-1} \bar{b}.$$

Ratkaisuja on täsmälleen yksi.

2° Kun $\det A = 0$ tai A ei ole neliömatriisi, ei matriisia voida kääntää. Ratkaisuja on äärettömän monta tai ei lainkaan. Yhtälöryhmä täytyy ratkaista esimerkiksi Gaussin eliminaatiomenetelmällä, jolloin selviää, kummasta tapauksesta on kysymys.

Huomautettakoon, että ylimäärätyä yhtälöryhmää ratkottaessa yhtälöiden määrä voi vähentyä (esimerkiksi kahdesta samasta yhtälöstä toinen voidaan jättää pois), jolloin voidaan vielä päätyä neliömatriisiin. Se voi olla kääntyvä, jolloin yksikäsitteinen ratkaisu sittenkin löytyy.

Jos halutaan ainostaan ratkaista lineaarisia yhtälöryhmiä kynällä ja paperilla, matriiseilla laskeminen ei säästä vaivaa. Matriisimerkintä on kuitenkin hyvin lyhyt verrattuna perinteiseen tapaan, ja on siksi teoreettisen työn kannalta hyödyllinen tässäkin yhteydessä.

Tähän päättyy matriisien perusteiden läpikäynti. Seuraavat kolme lukua esittelevät matriisien sovelluksia erilaisissa yhteyksissä. Sovellukset on valittu siten, että vaadittavat pohjatiedot olisivat mahdollisimman vähäiset. Kyseessä ei siis ole mitenkään edustava otos matriisien käytöstä; matriiseihin voi olettaa törmäävänsä jossakin muodossa useimmilla matematiikan aloilla.

Luku 4

Kuvaukset tasossa

Tason pisteen voi kuva yksikäsitteisesti kahdella luvulla, kun käytössä on koordinaatisto. Perinteisessä (x, y) -koordinaatistossa koordinaatit x ja y määrittävät pisteen. Tämän informaation voi tallentaa kätevästi vektoriin $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Jokaista tason pistettä vastaa yksi vektori. Kolmiulotteisen avaruuden pisteet ovat puolestaan esitettävissä kolmiulotteisilla vektoreilla.

Tässä ajattelutavassa matriiseilla on luonnollinen yhteys *funktioihin* eli *kuvauksiin*. Funktiolle syötetään vektori, ja funktion arvo on toinen vektori. Tietynlaisia funktioita voidaan esittää luontevasti matriiseilla, sillä matriisilla kertominen muuttaa vektorin toiseksi vektoriksi. Funktioita, joiden lauseke on muotoa

$$f(\bar{x}) = A\bar{x}$$

kutsutaan *lineaariseksi*.

Funktioita merkitään usein edellä esiintyneen perinteisen merkinnän sijasta kannallisella nuolella:

$$\bar{x} \longmapsto A\bar{x}.$$

Merkitys on sama kuin aiemmin. Vektori $\bar{x}$ syötetään funktiolle ja tulos on $A\bar{x}$. Nuolimerkintää käytettäessä puhutaan yleensä kuvauksesta; kuvaus ja funktio ovat synonyymejä.)

4.1 Yleisesti lineaarikuvauksista

Esittelemme tässä lineaarikuvaukset hyvin lyhyesti. Aihe laajenisi luontevasti käsittelemään *vektoriavaruuksia* (varsin keskeinen käsite matematiikassa), mutta siihen ei mennä tässä.

Määritelmä. Lineaarikuvaus on nimitys funktioille f , joille pätee

1. $f(\bar{x} + \bar{y}) = f(\bar{x}) + f(\bar{y})$
2. $f(a\bar{x}) = af(\bar{x})$.

Tässä a on jokin reaaliluku ja $\bar{x}$ vaikka millainen matemaattinen olio, esimerkiksi luku tai vektori.

Olkoon $\bar{x} \mapsto \bar{x}'$ lineaarikuvauks. Määritelmästä seuraa, että vektorin $\bar{x}'$ komponentit riippuvat vektorin $f(\bar{x})$ komponenteista jollakin lineaarisella lausekkeella. Jos vektorissa $\bar{x}$ on n komponenttia ja vektorissa $\bar{x}'$ m komponenttia, saadaan

$$\begin{aligned} \bar{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A\bar{x}. \end{aligned}$$

Jokaiseen lineaarikuvaukseen voidaan siis liittää matriisi A , jonka komponentit sisältävät kaiken tiedon kuvauksesta. Juuri tätä varten matriisien kertolasku määritellään niin kuin tapana on. Jos $f(\bar{x}) = A\bar{x}$ ja $g(\bar{x}) = B\bar{x}$, kahden peräkkäisen kuvauksen lopputulos saadaan kertomalla matriisit: $g[f(\bar{x})] = g(A\bar{x}) = BA\bar{x}$.

4.2 Affinikuvaukset

Affinit kuvaukset ovat kuvankäsittelyn perustyökaluja. Kun tietokoneruudulla halutaan venyttää, pienentää, kiertää tai peilata kuvia, kyseessä on affiini kuvaus, jonka tietokone laskee kuvan pisteille. Myös 3D-grafiikka toimii matriiseilla (esimerkiksi tietokonepeleissä).

Matemaattisesti affinit kuvaukset ovat lineaarikuvauksia, joihin on mahdollisesti lisätty siirto. Tyydymme tässä tarkastelemaan kuvauksia (x, y) -tasossa.

Määritelmä. Merkitään $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ja $\bar{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Tason kuvaus $\bar{x} \mapsto \bar{x}'$ on *affiini*, kun se on muotoa

$$\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{b}.$$

Lause. Affinilla kuvauksella on seuraavat ominaisuudet

1. Samalla suoralla olevat pisteet ovat samalla suoralla myös kuvauksen jälkeen.
2. Samalla suoralla olevien janojen pituuksien suhteet säilyvät kuvauksessa (ellei suora kuvaudu pisteeksi).

Todistus. Olkoot $\bar{x}_1$ ja $\bar{x}_2$ kaksi tason pistettä. Samalla suoralla niiden välissä olevat pisteet $\bar{x}$ ovat muotoa

$$\bar{x} = t\bar{x}_1 + (1-t)\bar{x}_2, \text{ missä } t \in]0, 1[.$$

Piste $\bar{x}$ jakaa janan $\bar{x}_1\bar{x}_2$ suhteessa $\frac{t}{1-t}$. Tehdään affini kuvaus, jolloin

$$\begin{array}{lll} \bar{x}_1 & \mapsto & A\bar{x}_1 + \bar{b} = \bar{x}'_1 \\ \bar{x}_2 & \mapsto & A\bar{x}_2 + \bar{b} = \bar{x}'_2 \\ \bar{x} & \mapsto & A\bar{x} + \bar{b} = \bar{x}' \end{array}$$

Uudelle pisteelle $\bar{x}'$ pätee:

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= A\bar{x} + \bar{b} \\ &= A[t\bar{x}_1 + (1-t)\bar{x}_2] + \bar{b} & || & \bar{b} = t\bar{b} + (1-t)\bar{b} \\ &= tA\bar{x}_1 + (1-t)A\bar{x}_2 + t\bar{b} + (1-t)\bar{b} & || & \text{otetaan yhteiset tekijät} \\ &= t[A\bar{x}_1 + \bar{b}] + (1-t)[A\bar{x}_2 + \bar{b}] \\ &= t\bar{x}'_1 + (1-t)\bar{x}'_2. \end{aligned}$$

Uusi piste $\bar{x}'$ sijaitsee siis janalla $\bar{x}'_1\bar{x}'_2$ ja jakaa sen samassa suhteessa $\frac{t}{1-t}$ kuin alkuperäisenkin. $\square$

Huomattakoon, että $\bar{x}_1$ ja $\bar{x}_2$ voivat kuvautua samaksi pisteeksi ($\bar{x}'_1 = \bar{x}'_2$). Tällöin koko suora kuvautuu pisteeksi. Janojen pituuksien suhde ei tässä tapauksessa ole enää määritelty.

Lause. Affinien kuvausten ominaisuuksia:

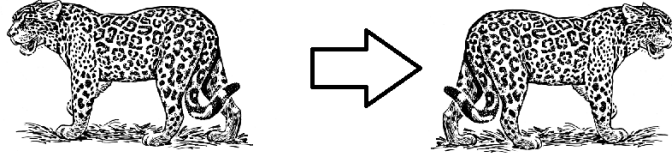
1. Kahden peräkkäisen affinin kuvauksen yhdistelmä on affini.
2. Kolmion voi kuvata mielivaltaiseksi kolmioksi affinilla kuvauksella.
3. Kuvioiden pinta-alat muuttuvat kuvauksessa tekijällä $\det A$.

Todistus on harjoitustehtävänä. (Tehtävät 35 ja 36.)

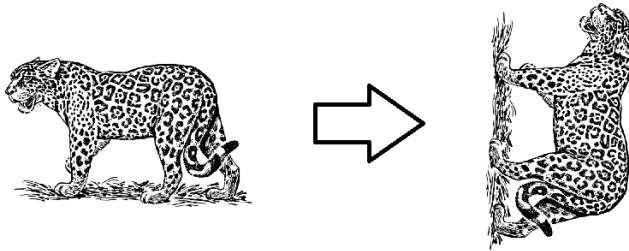
Esimerkkejä

Tässä kattava kokoelma affinikuvauksia:

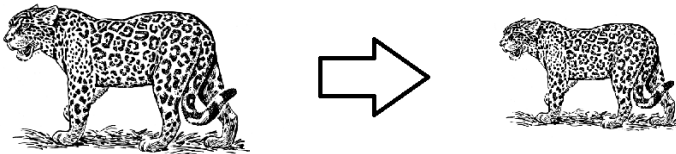
- Siirto, peilaus pisteen suhteen
- Peilaus suoran suhteen



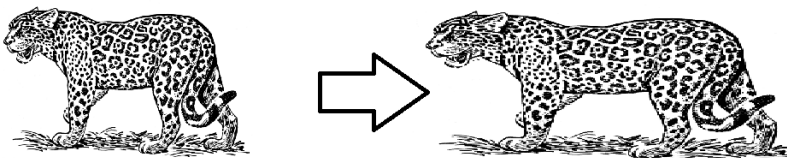
- Kierro



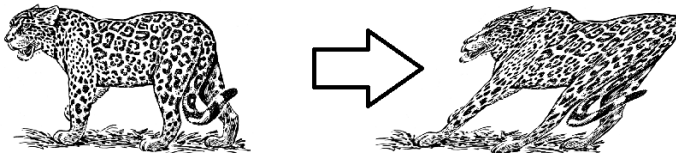
- Skaalaus eli *homotetia*



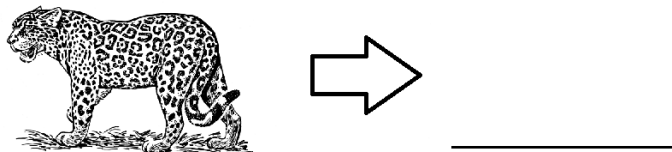
- Venytys tietyssä suunnassa



- Leikkaus eli kallistus



- Projektio



Luku 5

Markovin ketjut

5.1 Todennäköisyyslaskennan alkeita

Tapahtuman todennäköisyyttä kuvataan luvulla väliltä $[0,1]$.
(Prosentteina 0–100%, mikä on tietysti sama asia, sillä $1\% = \frac{1}{100}$.)

Tarvitsemme kaksi todennäköisyyslaskentaa koskevaa tietoa:

- Toisistaan *riippumattomien* tapahtumien yhtäaikaisen esiintymisen todennäköisyys saadaan kertomalla todennäköisyydet keskenään.
- Toisensa *poissulkevien* tapahtumien yhteinen todennäköisyys saadaan lakemalla todennäköisyydet yhteen.

Esimerkki.

Todennäköisyys heittää nopalla kuutonen on $\frac{1}{6}$. Todennäköisyys heittää kahdella nopalla kummallakin kuutonen on $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. (Heitot ovat toisistaan riippumattomat, joten todennäköisyydet kerrotaan.) Koska nopalla ei ole muistia, todennäköisyys kahdelle peräkkäiselle kuutoselle yhdellä nopalla heitettäessä on sama $\frac{1}{36}$. Kolmen peräkkäisen kuutosen todennäköisyys on $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.

Vastaavasti kolmen peräkkäisen ykkösen todennäköisyys on $\frac{1}{216}$. Todennäköisyys saada kolmella heitolla kolme ykköstä **tai** kolme kuutosta (toisensa poissulkevat vaihtoehdot) on $\frac{1}{216} + \frac{1}{216} = \frac{2}{216} = \frac{1}{108}$.

5.2 Malli, systeemi ja tila

Malli on yritys kuvata todellisuutta jollakin järjestelmällisellä tavalla. Malliin kuuluu *systeemi* eli tarkasteltava alue (esimerkiksi yksi atomi, aurinko, maapallon ilmakehä, pisaroita höyryssä tai vaikkapa liikenneuhka) sekä systeemin muutosta kuvaavat säännöt (kvanttimekaniikka, painovoimalaki, virtausmekaniikka, termofysiikka jne.).

Systeemin kulloisiakin ominaisuuksia kutsutaan systeemin *tilaksi*. Tila muuttuu mallin sääntöjen mukaan.

Esimerkki: Yksinkertainen säämalli

Muodostetaan säämalli, jossa systeemi olkoon Helsingin kaupunki. Systeemillä on kaksi tilaa: ”Sataa” ja ”Ei sataa”. Systeemin kehitystä kuvaavat seuraavat säännöt:

Jos tänään sataa, huomenna	Jos tänään ei sataa, huomenna
todennäköisyydellä 0,6 sataa	todennäköisyydellä 0,3 sataa
todennäköisyydellä 0,4 ei sataa	todennäköisyydellä 0,7 ei sataa

Malli on varsin karkea, mutta mikään malli ei vastaa todellisuutta täydellisesti. Mallilla ei ole muistia: toissapäivän sään tunteminen ei muuta ennustuksiamme tulevasta, jos eilinen sää tunnetaan. Tämä säämalli on esimerkki *Markovin ketjusta*.

Määritelmä.

Markovin ketju on sarja tiloja, jossa seuraavan tilan todennäköisyydet riippuvat vain edellisestä tilasta, eivät aiemmista.



Venäläinen matemaatikko Andrei Andreyevich Markov, 1856-1922

5.3 Vuokaavio ja tilakone

Piirretään kaavio edellisen osion säämallin tiloista ja todennäköisyyksistä siirtyä tiloista toisiin siirryttäessä päivästä seuraavaan.



Tällaista kuviota kutsutaan *vuokaavioksi*.

Miten mallimme sitten ennustaa tulevaisuutta? Jos jonakin päivänä sataa todennäköisyydellä s ja ei sada todennäköisyydellä e , vuokaaviosta voidaan lukea, että seuraavana päivänä sataa todennäköisyydellä $0,6s + 0,3e$. Vastavasti sateetonta on todennäköisyydellä $0,4s + 0,7e$.

Oletetaan, että tänään (päivänä 0) sataa, eli $s_0 = 1$ ja $e_0 = 0$. Huomenna (päivä 1) todennäköisyydet ovat

$$\begin{cases} s_1 = 0,6s_0 + 0,3e_0 \\ e_1 = 0,4s_0 + 0,7e_0 \end{cases} \quad \text{eli}$$

$$\begin{cases} s_1 = 0,6 \cdot 1 + 0,3 \cdot 0 = 0,6 \\ e_1 = 0,4 \cdot 1 + 0,7 \cdot 0 = 0,4 \end{cases} .$$

Huomenna siis sataa 60 % todennäköisyydellä. Ylihuomisen (päivä 2) ennusteen saamme samalla tavalla:

$$\begin{cases} s_2 = 0,6 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,48 \\ e_2 = 0,4 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,4 = 0,52 \end{cases}$$

Sateen todennäköisyys ylihuomenna on enää 48 %. Taulukoidaan tulokset:

	Päivä 0	Päivä 1	Päivä 2	Päivä 3
Sataa	1	0,6	0,48	
Ei sada	0	0,4	0,52	

Päivän kolme ennusteen voimme laskea edellisen päivän ennusteen avulla. Taulukkoa voi täyttää niin pitkälle kuin haluaa. Taulukkoa täyttävä ihminen toimii *tilakoneena*; hän tuottaa uudet luvut edellisten perusteella. Tämä on mekaanista ja aikaavievää, ja siksi tilakoneen työ kannattaa suosiolla jättää laskimelle tai tietokoneelle. Matriisien avulla se onnistuu yksinkertaisesti.

5.4 Tilansiirtomatriisi

Otamme käyttöön matriisilaskennan välineet Markovin ketjujen käsittelyssä. Tallennetaan säämallimme tilojen todennäköisyydet *tilavektoriin* $\bar{p}$.

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} \text{todennäköisyys tilalle "Sataa"} \\ \text{todennäköisyys tilalle "Ei sata"} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ e \end{bmatrix}.$$

Edelleen sään kehittymistä kuvaavat yhtälöt

$$\begin{cases} s_1 = 0,6s_0 + 0,3e_0 \\ e_1 = 0,4s_0 + 0,7e_0 \end{cases}.$$

Matriisimuodossa kirjoitettuna

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= \begin{bmatrix} s_1 \\ e_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6s_0 + 0,3e_0 \\ 0,4s_0 + 0,7e_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_0 \\ e_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix} \bar{p}_0 \end{aligned}$$

eli

$$\bar{p}_1 = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix} \bar{p}_0.$$

Matriisia $S = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}$ kutsutaan *tilansiirtomatriisiksi*. Kun tilavektori kerrotaan tilansiirtomatriisilla, saadaan seuraava tila.

Esimerkki jatkuu:

Tänään sataa, eli

$$\bar{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Huomisen sääennuste on

$$\bar{p}_1 = S\bar{p}_0 = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix},$$

ja ylihuomisen

$$\bar{p}_2 = S\bar{p}_1 = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,48 \\ 0,52 \end{bmatrix}.$$

Voidaan laskea myös suoraan viikon päähän:

$$\bar{p}_7 = S^7 \bar{p}_0 = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}^7 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4286964 \dots \\ 0,5713036 \dots \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,43 \\ 0,57 \end{bmatrix}.$$

Monet muuten hankalat todennäköisyyslaskennan ongelmat ratkeavat helposti näillä työkaluilla. Kun vuokaavio ja sen avulla tilansiirtomatriisi on saatu muodostettua, systeemin tilan laskeminen kuinka monen askeleen päähän tahansa on helppoa.

Tilansiirtomatriisin muodostaminen

Tilansiirtomatriisia muodostaessa kannattaa muistaa, että sen alkiot ovat todennäköisyyksiä siirtyä tilasta toiseen. Ne voidaan lukea suoraan vuokaaviosta. Esimerkiksi säämallimme tapauksessa vuokaavio



tuotti seuraavan tilansiirtomatriisin:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Mistä} \\ sataa & ei \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Mihin} \\ sataa \\ ei \end{array} & \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Tällä tavoin monimutkaisinkin vuokaavion määräämä tilansiirtomatriisi saadaan muodostettua yksinkertaisesti. Jos systeemissä on n tilaa, tuloksena on $n \times n$ -tilansiirtomatriisi. Tilojen järjestyksen matriisissa voi valita vapaasti, kunhan tilavektorissa käyttää samaa järjestystä.

Hyvä tapa tarkistaa tilansiirtomatriisi on varmistaa, että jokaisen sarakkeen alkioiden summaksi tulee 1. (Näin täytyy olla, sillä jokaisesta tilasta siirrytään todennäköisyydellä 1 johonkin tilaan.)

5.5 Tasapainotila

Systeemi on *tasapainotilassa*, kun sen peräkkäiset tilat ovat samat. Tällöin

$$S\bar{p} = \bar{p}.$$

Monet systeemit ajautuvat ajan kuluessa kohti tasapainotilaa, mutta eivät kaikki. Tästä esimerkkinä kaksitilainen systeemi, jonka tilansiirtomatriisi on

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tämä vastaisi säämallia, jossa joka toinen päivä sataa, joka toinen päivä ei.

Jos tilansiirtomatriisin *kaikki* alkiot ovat positiivisia (> 0), systeemi ajautuu varmuudella kohti tasapainoa alkutilasta riippumatta.

Lasketaan säämallillamme ennuste kolmen, kymmenen ja viidenkymmenen päivän päähän kahdesta eri alkutilasta.

$$\begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,444 \\ 0,556 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,417 \\ 0,583 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,428574 \\ 0,571428 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,428568 \\ 0,571431 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}^{50} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,428571 \\ 0,571428 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}^{50} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,428571 \\ 0,571428 \end{bmatrix}$$

Alkutilasta riippumatta lähestytään tasapainoa, joka on likimain $\begin{bmatrix} 0,4286 \\ 0,5724 \end{bmatrix}$. Näin tasapainolle saatiin likiarvo numeerisesti.

Tasapaino voidaan ratkaista myös analyyttisesti yhtälöstä

$$S\bar{p} = \bar{p},$$

eli säämallin tapauksessa

$$\begin{cases} 0,6s + 0,3e = s \\ 0,4s + 0,7e = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3e = 0,4s \\ -0,3e = -0,4s \end{cases}.$$

Kumpikin yhtälö kertoo saman: $3e = 4s$. Lisäksi tiedämme, että $e + s = 1$, sillä todennäköisyydellä 1 vallitsee jokin säätila. Tästä saamme ratkaistuksi tarkan tasapainon:

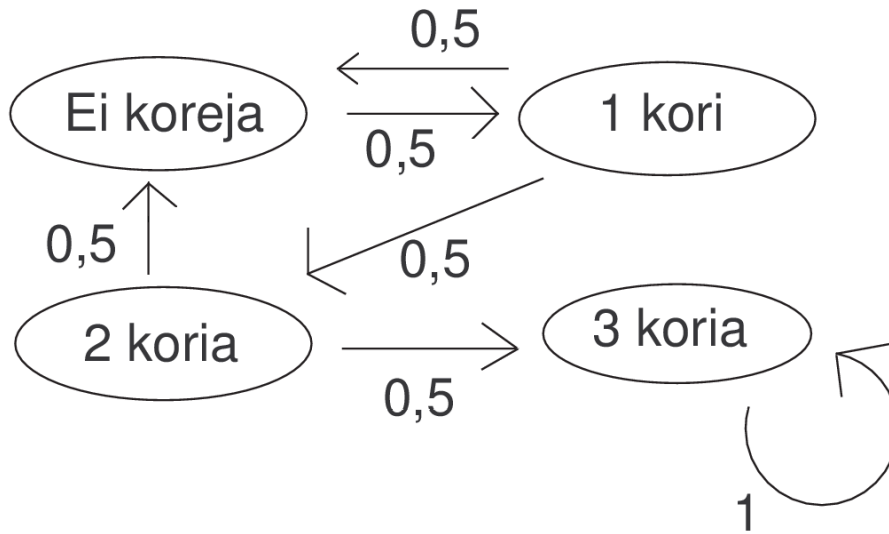
$$\begin{cases} e + s = 1 \\ 3e = 4s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{3}{7} = 0,428571\dots \\ e = \frac{4}{7} = 0,571428\dots \end{cases}$$

5.6 Esimerkkejä

Esimerkki 1. Ratkaistaan vanha matematiikkakilpailutehtävä:

Erkki häittää koripalloa kahdeksan kertaa. Hän heittää korin todennäköisyydellä 0,5. Millä todennäköisyydellä Erkki heittää vähintään 3 peräkkäistä koria?

Ratkaisu. Laaditaan vuokaavio, jossa pidetään kirjaa peräkkäisistä koreista ja nollataan aina kun tulee huti. Tilat ovat: Ei koreja, 1 kori, 2 koria, 3 koria.



Tilansiirtomatriisiksi saadaan

$$S = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{ei} & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{ei} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Alussa koreja ei ole yhtään, joten

$$\bar{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{ei} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}.$$

Kahdeksan heiton jälkeen

$$\bar{p}_8 = S^8 \bar{p}_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^8 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^8 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{256} \begin{bmatrix} 81 \\ 44 \\ 24 \\ 107 \end{bmatrix}.$$

Vastaus on siis $\frac{107}{256}$.

Esimerkki 2

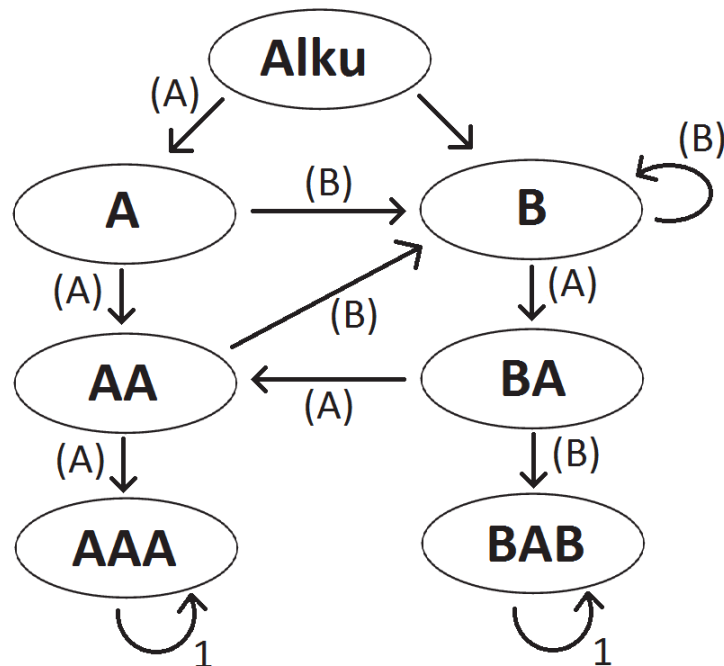
Millä todennäköisyydellä kolikonheitossa sarja kruuna-kruuna-kruuna (AAA) tulee ennen sarjaa klaava-kruuna-klaava (BAB) ?

Ratkaisu. Tunnistetaan ensin tarvittavat tilat:

- Alkutila ennen ensimmäistä heittoa
- Saatu A
- Saatu AA
- Saatu AAA
- Saatu B
- Saatu BA
- Saatu BAB

Nämä tilat riittävät, sillä esimerkiksi sarja BBB voidaan samaistaa tilaan B . Tilaan B voidaan sisällyttää kaikki sarjat, joiden viimeinen heitto on B , mutta jotka eivät sisällä sarjoja AAA tai BAB . Tilat AAA ja BAB ovat *nieluja*, joista ei enää mennä muihin tiloihin. Ajan mittaan todennäköisyysmassa valuu nieluihin.

Laaditaan vuokaavio. Kaikki siirtymätodennäköisyydet ovat $\frac{1}{2}$, paitsi nieluista itseensä 1.



Tilaa ”Alku” ei oikeastaan tarvita, sillä siellä vieraillaan vain kerran. Tämän jälkeen tilojen A ja B todennäköisyydet ovat 50%. Pudotetaan siis ”Alku” pois ja aloitetaan suoraan ensimmäisen heiton jälkeisestä tilanteesta, jolloin saadaan alkutilavektori ja siirtomatriisi

$$\bar{p}_0 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ AA \\ BA \\ AAA \\ BAB \end{matrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Huomattavaa on, että myös tila A on turha: sitäkin käytetään vain kerran. (Miten alkutila pitää valita, jos A poistetaan?) Jatketaan kuitenkin näin. Kahdenkymmenen heiton jälkeen tilanne on

$$\bar{p}_{20} = S^{20} \cdot \bar{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,00130 \dots \\ 0,00060 \dots \\ 0,00089 \dots \\ 0,41552 \dots \\ 0,58166 \dots \end{bmatrix}.$$

Jos vastaus halutaan prosentin tarkkuudella, tämä riittää mainiosti. Tilojen AAA ja BAB yhteenlaskettu todennäköisyys on 99,668%. Todennäköisyysmassan loppu 0,33% ei vaikuta pyöristykseen, vaikka se valuisi kaikki toiseen näistä. Vastaus alkuperäiseen kysymykseen on siis: 42% todennäköisyydellä.

Mikäli tarkkuutta halutaan enemmän, on syytä laskea hieman pidemmälle varmuuden vuoksi. Esimerkiksi $\bar{p}_{32}$ sisältää enää 0,0067% neljässä ensimmäisessä tilassa ja $\bar{p}_{64}$ vähemmän kuin 0,000001%. Näin vastaukseksi saadaan 41,66666%. Tästä tarkka vastaus $41\frac{2}{3}\%$ on nähtävissä, joskaan varmuutta sen oikeellisuudesta ei näillä menetelmillä voida saada.

Huomautus laskennasta

Edellisissä esimerkeissä on laskettu tehottomasti, sillä matriisin ja vektroin välinen kertolasku ($S \cdot \bar{p}$) on nopeampi laskea kuin kahden matriisin välinen ($S \cdot S$). On siis nopeampaa laskea $S \cdot (S \cdot \bar{p})$ kuin $S^2 \cdot \bar{p}$.

Laskimen kanssa on toisinaan kätevää käyttää kakkosen potensseja: lasku $((S^2)^2)^2$ sisältää vain neljä matriisi-matriisi-kertolaskua, kun taas S^{16} vaatii 15 kertolaskua. Tarkka nopeusero riippuu luonnollisesti siitä, miten kyseinen laskin käytännössä laskee matriisien potenssit.

Kunnon sovelluksissa laskentanopeuden kasvattamiseen käytetään vielä paljon edistyneempiäkin menetelmiä, mutta niitä varten teoriaa täytyisi käyttää pidemmälle.

Luku 6

Käyrän sovitus pistejoukkoon

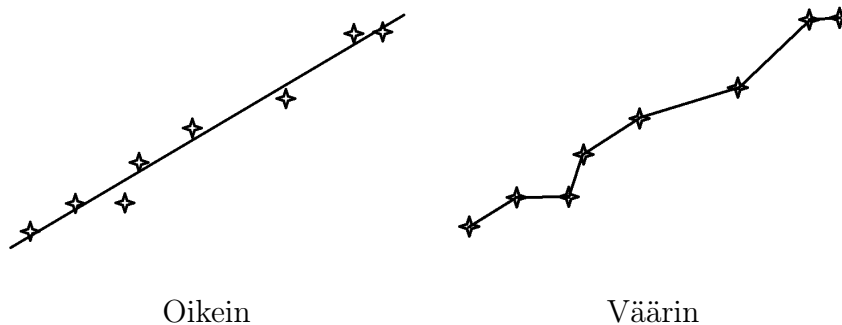
Oletetaan, että (x, y) -koordinaatistoon on merkitty pisteitä (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , $\dots$, (x_n, y_n) . Tässä luvussa etsimme käyrää $y = f(x)$, joka parhaiten kulkisi näiden pisteiden kautta.

Tähän *käyrän sovittamiseksi* kutsuttuun ongelmaan tarvitaan ratkaisu, kun halutaan

- saada esille luotettavia mittaustuloksia virheitä sisältävästä datasta
- yleistää yksittäisiä mittaustuloksia ennusteiksi
- testata teorian ennustetta todellisella datalla.

Mittauksiin sisältyy aina virhe, kun mitataan jatkuvia suureita. (Kuten pituus, aika, massa ja niin edelleen, sillä ääretön mittaustarkkuus on mahdottomuus.) Voidaan siis ajatella, että kun mittaustuloksia merkitään koordinaatiston pisteiksi, yksikään piste ei ole täysin oikeassa paikassa. Mitä tarkempi mittaustulos, sitä pienempi tämä siirtymä on. Jos siis pistejoukosta yritetään hahmottaa ”mitä oikeasti tapahtui”, oleellista ei ole yksittäisten pisteiden osuminen käyrälle. Tärkeää on vain se, kuinka uskottavasti kyseinen malli selittää mittaukset *kun mittaustulokset otetaan huomioon*.

Voimme tietysti yhdistää kaikki halutut pisteet vaikkapa murtoviivalla, mutta silloin vain seuraaisimme mittaustuloksia. Virhe saadaan keskiarvoistettua paljon pienemmäksi, kun valitsemme käyrätyypin, joka parhaan tietomme mukaan kuvaa itse ilmiötä. Käytännössä haluamme löytää esimerkiksi parhaan suoran, parhaan paraabelin tai parhaan eksponenttifunktion.



Esimerkiksi Newtonin mekaniikka ennustaa, että ilmaan heitetyt kappaleet (joiden ilmanvastus on pieni) lentävät paraabeliratoja. Tiedossamme olkoon vaikkapa kymmenen mittaustulosta radan alkupäästä, ja haluamme ennustaa, minne kappale putoaa. Ennustetta varten selvitämme, mikä paraabeli $y = ax^2 + bx + c$ kulkee parhaiten mittaustulosten kautta.

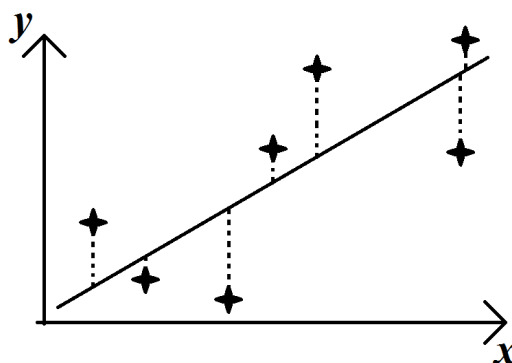
6.1 Pienimmän neliösumman käyrä

Ei ole mitenkään yksikäsitteistä, mikä on ”paras” käyrä kulkemaan tiettyjen pisteiden kautta. Jos haluamme tulokseksi vaikkapa suoran, kaikki pisteet tuskin osuvat täsmälleen kyseiselle suoralle. Suoran hyvyttä voidaan arvioida monella tavalla.

Luontevaa on pyrkiä minimoimaan pisteiden etäisyydet käyrästä jollakin tavalla. Pelkkä etäisyyksien summan minimointi ei tuota yksikäsitteistä tulosta. Kunhan kulmakerroin ei muutu ja suoran ylä- ja alapuolella on yhtä monta mittauspistettä, suoraa voi liikuttaa summan muuttumatta.

Paras suora muuttuu yksikäsitteiseksi, kun pyritään minimoimaan etäisyyksien *neliöiden* summa. Puhutaan *pienimmän neliösumman* (PNS) suorasta tai muusta käyrästä.

Laskut sujuvat paljon mukavammin, kun pisteiden etäisyyksiä käyrästä ei mitata suoraan vaan y -akselin suunnassa. Tällöin ratkaistava ongelma on lineaarinen ja ratkaisu siis suhteellisen helppo.



PNS-suora: Katkoviivojen pituuksien neliöiden summa minimoitava

Minimoitava suure on siis muotoa

$$S = [y_1 - f(x_1)]^2 + [y_2 - f(x_2)]^2 + \dots + [y_n - f(x_n)]^2,$$

missä tuntematon on funktio f .

Seuraavaksi esitellään metodi pienimmän neliösumman suoran, polynomin ja joidenkin muiden käyrien löytämiseksi.

6.2 Suoran sovitus

Kaikki suoria (pystysuorat pois lukien) voi kuvata yhtälöllä $y = kx + b$. Suoran muodostavat ne pisteet (x, y) , jotka toteuttavat kyseisen yhtälön. Lukua k kutsutaan kulmakertoimeksi ja lukua b vakiotermiksi.

Haluamme sovittaa suoran pisteisiin $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Luvut k ja b pitäisi siis saada laskettua annettujen pisteiden avulla. Haluaisimme että kukin pari (x, y) toteuttaisi suoran yhtälön, eli

$$\begin{cases} kx_1 + b = y_1 \\ kx_2 + b = y_2 \\ \vdots \\ kx_n + b = y_n \end{cases}$$

Tässä yhtälöryhmässä on 2 muuttujaa (k ja b) ja n yhtälöä, joten se on tuhdisti ylimäärätty. Ratkaisuja ei siis todennäköisesti ole. (Ratkaisu on olemassa vain, jos kaikki pisteet ovat samalla suoralla.) Kirjoitetaan yhtälöryhmä kuitenkin toiveikkaasti matriisimuotoon ja ryhdytään ratkomaan.

Huomio! Seuraava lasku ei todista yhtikäs mitään, sillä lähdemme liikkeelle yhtälöstä, joka ei ole tosi. Saamme kuitenkin tuloksen, joka antaa pienimmän neliösumman suoran. Lasku on hyödyllinen ainostaan siksi, että sen avulla on helppo muistaa lopputulos. Kunnon todistus löytyy sivulta 58, mutta se hyödyntää differentiaalilaskentaa.

Kirjoitetaan edellä esiintynyt (epätosi) yhtälöryhmä matriisimuodossa

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} & \cdot \begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ n \times 2 & 2 \times 1 \qquad n \times 1 \end{array}$$

Merkitään nyt

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{k} = \begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

eli voimme kirjoittaa tehokkaasti

$$A\bar{k} = \bar{y}.$$

Matriisi A ei ole neliömatriisi, joten sillä ei ole käänteismatriisia. Tulo $A^T A$ on kuitenkin (2×2) - matriisi. Näin muodostettu matriisi aina on kääntyvä, kunhan kaikki luvut x_i eivät ole samoja. Voidaan siis laskea:

$$\begin{aligned} A\bar{k} &= \bar{y} & ||A^T. \\ A^T A\bar{k} &= A^T \bar{y} & ||(A^T A)^{-1}. \\ \bar{k} &= (A^T A)^{-1} A^T \bar{y}. \end{aligned}$$

Sattuu olemaan niin onnellisesti, että tällä tavoin laskettu $\bar{k}$ antaa pienimmän neliösumman suoran kulmakertoimen (k) ja vakiotermin (b). Tämän todistaminen vaatii työkaluja, jotka ylittävät kurssin pohjatietovaatimukset (joko derivointia tai projektioita avaruudessa). Derivaattaan perustuva todistus on sivulla 58.

Lauseke $(A^T A)^{-1} A^T$ on matriisin A *pseudoinverssi* ja sitä merkitään usein A^+ .

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$$

PNS-suoran kaava

Pienimmän neliösumman suoran $y = kx + b$ kertoimet k ja b saadaan pseudoinverssin avulla:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix} &= A^+ \bar{y} \\ &= (A^T A)^{-1} A^T \bar{y}. \end{aligned}$$

Esimerkki.

Sovitetaan suora pisteisiin

x	1,1	2,6	3,1	5,0	6,7
y	5,1	7,3	7,4	9,5	13,3

Muodostetaan matriisit A ja $\bar{y}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1,1 & 1 \\ 2,6 & 1 \\ 3,1 & 1 \\ 5,0 & 1 \\ 6,7 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 5,1 \\ 7,3 \\ 7,4 \\ 9,5 \\ 13,3 \end{bmatrix}$$

Nyt

$$\begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix} = A^+ \bar{y} = (A^T A)^{-1} A^T \bar{y}$$

ja laskimella tai tietokoneella saadaan

$$\begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,39432 \\ 3,36101 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1,39 \\ 3,36 \end{bmatrix}.$$

Kyseisiin pisteisiin sovitettu pienimmän neliösumman suora on siis $y = 1,39x + 3,36$.

6.3 Polynomin sovitus

Astetta n oleva polynomi on muotoa $y = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Polynomia sovitettaessa halutaan löytää kertoimet $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$. Tämä tapahtuu olennaisesti samalla tavalla kuin suorankin tapauksessa.

Sovitetaan polynomi pisteisiin $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$. Haluaisimme siis ratkaista kertoimet $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} a_n x_1^n + \dots + a_1 x_1 + a_0 & = & y_1 \\ a_n x_2^n + \dots + a_1 x_2 + a_0 & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n x_m^n + \dots + a_1 x_m + a_0 & = & y_m \end{cases}$$

Kuten suorankin tapauksessa, yhtälöryhmällä ei yleensä ole täsmällistä ratkaisua, mutta löydämme pienimmän neliösumman ratkaisun. Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots & x_2 & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_m^n & x_m^{n-1} & \dots & x_m & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{k} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

jolloin yhtälöryhmä vastaa taas matriisiyhtälöä

$$A\bar{k} = \bar{y}.$$

Pienimmän neliösumman n . asteen polynomin kertoimet saadaan tutusta kaavasta.

$$\bar{k} = (A^T A)^{-1} A^T \bar{y}$$

Todistus sivuutetaan.

Esimerkki.

Sovitetaan paraabeli pisteisiin

x	0,0	0,3	0,9	1,5	2,2
y	1,8	3,4	5,8	7,4	9,5

Nyt matriisit ovat:

$$A = \begin{bmatrix} 0,0^2 & 0,0 & 1 \\ 0,3^2 & 0,3 & 1 \\ 0,9^2 & 0,9 & 1 \\ 1,5^2 & 1,5 & 1 \\ 2,2^2 & 2,2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1,8 \\ 3,4 \\ 5,8 \\ 7,4 \\ 9,5 \end{bmatrix}$$

ja

$$\bar{k} = (A^T A)^{-1} A^T \bar{y} = \begin{bmatrix} -0,56881 \\ 4,65827 \\ 1,92386 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0,569 \\ 4,66 \\ 1,92 \end{bmatrix}$$

Sovitettu paraabeli on siis $y = -0,569x^2 + 4,66x + 1,92$.

Muut käyrät ja linearisointi

Tämä tulee myöhempään painokseen eikä kuulu tämän vuoden kurssiin.

Pienimmän neliösumman suoran kaavan johto

Tämä todistus hyödyntää differentiaalilaskentaa. (Pitkän matematiikan kurssit 7 ja 8).

Halutaan löytää suora $y = kx + b$, jolle pisteistä $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ laskettujen y -suuntaisten etäisyyksien neliöiden summa on pienin. Kyseinen neliösumma on

$$\begin{aligned} S &= (kx_1 + b - y_1)^2 + (kx_2 + b - y_2)^2 + \dots + (kx_n + b - y_n)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (kx_i + b - y_i)^2 \end{aligned}$$

Summa riippuu vain luvuista k ja b , jotka voidaan valita mielivaltaisesti. Suora on kummankin parametrin suhteen jatkuva ja derivoituva, joten minimi voi löytyä vain derivaatan nollakohdasta. Minimi on selvästi olemassa, joten se löytyy, kun

$$\frac{d}{dk}S = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{d}{db}S = 0.$$

Lasketaan:

$$\frac{d}{dk} \sum_{i=1}^n (kx_i + b - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n 2x_i(kx_i + b - y_i) = 2 \left(k \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) = 0$$

$$\frac{d}{db} \sum_{i=1}^n (kx_i + b - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n 2(kx_i + b - y_i) = 2 \left(k \sum_{i=1}^n x_i + bn - \sum_{i=1}^n y_i \right) = 0$$

Saatiin yhtälöpari

$$\begin{cases} k \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ k \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

eli

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix}.$$

Kun matriiseja verrataan pseudoinverssin kaavassa esiintyvään matriisiin A , havaitaan että

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix} = A^T A \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix} = A \bar{y},$$

joten pseudoinverssi $(A^T A)^{-1} A^T \bar{y}$ toden totta tuottaa pienimmän neliösumman suoran kertoimet. $\square$

Liite A

Summamerkintä Σ

Kun paljon samankaltaisia termejä lasketaan yhteen, kannattaa ottaa käyttöön lyhennysmerkintä vaivaa säästämään. Matematiikassa summaa merkitään kreikkalaisella kirjaimella Σ (iso sigma).

Summaa, jossa on n yhteenlaskettavaa merkitään näin:

$$\sum_{i=1}^n (\text{lauseke, joka riippuu } i:\text{stä})$$

Merkintä luetaan ”summa i käy yhdestä n :ään lauseke”. Esimerkiksi

$$\sum_{i=1}^5 i^2$$

luetaan ”summa i käy yhdestä viiteen i toiseen” ja se tarkoittaa

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Lausekkeeseen i^2 siis sijoitetaan i :n arvot yhdestä viiteen ja lasketaan ne yhteen.

Esimerkkejä.

$$\sum_{i=1}^4 i = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\sum_{i=0}^3 2i = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$$

$$\sum_{i=3}^5 (\sqrt{i} - 1) = \sqrt{3} - 1 + \sqrt{4} - 1 + \sqrt{5} - 1 = \sqrt{3} + \sqrt{5} - 1$$

Kuten edellisistä esimerkeistä käy ilmi, summan ei tarvitse alkaa arvosta $i = 1$.

Mikäli lauseketta ei haluta kirjoittaa näkyviin, sen paikalle voidaan kirjoittaa x_i , missä alaindeksi i kertoo, että x :n arvo riippuu i :stä. Jos summauksen ylärajaa merkitään kirjaimella n , saadaan juhlallisen näköinen

$$\sum_{i=1}^n x_i$$

Kun vain pitää mielessä, mitä summausmerkitä tarkoittaa, on helppo ymmärtää seuraavat säännöt:

$$\begin{aligned} a \cdot \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n a \cdot x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i &= \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \\ \sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=k+1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

Summausindeksejä voi olla useita, ja silloin pitää olla tarkkana. Esimerkiksi

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_i y_j = \sum_{i=1}^3 x_i y_1 + x_i y_2 = \sum_{i=1}^3 x_i (y_1 + y_2) = (y_1 + y_2) \sum_{i=1}^3 x_i = (y_1 + y_2)(x_1 + x_2 + x_3).$$

Sama tulos saadaan näin:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 x_i y_j = \sum_{i=1}^3 x_i \sum_{j=1}^2 y_j = (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2).$$

Tulos yleistyy: Tulossa termin voi siirtää summamerkin ulkopuolelle, mikäli termissä ei ole kyseisen summamerkin indeksia.

Liite B

Harjoitustehtäviä

Luku 1

1.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4,5 \\ \pi & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Määritä

a) matriisin A rivien määrä **b)** sarakkeiden määrä **c)** matriisin A koko
d) a_{11} **e)** a_{21} **f)** a_{32}

2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 11 \\ 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 16 & -5 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Laske a) $A + D$ b) $B + C$ c) $E + B$.

3. Laske edellisen tehtävän matriiseilla a) $B^T - 2C$ b) $(A^T - D)^T$.

4. Kyllä vai ei?

- a) Vektorit ovat matriiseja.
- b) Kaikki yksikkömatriisit ovat neliömatriiseja.
- c) Kaikki nollamatriisit ovat neliömatriiseja.
- d) Neliömatriisin transpoosi on aina neliömatriisi.

5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

Laske a) AC b) AB c) CB d) BC

6. Torikauppias kerää tuotteidensa hinnat vektoriin $\bar{h}$ tiedot päivittäisestä myynistä matriisiin M .

$$\bar{h} = \begin{bmatrix} 2,00 \text{ €/kg} \\ 1,00 \text{ €/kg} \\ 3,00 \text{ €/kg} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{nauriit} \\ \text{perunat} , \\ \text{sipulit} \end{array} \quad M = \begin{array}{ccc} \text{naur.} & \text{per.} & \text{sip.} \\ \begin{bmatrix} 30\text{kg} & 80\text{kg} & 23\text{kg} \\ 14\text{kg} & 56\text{kg} & 11\text{kg} \\ 40\text{kg} & 75\text{kg} & 30\text{kg} \\ 28\text{kg} & 94\text{kg} & 27\text{kg} \\ 34\text{kg} & 85\text{kg} & 19\text{kg} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{ma} \\ \text{ti} \\ \text{ke} \\ \text{to} \\ \text{pe} \end{array} \end{array}$$

Laske $M \cdot \bar{h}$. Mikä on sen tulkinta?

7.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Laske a) A^2 b) $A^T A$ c) AA^T d) $(A^T A)^T$

8.

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Laske a) $S\bar{v}$ b) $\bar{v}^T S$ c) $\bar{v}^T S\bar{v}$

9. Matriisin neliöjuuri. Etsi kaikki matriisit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, joille

$$\text{a) } A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{b) } A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luku 2

10. Ratkaise yhtälöryhmät:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 3y = -2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 5y = -2 \end{cases}$$

11. Ratkaise yhtälöryhmät:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = -3 \\ -x + 3y + 2z = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ 3x - 2y - z = 0 \\ 5x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y + 5z = -1 \\ -x - 2z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

12.

$$\text{a) } \begin{cases} -4x + 3y - z = 3 \\ 2x - 3y + z = 1 \\ -6x + 6y - 2z = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} -4x + 3y - z = 3 \\ 2x - 3y + z = 1 \\ -6x + 6y - 2z = 2 \end{cases}$$

13.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y - 4z = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - 3y = 5 \\ -3x + 5y = 6 \end{cases}$$

14. Etsi esimerkki ylimäärätystä yhtälöstä, jolla on äärettömän monta ratkaisua. Etsi myös esimerkki alimäärätystä yhtälöstä, jolla ei ole ratkaisua.

15. Ratkaise yhtälöryhmä. Vakio k saa esiintyä vastauksessa.

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

16. Ratkaise.

$$\begin{cases} x + y + 2z + w = 13 \\ -3x + z - w = -4 \\ 4x - y - 3z + 2w = 1 \\ 3x + y + 2z + 2w = 19 \end{cases}$$

17.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y + z = -3 \\ 3x + 2y + 4z = 0 \\ x + y - z = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + y + 2z = -1 \\ x + 2y = 2 \\ 4x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

18.

$$\begin{cases} -4x - 2y + 3z + 5w = 0 \\ 6x - 2y + z - 4w = 0 \\ 2x - 7y + 7z + 3w = 0 \\ -5x + 8y + 2z + 2w = 1 \end{cases}$$

19. Ratkaise kerralla yhtälöparit

$$\begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x - 7y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} z - 3w = 0 \\ 2z - 7w = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} u - 3v = 7 \\ 2u - 7v = 4 \end{cases}.$$

Luku 3

20. Määritä matriisien käänteismatriisit:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

21. Määritä käänteismatriisit:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

22. Käännä:

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

23. Matriisit A , B ja C ovat kääntyviä. Sievennä $(ABC)^{-1}$.

24.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Laske a) $\det A$ b) $\det B$ c) $\det(AB)$

25. Laske

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 5 \\ -7 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

26. $\det A = -2$, $\det B = 6$. Laske $\det(A^{-1}B)$.

27. Selvitä, päteekö $\det A + \det B = \det(A + B)$.

28. Laske

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ -5 & 7 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 4 \\ 6 & -4 & -4 & 2 \end{vmatrix}.$$

29. A , B ja C ovat kääntyviä neliömatriiseja. Ratkaise X .

$$\text{a) } AXB - C = 2A \quad \text{b) } XB = (BC - X)A$$

30. Kuinka monta kertolaskua $n \times n$ -determinantin laskemiseksi tarvitaan, jos determinantti kehitetään suoraan määritelmästä lähtien?

Luku 4

31. Etsi sopiva matriisi A kullekin seuraavista tason kuvauksista:

1. suurennos tekijällä 2.
2. venytys x -akselin suunnassa tekijällä k .
3. peilaus y -akselin suhteen
4. peilaus origon suhteen
5. peilaus suoran $y = x$ suhteen
6. kohtisuora projektio x -akselille
7. 180° asteen kierto
8. 90° kierto vastapäivään
9. 90° kierto myötäpäivään
10. jokin leikkaus x -akselin suunnassa

32. Laadi kuvaus, joka kiertää tasoa kulman θ verran vastapäivään. Vihje: esitä uuden koordinaatiston kantavektorit vanhan koordinaatiston kantavektoreiden avulla.

33. Anna projektiokaava mielivaltaiselle origon kautta kulkevalle suoralle.

34. Tutki, millaisen kuvauksen määrää matriisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

35. Osoita, että kahden peräkkäisen affiinikuvauksen yhdiste on affiini.

36. Osoita, että kolmion voi kuvata miksi tahansa toiseksi kolmioksi affiinilla kuvauksella. Ajattele geometrisesti.

37. Todista, että tasasivuisen kolmion mediaanit jakavat toisensa $2 : 1$. Miksi tämä riittää osoittamaan saman tuloksen kaikille kolmiolle?

38. Voiko edellisen tehtävän lähestymistapaa soveltaa kolmion kulmanpuolittajien, korkeusjanojen tai sivujen keskinormaalien ominaisuuksiin?

39. Osoita, että affinikuvaus kuvaa suunnikkaat suunnikkaiksi.

40. Osoita, että kun suunnikkaan sivut jaetaan jostakin kärjestä lähtien suhteessa $1 : 7$, jakopisteet yhdistämällä syntyy suunnikas.

41. Tason kiertomatriisi (vastapäivään) on $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$. Johda laskukaavat lausekkeille $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ ja $\sin(\theta_1 + \theta_2)$ tarkastelemalla kahden peräkkäisen kierron yhdistelmää.

42. Esitä 3×3 -matriisi, joka kiertää (x, y, z) -koordinaatistoa y -akselin ympäri vastapäivään.

Luku 5

43. Kissa joko syö tai nukkuu ja valitsee kerran tunnissa, kumpaa tekee. Jos kissa nukkuu, se jatkaa nukkumista todennäköisyydellä 0,8 ja menee syömään todennäköisyydellä 0,2. Jos kissa on syömässä, se jatkaa syömistä todennäköisyydellä 0,1 ja menee nukkumaan todennäköisyydellä 0,9. Kissa käy keskiyöllä syömässä. Millä todennäköisyydellä se nukkuu kuudelta aamulla?

44. Erkki ja Pentti pelaavat pingistä vanhojen sääntöjen mukaan. Peli on tasan 21-21. Voittaja on se, joka saa kahden pisteen eron toiseen nähden. Pentti voittaa yhden pallon todennäköisyydellä 0,6, Erkki todennäköisyydellä 0,4. Millä todennäköisyydellä Pentti voittaa pelin?

45. Kirppu istuu 3×3 -ruudukon keskellä. Se lähtee hyppimään satunnaisesti. Yhdellä hypyllä kirppu päätyy viereiseen ruutuun (ei kulmittain). Millä todennäköisyydellä kirppu pysyy ruudukon sisällä kuuden hypyn ajan?

46. Millä todennäköisyydellä 10 nopanheitolla tulee tasan 2 kuutosta?

47. Kun herra Lapin auto on ehjä, se hajoaa päivän aikana todennäköisyydellä $\frac{1}{10}$. Kun auto on rikki, se viettää korjaamolla ainakin kaksi päivää ja korjautuu sen jälkeen todennäköisyydellä $\frac{1}{5}$ päivää kohti. Millä todennäköisyydellä auto on käytettävissä satunnaisena päivänä? Ratkaise tehtävä

- a) likiarvoisesti laskimella
- b) tarkasti.

48. Erkki ja Pentti pelaavat jännittävää noppapeliä. Ensimmäisenä kuutosen heittänyt voittaa. Jos heittää ykkösen, saa heittää uudestaan. Erkki aloittaa. Millä todennäköisyydellä Erkki voittaa

- a) ensimmäisen viiden nopanheiton aikana
- b) ensimmäisen viiden heittovuoron aikana
- c) jos peli pelataan katkeraan loppuun?

49. Erkki ja Pentti pelaavat pitkää tikkua kovasta rahasta. Panos on 100 € (Tämän verran voittaja siis saa häviäjältä). Peliä pelataan, kunnes toinen on rahaton. Millä todennäköisyydellä Erkki voittaa, kun hänen alkupääomansa on 300 € ja Pentin 500 €? Peli on satunnainen, joten kussakin erässä voitto ja tappio ovat yhtä todennäköiset.

50. Millä todennäköisyydellä nopanheitossa sarja 222 esiintyy ennen sarjaa 232?

51. Millä todennäköisyydellä kolikonheittosarjassa esiintyy kolme peräkkäistä kruunaa ennen sarjaa kruuna klaava kruuna?

52. Millä todennäköisyydellä kolikonheitossa sarja AAAA tulee ennen sarjaa ABBA, missä A ja B voivat tarkoittaa joko kruunaa tai klaavaa?

Luku 6

53.

x	1	2	3	4	5
y	-2,5	-1	0	3	4,5

Sovita pienimmän neliösumman suora aineistoon.

54. Suoralla tiellä tasaisella nopeudella ajaneen polkupyöräilijän liikeestä saatiin seuraavat mittaustulokset.

aika (s)	1	3	4	7	9
matka (m)	21	40	45	85	105

Määritä pyöräilijän nopeus pienimmän neliösumman suoran kulmakertoimena. Vertaa piirtämällä saatuun kulmakertoimeen.

55. Sovita aineistoon

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	17,9	12,1	4,2	0,1	5,9	28,3	72,1

a) suora

b) paraabeli

c) 3. asteen polynomi

ja anna kunkin ennuste muuttujan y arvosta, kun $x = -5$.

56. Ala-asteella Erkki ja Pentti joutuivat pulaan, kun joku heitti lumipallon avonaisesta ikkunasta luokkaan sisälle. Pojat olivat heitelleet lumipalloja, mutta he väittivät, etteivät osuneet ikkunaan. Poikien heitto tallentui koulun valvontakameraan, josta saatiin mitattua seuraavat tulokset lumipallon sijainnille:

etäisyys seinästä (m)	12,0	11,2	10,4	9,6	8,8	8,0
korkeus (m)	5,2	7,1	8,8	10,4	11,7	12,8

Ikkunan alareuna oli 14 m korkeudella maasta ja yläreuna 16 m korkeudella. Pojat piirsivät pisteiden kautta suoran ja näin osoittivat, ettei pallo mitenkään voinut osua ikkunaan. Opettaja tiesi kuitenkin fysiikan opiskelun perusteella, että pallon lentorata on likimain paraabeli.

a) Sovita pisteisiin suora ja kerro sen ennuste korkeudesta, jolla pallo osuu seinään.

b) Kuten edellä, mutta sovita paraabeli.

c) Ovatko pojat syyllisiä?

Liite C

Harjoitustehtävien vastaukset

Luku 1

1. a) 3 b) 2 c) 3×2 d) -2 e) π f) -1

2. a) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 19 & -7 \end{bmatrix}$ b) ei määritelty, sillä matriisit erikokoiset c) $\begin{bmatrix} 4 & 19 \\ 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

3. a) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 7 & 13 & -7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 & -12 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

4. a) kyllä b) kyllä c) ei d) kyllä

5. a) $\begin{bmatrix} 14 & -28 & 21 \\ -14 & 14 & -7 \end{bmatrix}$ b) ei määritelty c) $\begin{bmatrix} 4 & -11 \\ -15 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 18 & -28 & 19 \\ -6 & 0 & 3 \\ -16 & 21 & -13 \end{bmatrix}$

6. $M\bar{h} = \begin{bmatrix} 209 \text{ €} \\ 117 \text{ €} \\ 245 \text{ €} \\ 231 \text{ €} \\ 210 \text{ €} \end{bmatrix}$. Kyseinen vektori kuvaa päivittäistä myyntiä.

7. a) $\begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 25 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}$

8. a) $\begin{bmatrix} -3 \\ 11 \\ 9 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -5 & 10 & 8 \end{bmatrix}$ c) 44

9.

a) Matriisit ovat joko muotoa $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$ tai $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$, $b \neq 0$.

b) Joko $A = \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}$ tai $A = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$, $b \neq 0$.

Luku 2

10. a) $\begin{cases} x = 7 \\ y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 19 \\ y = -8 \end{cases}$

11. a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 1 \\ z = -\frac{2}{3} \end{cases}$

12. a) ei ratkaisua b) $\begin{cases} x = -2 \\ y = c \\ z = 5 + 3c \end{cases}, \quad c \in \mathbb{R}$

13. a) $\begin{cases} x = -7 - c \\ y = 5 + 2c \\ z = c \end{cases}, \quad c \in \mathbb{R}$ b) ei ratkaisua

14. Esimerkiksi $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$ ja $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

15. Jos $-2 \neq k \neq 1$, $\begin{cases} x = \frac{1}{k+2} \\ y = \frac{1}{k+2} \\ z = \frac{1}{k+2} \end{cases}.$

Jos $k = 1$, ratkaisuja on äärettömän monta muodossa

$$\begin{cases} x = 1 - c - d \\ y = c \\ z = d \end{cases}, \quad c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}$$

Jos $k = -2$, ratkaisuja ei ole.

16. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ w = 4 \end{cases}$

17. a) $\begin{cases} x = 6,8 \\ y = -4,6 \\ z = -2,8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2\frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = -3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \\ z = 2 \\ w = -6 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = 11 \\ y = -4 \end{cases}, \quad \begin{cases} z = 3 \\ w = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} u = -23 \\ v = 10 \end{cases}$

Luku 3

20. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

21. D ei ole kääntövä. $E^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

22. $F^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 3 & -4 & -7 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, G ei ole kääntövä.

23. $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

24. a) 2 b) 7 c) 14

25. a) 61 b) 1 c) 0

26. -3

27. Ei päde. Esim $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$ ja $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$, mutta

$\left| \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

28. 826

29. a) $X = A^{-1}(2A + C)B^{-1}$ b) Jos $A + B$ on kääntövä,

$X = BCA(B + A)^{-1}$. Jos $A + B$ ei ole kääntövä, ratkaisua ei ole. (Mieti miksi!)

30. $n!$ eli $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Luku 4

31.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 5. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 9. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 10. Esimerkiksi $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

32. Puuttuu.

33. Puuttuu.

34. Puuttuu.

35. Puuttuu.

36. Puuttuu.

37. Puuttuu.

38. Puuttuu.

39. Puuttuu.

40. Puuttuu.

41. Puuttuu.

42. Puuttuu.

Luku 5

43. 0,82

44. 0,69

45. $\frac{768}{4096} = \frac{3}{16} \approx 0,19$

46. $\frac{17578125}{60466176} \approx 0,29$

47. a) 0,63 b) $\frac{5}{8} = 0,625$

48. a) $\frac{2771}{7776} \approx 0,36$ b) $\frac{1281}{3125} \approx 0,41$ c) 0,56

49. 0,43

50. 0,462

51. 0,400

52. 0,417

Luku 6

53. $y = 1,8x - 4,6$

54. $v = 10,7892... \frac{m}{s} \approx 11 \frac{m}{s}$

55. a) $y(x) \approx 7,025x + 20,086$, $y(-5) \approx -15,0$

b) $y(x) \approx 4,992x^2 + 7,025x + 0,119$, $y(-5) \approx 89,9$

c) $y(x) \approx 1,008x^3 + 4,991x^2 - 0,033x + 0,119$, $y(-5) \approx -0,94$

56. a) 28 m b) 13 m c) Pojat ovat syyttömiä. Ilmanvastuksen vuoksi todellinen osumakohta seinään on vielä b-kohdan tulosta alempana.