

Mitä ovatkaan pituus ja kulma?

– Johdatus rationaaliseen trigonometriaan

Harjoitustehtävät 2/4

1. Määritellään kulman suuruus tietyssä yksikköjärjestelmässä kaavalla

$$\theta = k \frac{s}{r},$$

missä s on kulmaa θ vastaavan ympyräsektorin kaaren pituus, r ympyrän säde ja k skaalauskerroin. Määritä skaalaustekijä k siten, että täysikulma jaetaan a) 2π radiaaniin b) 360 asteeseen.

2. Näytä, että lineaarikuvauksen (lineaarisen funktion) määritelmästä seuraa, että $f(\mathbf{0}) = 0$. HUOM.: tässä ei tarkoiteta nyt muotoa $f(x) = ax + b$ olevia polynomifunktioita! (1. asteen polynomifunktiot ovat pikemminkin *affiinikuvauksia*.)
3. Näytä, että kahden lineaarikuvauksen, yksinkertaisuuden vuoksi $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, yhdistetty kuvaus on lineaarinen. (Voit tarkistaa lineaarisen funktion kaksi ehtoa erikseen.)
4. Transkendenttifunktiot voidaan määritellä matemaattisessa analyysissä myös *sarjakehitelmien* avulla. Tällöin funktion arvot saadaan laskettua (helposti työstettävästä) polynomista, jonka termejä lisäämällä lähestytään alkuperäisen funktion tarkkaa arvoa. Sinifunktion sarjakehitelmä – kun kehityskeskukseksi pidetään muuttujan arvoa $z = 0$, ns. Taylorin sarja – on seuraava ääretön summa:

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \dots$$

- a) Kirjoita sinin sarjakehitelmä auki kuudenteen termiin asti.
- b) Laske sarjakehitelmän avulla likiarvo $\sin(\frac{\pi}{4})$:lle kolmen desimaalin tarkkuudella. Montako sarjakehitelmän termiä tällaiseen tarkkuuteen vähintään tarvitaan?
- c) Sarjakehitelmän alkupäästä nähdään, että $\sin z \approx z$, kun z on itseisarvoltaan pieni. Kuinka suuri korkeintaan voi muuttuja z olla, että arvion $\sin z \approx z$ virhe on korkeintaan 10 %? Numeerinen ratkaisu kolmen desimaalin tarkkuudella; laskimen käyttö suotavaa.
- d) Johda annetusta sinin sarjakehitelmästä kosinin sarjakehitelmä.

Muuttujan z arvot oletetaan esitettävän radiaaneissa.

Palauta opelle kirjallisena $\Rightarrow$ lisäpisteitä kokeeseen!

5. Oletetaan tunnetuksi Eulerin identiteetti $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, missä i on imaginääriyksikkö, jolle pätee $i^2 = -1$. Johda tämän avulla kosinin summakaava $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ sekä Pythagoraan lauseen muoto $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Edelleen johda kaava $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ja laske tarkka arvo $\cos(15^\circ)$:lle.
6. n -ulotteisen vektorin $\mathbf{x}$ niin sanottu L^p -normi $\|\mathbf{x}\|_p$ määritellään seuraavasti:

$$\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Voidaan osoittaa, että raja-arvona $p \rightarrow \infty$ saadaan $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Tarkista laskemalla suoraan raja-arvo, että tapaukselle $\mathbf{x} = (2, 3)$ pätee $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3$.

Tässä tehtävässä oletetaan tunnetuksi l'Hôpitalin sääntö, jonka mukaan kohdassa $x = a$ derivoituvien funktioiden f ja g osamäärälle pätee

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

jos osamäärä $\frac{f(a)}{g(a)}$ ei ole hyvin määritelty. (Esim. $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \dots$)