Differentiaaliyhtälöistä

Markus Kettunen

14. helmikuuta 2011

Sisältö

1 Differentiaaliyhtälöistä

1.1 Johdanto

Differentiaaliyhtälö on yhtälö jossa esiintyy tuntemattoman funktion derivaattoja. Tarkoituksena on ratkaista kyseinen tuntematon funktio. Yhden muuttujan funktioiden tapauksessa puhutaan *tavallisista differentiaaliyhtälöistä.*

Esimerkkejä differentiaaliyhtälöistä ovat esimerkiksi

- $y'(x) = y(x)$
- $y'(x) = xy(x)^2 + y(x)$
- $y''(x) = y'(x)/x^2$, $x \neq 0$.

Tarkoituksena on löytää kaikki yhtälön ja annetut lisäehdot toteuttavat funktiot.

Usein kyllästytään merkitsemään parametria funktion perään silloin kun se käy ilmi asiayhteydestä. Edelliset differentiaaliyhtälöt tavataan kirjoittaa muodossa

- $y' = y$
- $y' = xy^2 + y$
- $y'' = y'/x^2$, $x \neq 0$,

jossa tulee muistaa y:n olevan funktio ja x:n funktion parametri.

1.2 Ratkaisun olemassaolosta ja yksikäsitteisyydestä

Ratkaisun olemassaolo on minkä tahansa sovelluksen kannalta ehdottoman tärkeää. Jos ratkaisua ei ole olemassa, lienee selvää, että soveltaminen ei onnistu. Myös olemattoman ratkaisun numeerinen arviointi lienee helposti ymmärrettävissä järjettömäksi. Jos taas ratkaisu ei ole yksikäsitteinen, tilanne on lähes yhtä huono, sillä annettu informaatio ei riitä määrittämään mitä ratkaisuista tulisi käyttää. Numeerisen laskennan osalta tilanne on aivan yhtä mieletön, sillä ei voida tietä, mitä mahdollisista ratkaisuista numeerinen ratkaisu noudattaa milloinkin.

Yleisesti, jos lisäehtoja ei ole annettu, tavallisella differentiaaliyhtälöllä on joko äärettömän monta ratkaisua tai sitten ei yhtään. Esimerkiksi yhtälöllä $y'(x)^2 = -1$ ei ole yhtään ratkaisua, kun taas mikä tahansa funktio Ce^x, jossa C on reaaliluku, toteuttaa yhtälön $y'(x) = y(x)$, sillä $y'(x) = Ce^x$ ja $y(x) = Ce^x$.

2 Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöt

Ehkä tärkein käsite yhden muuttujan differentiaaliyhtälöiden luokitteluun on *yhtälön kertaluku*. Yhtälön kertaluvuksi sanotaan ratkaistavan funktion suurimman kertaluvun derivaatan kertalukua.

Esimerkiksi yhtälön $y' + xy = 2$ kertaluku on 1, yhtälön $xy'' = -y$ kertaluku on 2 ja yhtälön $y^{(12)} + y = -x$ kertaluku on 12.

2.1 Separoituvat differentiaaliyhtälöt

Usein yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $y' = f(x)g(y)$. Esimerkkejä tällaisista *separoituvista differentiaaliyhtälöistä* ovat muun muassa

- $y' = \underbrace{x^2}_{f(x)} \underbrace{y^2}_{g(y)}$
- $y' = \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{y}_{g(y)}$
- $y'' = -y = \underbrace{1}_{f(x)} \underbrace{(-y)}_{g(y)}$
- $y' = x = \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{1}_{g(y)}.$

Separointi tarkoittaa muuttujien erottelua. Tällöin, jos $g(y) \neq 0$, voidaan yhtälö

$$y' = f(x)g(y)$$

jakaa puolittain tekijällä $g(y)$. Päästään muotoon

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x).$$

Nyt yhtälö on separoitu. Integroidaan yhtälö puolittain muuttujan x suhteen. Yhtälön vasemmalla puolella on $1/g(y(x))$ kerrottuna sisäfunktion $y(x)$ derivaatalla $y'(x)$, joten integrointi on ainakin periaatteessa helppoa, jos $1/g$ osataan integroida. Näin saadaan yhtälö funktiolle y.

Joskus yhtälö voidaan ratkaista muotoon $y = \cdots\cdots$. Tällöin puhutaan *eksplisiittisestä* yhtälöstä funktiolle y. Jos tämä ei ole mahdollista, joudutaan yhtälö jättämään *implisiittiseen* muotoon.

Ratkaisussa tulee koko ajan kiinnittää huomiota siihen, että jokainen välivaihe on yhtäpitävä edellisen välivaiheen kanssa. Lopuksi tulee vielä huomata, että ratkaisu on olemassa vain väleillä, joilla $g(y(x)) \neq 0$. Tämä tulee tarkistaa erikseen sijoittamalla ratkaisun y lauseke funktion $g(y)$ lausekkeeseen ja ratkaisemalla mahdolliset nollakohdat. Ratkaisu on olemassa vain niillä väleillä, joilla kyseisiä nollakohtia ei ole.

Esimerkki 1. Ratkaistaan tavallinen separoituva differentiaaliyhtälö $y' = x^2 - x^2 y$, kun $y > 1$.

Kirjoitetaan ensin yhtälön oikea puoli tulomuotoon, $x^2 - x^2 y = x^2(1-y)$. Yhtälö on siis

$$y' = x^2(1-y),\ y > 1.$$

Koska $y > 1$, on $1-y < 0$ ja voidaan jakaa tekijällä $(1-y)$. Yhtälö on nyt muodossa

$$\frac{y'}{1-y} = x^2.$$

Integroidaan muuttujan x suhteen ja saadaan yhtäpitävästi

$$\int \frac{y'}{1-y}\,dx = \int x^2\,dx.$$

Vasemmanpuoleinen integraali voidaan kirjoittaa muotoon

$$\int \frac{dy}{1-y} = -\int \frac{dy}{y-1} = -\ln(y-1) + C_1.$$

Oikeasta puolesta tulee

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C_2.$$

Siirretään integraalien vakiotermit oikealle puolelle vakioksi $C_3 = C_2 - C_1$ ja saadaan yhtälöketju

$$\begin{aligned}
-\ln(y-1) &= \frac{1}{3}x^3 + C_3 \\
\ln(y-1) &= -\frac{1}{3}x^3 - C_3 \\
y - 1 &= e^{-\frac{1}{3}x^3 - C_3} \\
y &= 1 + e^{-\frac{1}{3}x^3} e^{-C_3}.
\end{aligned}$$

Tässä C_3 on mielivaltainen reaaliluku, joten $-C_3$ voi myös olla mikä tahansa. Näin ollen e^{-C_3} voi olla mikä tahansa positiivinen luku. Merkitään nyt $C = e^{-C_3}$, $C > 0$, ja alkuperäinen yhtälö on yhtäpitävästi kirjoitettu muotoon

$$y = 1 + Ce^{-\frac{1}{3}x^3},\ C > 0.$$

Vakio C voidaan kiinnittää vaatimalla esimerkiksi lisäehto $y(3) = 5$, joka siis tarkoittaa

$$y(3) = 1 + Ce^{-\frac{1}{3}3^3} = 1 + Ce^{-9} = 5, \text{ eli}$$
$$C = 4e^9.$$

Todetaan vielä, että $C > 0$ kuten pitääkin. Siis ehdon $y(3) = 5$ toteuttava yhtälön $y' = x^2 - x^2y$, $y > 1$ ratkaisu on

$$y(x) = 1 + 4e^{9-\frac{1}{3}x^3}.$$

2.2 Lineaariset differentiaaliyhtälöt

Differentiaaliyhtälö on lineaarinen jos se on muotoa

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x).$$

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on lineaarinen jos se on muotoa

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x),$$

ja ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö jos se on muotoa

$$y' + p(x)y = r(x).$$

2.2.1 Homogeeniset differentiaaliyhtälöt

Lineaarista yhtälöä kutsutaan *homogeeniseksi*, jos $r(x) = 0$. Homogeenisen yhtälön ratkaisujen summat ja monikerrat ovat myös homogeenisen yhtälön ratkaisuja. Toisin sanoen, jos y_1 ja y_2 ovat homogeenisen yhtälön ratkaisuja, myös $\alpha y_1 + \beta y_2$ on saman homogeenisen yhtälön ratkaisu, jossa α ja β ovat mielivaltaisia reaalilukuja.

Näytetään tämä toisen kertaluvun lineaarisen homogeenisen differentiaaliyhtälön tapauksessa. Jos $f = \alpha y_1 + \beta y_2$, pätee

$$
\begin{aligned}
f'' + p(x)f' + q(x)f'' &= (\alpha y_1 + \beta y_2)'' + p(x)(\alpha y_1 + \beta y_2)' + q(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) \\
&= \alpha \cdot (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + \beta \cdot (y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) \\
&= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

joten $f = \alpha y_1 + \beta y_2$ on homogeeniyhtälön ratkaisu kun y_1 ja y_2 ovat homogeeniyhtälön ratkaisuja.

Homogeeninen lineaarinen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista esimerkiksi separoimalla.

Esimerkki 2. Ratkaistaan homogeeninen lineaarinen ensimmäisen kertaluvun tavallinen differentiaaliyhtälö $y' + 3y = 0$.

Kirjoitetaan yhtälö muotoon $y' = -3y$ ja havaitaan heti, että $y = 0$ on ratkaisu. Tutkitaan sitten ratkaisua välillä, jolla $y \neq 0$. Tällöin saadaan yhtäpitävästi

$$
\begin{aligned}
\frac{y'}{y} &= -3 \\
\ln|y| &= -3x + C_1 \\
|y| &= e^{-3x}e^{C}_{1}. \\
y &= \pm e^{C_1}e^{-3x}
\end{aligned}
$$

Tämä yhtälö on ymmärrettävä pisteittäisesti: jokaisella parametrin x arvolla pätee erikseen

$$y(x) = +e^{C_1}e^{-3x} \text{ tai } y(x) = -e^{C_1}e^{-3x}.$$

Koska kuitenkin differentiaaliyhtälöä kirjoitettaessa oletettiin funktion y' olemassaolo, täytyy funktion y olla derivoituva ja siten jatkuva. Koska y on jatkuva, ei y voi muuttaa merkkiään saamatta arvoa 0 välissä. Koska rajoituttiin välille, jolla $y(x) \neq 0$, yhtälössä valittu merkki $+$ tai $-$ on sama koko funktiolle y. Näin ollen voidaan kirjoittaa $C_2 = \pm e^{C_1}$:

$$y(x) = C_2 e^{-3x}, \text{ jossa } C_2 \neq 0.$$

Huomataan vielä, että jos sallitaan $C_2 = 0$, saadaan tästä yhtälöstä myös triviaaliratkaisu $y = 0$. Yleinen ratkaisu on siis $y = Ce^{-3x}$, jossa C on mielivaltainen reaaliluku.

2.2.2 Epähomogeeniset differentiaaliyhtälöt

Oletetaan, että y_1 ja y_2 ovat epähomogeenisen toisen kertaluvun lineaarisen differentiaaliyhtälön

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

ratkaisuja. Tällöin ratkaisujen erotus $y_1 - y_2$ toteuttaa homogeenisen differentiaaliyhtälön:

$$\begin{aligned}&(y_1 - y_2)'' + p(x)(y_1 - y_2)' + q(x)(y_1 - y_2)\\ =\ &y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 - (y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)\\ =\ &r(x) - r(x) = 0.\end{aligned}$$

Siis aina kun y_1 ja y_2 ovat epähomogeenisen yhtälön ratkaisuja, on $y_1 - y_2$ on vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisu. Näin ollen epähomogeenisen yhtälön ratkaisut eroavat toisistaan jollakin homogeeniyhtälön ratkaisulla. Siis mikäli tunnetaan homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu ja mikä tahansa yksittäisratkaisu epähomogeeniselle yhtälölle, saadaan epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu laskemalla nämä yhteen. Toisin sanoen epähomogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on

$$y(x) = y_1(x) + h(x), \text{ jossa}$$

y_1 on epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu ja $h(x)$ on homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu.

Epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu saadaan esimerkiksi arvaamalla, hatusta vetämällä (ns. Stetson-Harrison) tai kysymällä oraakkelilta.

Esimerkki 3. Ratkaistaan epähomogeeninen yhtälö $y' = 2y + e^{2x}$.

Kirjoitetaan yhtälö ensin normaalimuotoon $y' - 2y = e^{2x}$ ja ratkaistaan aluksi homogeeniyhtälö $y' - 2y = 0$. Tämän ratkaisu saadaan esimerkiksi separoimalla ja se on Ce^{2x}.

Tarvitaan vielä jokin yhtälön $y' - 2y = e^{2x}$ yksittäisratkaisu. Eksponenttifunktio olisi varmaankin hyvä arvaus, sillä yhtälö sisältää eksponenttifunktiota ja homogeeniyhtälön ratkaisussa on eksponenttifunktio. Kokeillaan yritettä $y = Ae^{Bx}$.

Tällä yritteellä yhtälön vasemmasta puolesta tulee

$$y' - 2y = ABe^{Bx} - 2Ae^{Bx} = (AB - 2A)\, e^{Bx}$$

ja oikeasta puolesta e^{2x}. Jotta tämä yhtälö toteutuisi, tulisi olla $B = 2$ ja $AB - 2A = 1$, eli $2A - 2A = 0 = 1$. Tämä on ristiriita, joten arvaus meni pieleen.

Luultavasti ratkaisussa pitäisi silti olla mukana e^{2x}, mutta ilmeisesti jotain muutakin. Yksinkertainen yrite voisi olla esimerkiksi $y = A\,xe^{2x}$.

Sijoittamalla saadaan yhtälön vasemmalle puolelle

$$y' - 2y = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} - 2Axe^{2x} = Ae^{2x}.$$

Tämän tulisi olla yhtä kuin e^{2x}, ja näin selvästikin käy kun valitaan $A = 1$. Siis yksittäisratkaisuksi kelpaa $y = xe^{2x}$.

Lineaarisen yhtälön yleinen ratkaisu saadaan summaamalla epähomogeeniyhtälön yksittäisratkaisu ja homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu. Siten kysytyn epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on $y = xe^{2x} + Ce^{2x}$.

2.3 Vakion variointi

Vakion variointi on helppo ja toimiva menetelmä yksittäisratkaisun löytämiseen lineaariselle yhtälölle. Ratkaisun ideana on ratkaista ensin homogeeninen yhtälö ja sen jälkeen löytää yksi yksittäisratkaisu epähomogeeniselle yhtälölle varioimalla vakiota, eli korvaamalla homogeenisen yhtälön ratkaisun integrointivakio C funktiolla $C(x)$, joka pyritään määrittämään.

Valaistaan menetelmää esimerkin kautta.

Esimerkki 4. Ratkaistaan yhtälö $y' = 2y + e^{2x}$ vakion varioinnilla. Oletetaan tunnetuksi homogeenisen yhtälön ratkaisu $y = Ce^{2x}$. Ratkaistaan epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu asettamalla $C = C(x)$ ja käytetään yritettä $y = C(x)e^{2x}$.

Yhtälön vasemmaksi puoleksi saadaan $C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x}$.

Oikeaksi puoleksi saadaan $2y + e^{2x} = 2C(x)e^{2x} + e^{2x}$. Yhtälö on siis

$$C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} = 2C(x)e^{2x} + e^{2x}, \text{ joka}$$

sievenee muotoon

$$C'(x)e^{2x} = e^{2x}.$$

Ratkaistaan tästä $C(x) = x + C_2$. Koska epähomogeeniyhtälölle tarvitsee tuntea vain yksi ratkaisu, valitaan yksinkertaisuuden vuoksi $C_2 = 0$. Siis $y = C(x)e^{2x} = xe^{2x}$ on haluttu yksittäisratkaisu.

Loput ratkaisut saadaan lisäämällä tähän homogeenisen yhtälön ratkaisut:

$$y(x) = xe^{2x} + Ce^{2x}.$$

2.4 Integroivan tekijän menetelmä

Integroivan tekijän menetelmä on usein mukavampi, mutta saattaa johtaa vaikeisiin integraaleihin ja soveltuu kunnolla vain ensimmäisen kertaluvun lineaarisiin differentiaaliyhtälöihin. Menetelmän etuna on, että homogeenisen yhtälön ratkaisua ei tarvitse tietää etukäteen.

Tutkitaan yhtälöä $a(x)y' + b(x)y = c(x)$. Oletetaan, että $a(x) \neq 0$, jolloin voidaan jakaa tekijällä $a(x)$ ja saattaa yhtälö normaalimuotoon

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{c(x)}{a(x)}.$$

Merkitään nyt $\frac{b(x)}{a(x)} = p(x)$ ja $\frac{c(x)}{a(x)} = r(x)$ ja kirjoitetaan yhtälö muotoon

$$y' + p(x)y = r(x).$$

Menetelmän idea on kertoa yhtälö sopivalla funktiolla $\mu(x)$ niin, että yhtälön vasen puoli saadaan kirjoitettua tulon μy derivaattana $\mu' y + \mu y'$.

Yhtälö $y' + p(x)y = r(x)$ päätyy siis kertomisen jälkeen muotoon

$$\mu y' + p(x)\mu y = \mu r(x),$$

jossa vasemman puolen $\mu y' + p(x)\mu y$ täytyy olla yhtä kuin $\mu y' + \mu' y$:

$$\begin{aligned} \mu y' + p(x)\mu y &= \mu y' + \mu' y \\ p(x)\mu y &= \mu' y. \end{aligned}$$

Tämä toteutuu kun

$$\mu' = p(x)\mu,$$

ja mikä tahansa tämän yhtälön toteuttava μ kelpaa; integrointivakiota funktioon μ ei siis tarvita. Jokin yksittäinen sopiva μ on helppo löytää esimerkiksi separoimalla.

Funktio μ valittiin niin, että vasen puoli $\mu y' + p(x)\mu y$ on kirjoitettavissa tulon μy derivaattana $(\mu y)'$. Näin ollen yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$(\mu y)' = \mu r(x),$$

josta integroimalla saadaan

$$\mu y = \int \mu r(x)dx + C \text{ ja}$$

$$y = \frac{1}{\mu}\int \mu r(x)dx + \frac{C}{\mu}.$$

Esimerkki 5. Ratkaistaan yhtälö $y' = 2xy + e^{2x}$ integroivan tekijän menetelmällä. Kirjoitetaan aluksi yhtälö muotoon

$$y' - 2xy = e^{x^2}$$

ja kerrotaan puolittain funktiolla $\mu(x)$. Nyt yhtälö on

$$\mu y' - 2\mu xy = \mu e^{x^2},$$

jossa μ valitaan niin, että vasen puoli $\mu y' - 2\mu xy$ on tulon μy derivaatta $\mu y' + \mu' y$. Tämä toteutuu kun

$$\mu' = -2x\mu,$$

jolle löydetään yksittäisratkaisu separoimalla:

$$\begin{aligned}
\mu' &= -2x\mu \\
\frac{\mu'}{\mu} &= -2x,\ \mu \neq 0 \\
\ln|\mu| &= -x^2 + C_1;\ \text{valitaan } C_1 = 0 \\
|\mu| &= e^{-x^2} \\
\mu &= \pm e^{-x^2};\ \mu \text{ on jatkuva eikä vaihda merkkiä; valitaan } + \\
\mu &= e^{-x^2} \text{ käy.}
\end{aligned}$$

Funktio $\mu = e^{-x^2}$ toteuttaa yhtälön $\mu' = -2x\mu$ ja mahdollistaa yhtälön vasemman puolen $\mu y' - 2\mu xy$ kirjoittamisen muotoon $(\mu y)'$. Jatketaan tästä:

$$\begin{aligned}
(e^{-x^2}y)' &= e^{-x^2}e^{x^2} \\
(e^{-x^2}y)' &= 1 \\
e^{-x^2}y &= x + C \\
y &= xe^{x^2} + Ce^{x^2}.
\end{aligned}$$

3 Toisen kertaluvun vakiokertoimiset yhtälöt

Yleinen toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x).$$

Tällaisen yhtälön ratkaisu on yleensä hankalaa. Usein funktiot p, q ja r ovat kuitenkin vakioita. Tutkitaan nyt tällaista tapausta, jossa lisäksi $r = 0$.

3.1 Homogeeninen tapaus

Tutkittavana on nyt differentiaaliyhtälö $y'' + py' + qy = 0$, jossa p ja q ovat reaalivakioita.

Lineaarisesta toisen kertaluvun homogeeniyhtälöstä tiedetään, että sillä on täsmälleen kaksi toisistaan lineaarisesti riippumatonta epätriviaalia ratkaisua, eli nollasta poikkeavaa ratkaisua y_1 ja y_2, joita ei saada toisistaan vakiolla kertomalla.

Kaikki ratkaisut saadaan näistä ratkaisujen y_1 ja y_2 lineaarikombinaationa, eli muodossa $y = \alpha y_1 + \beta y_2$, jossa α ja β ovat mielivaltaisia reaalilukuja.

Tämän yhtälön ensimmäisen kertaluvun vastineen $y' + \lambda y = 0$ ratkaisu on $y = e^{-\lambda x}$. Kokeillaan siten toisen kertaluvun lineaariselle homogeeniselle vakiokertoimiselle differentiaaliyhtälölle ratkaisua yritteellä $y = e^{\lambda x}$. Saadaan

$$y'' + py' + qy = 0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Tämä on yhtälön $y'' + py' + qy = 0$ karakteristinen yhtälö. Funktio $y = e^{\lambda x}$ siis toteuttaa alkuperäisen yhtälön $y'' + py' + qy = 0$ jos ja vain jos λ on karakteristisen yhtälön juuri.

Olkoot λ_1 ja λ_2 nyt karakteristisen yhtälön ratkaisut.

Jos saadaan kaksi erisuurta reaaliratkaisua, y_1 ja y_2, $y_1 \neq y_2$, tiedetään nyt ratkaisuiksi $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Näin ollen kaikki ratkaisut ovat $Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$, jossa A ja B ovat mielivaltaisia reaalilukuja.

Jos reaaliratkaisuja ei saada lainkaan, saadaan kaksi kompleksiratkaisua, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ja $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Nyt, kuten edellä, $e^{\lambda_1 x} = e^{\alpha x + i\beta x}$ ja $e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x - i\beta x}$ ovat ratkaisuja. Siis myös

$$\frac{e^{\alpha x}e^{i\beta x} + e^{\alpha x}e^{-i\beta x}}{2} = e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad \text{ja}$$

$$\frac{e^{\alpha x}e^{i\beta x} - e^{\alpha x}e^{-i\beta x}}{2i} = e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} = e^{\alpha x}\sin(\beta x) \quad \text{ovat}$$

ratkaisuja. Näitä ratkaisuja ei saada toisistaan vakiolla kertomalla, joten kaikki ratkaisut ovat $Ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + Be^{\alpha x}\sin(\beta x)$, jossa A ja B ovat mielivaltaisia vakioita.

Jos saadaan täsmälleen yksi reaaliratkaisu λ, on $y = e^{\lambda x}$ edelleen ratkaisu. Näin saadaan kuitenkin vain yksi ratkaisu, eikä siten suoraan voida päätellä kaikkia ratkaisuja. Yritetään jossain mielessä seuraavaksi helpointa yritettä, $y = xe^{\lambda x}$, jolle

$$y = xe^{\lambda x},$$

$$y' = e^{\lambda x} + \lambda xe^{\lambda x},$$
$$y'' = 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 xe^{\lambda x}.$$

Nyt

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= xe^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) + e^{\lambda x}(2\lambda + p) \\ &= xe^{\lambda x}(0) + e^{\lambda x}(0) = 0, \end{aligned}$$

sillä i) λ on yhtälön $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ juuri, ja ii) karakteristisella yhtälöllä on vain yksi ratkaisu, joten sen diskriminantti on nolla, joten toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta $\lambda = \frac{-p\pm\sqrt{D}}{2} = -\frac{p}{2}$. Koska $\lambda = -\frac{p}{2}$, saadaan edellisessä yhtälössä $2\lambda + p = 0$, joten $xe^{\lambda x}$ toteuttaa differentiaaliyhtälön.

Kootaan vielä lyhyesti:

- Jos karakteristisella yhtälöllä on reaalijuuret λ_1, λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ratkaisut ovat

$$Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}.$$

- Jos karakteristisella yhtälöllä on kompleksijuuri $\lambda = \alpha + i\beta$, ratkaisut ovat

$$Ae^{\alpha x}\cos\beta x + Be^{\alpha x}\sin\beta x.$$

- Jos karakteristisella yhtälöllä on vain yksi reaalijuuri λ, ratkaisut ovat

$$Ae^{\lambda x} + Bxe^{\lambda x}.$$

3.2 Vakiotapaus

Jos yhtälö on muotoa $y'' + py' + qy = r$, jossa r on vakio, etsitään yksittäisratkaisu yritteellä $y = vakio$. Tällöin y' ja y'' häviävät ja jää jäljelle $qy = r$, josta $y = r/q$. Kaikki ratkaisut saadaan lisäämällä tähän vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisut.

3.3 Yleinen tapaus

Tutkitaan yhtälöä $y'' + py' + qy = r(x)$, jossa p ja q ovat reaalivakioita. Sopivalla yritteellä voidaan usein arvata yksittäisratkaisu, jolloin kaikki ratkaisut saadaan lisäämällä homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu. Joskus tämä voi olla vaikeaa, mutta onneksi on vaihtoehto.

Tunnetusti voidaan derivaattaa y' merkitä myös Dy. Vastaavasti saadaan toiselle derivaatalle $y'' = (y')' = D(Dy) = D^2y$. Derivaatan voi myös kertoa vakiolla, $(aD)y = ay'$ ja näitä voidaan laskea yhteen: $(D^2 + pD + q)y = D^2y + pDy + qy = y'' + py' + qy$.

Karakteristinen polynomi $\lambda^2+p\lambda+q$ voidaan kirjoittaa tulomuotoon $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$, jossa λ_1 ja λ_2 ovat karakteristisen polynomin juuret. Täsmälleen samalla tavalla, koska p ja q eivät ole funktioita vaan vakioita, voidaan kirjoittaa $D^2 + pD + q = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)$. Todetaan vielä, että tässä ei olla huijattu:

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = (D - \lambda_1)(y' - \lambda_2 y) = y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y = y'' + py' + qy,$$

kuten pitääkin. Tämä on siis vain toinen tapa kirjoittaa sama asia.

Ratkaistaan nyt yhtälö $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = r(x)$ kahdessa osassa. Aloitetaan merkitsemällä sisempää osaa $(D - \lambda_2)y$ funktiolla g:

$$g = (D - \lambda_2)y = y' - \lambda_2 y.$$

Seuraavana on ratkaistavana yhtälö

$$\begin{aligned} (D - \lambda_1)g &= r(x), \text{ eli} \\ g' - \lambda_1 g &= r(x). \end{aligned}$$

Tämä yhtälö ratkeaa esimerkiksi integroivan tekijän menetelmällä, jolloin vastaus on

$$g(x) = e^{\lambda_1 x} \int e^{-\lambda_1 x} r(x)dx.$$

Edelleen tiedetään, että $y' - \lambda_2 = g$. Samalla tavalla saadaan tämän yhtälön ratkaisuksi

$$y = e^{\lambda_2 x} \int e^{-\lambda_2 x} g(x)dx,$$

jossa g on ratkaistu edellä.

Näin on ratkaistu yleinen vakiokertoiminen toisen kertaluvun lineaarinen epähomogeeninen tavallinen differentiaaliyhtälö.

Jos menetelmässä edellä sattuisi käymään niin, että $\lambda_1 = \lambda_2$, menetelmä toimii edelleen. Myös kompleksisilla juurilla menetelmä toimii edelleen, mutta laskut on tehtävä kompleksiluvuilla.

Esimerkki 6. Ratkaistaan esimerkin vuoksi yhtälö $y''+y'-2y = e^x$. Ollaan viisaampia kuin edellä ja etsitään pelkästään yksittäisratkaisu hankalammalla menetelmällä. Sen jälkeen täydennetään ratkaisu täydelliseksi lisäämällä lineaarisen yhtälön ratkaisuun homogeeniyhtälön ratkaisu.

Karakteristisen yhtälön $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ juuret ovat $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = -2$. Voidaan siis kirjoittaa alkuperäinen yhtälö muotoon $(D-1)(D+2)y = e^x$. Merkitään $(D+2)y = y' + 2y = g$ ja ratkaistaan $(D-1)g = g' - g = e^x$ arvaamalla integroiva tekijä e^{-x}:

$$\begin{aligned} g' - g &= e^x \\ e^{-x}g' + (-1)e^{-x}g &= 1 \\ (e^{-x}g)' &= 1 \\ e^{-x}g &= x + C_1 \\ g &= xe^x + C_1e^x. \end{aligned}$$

Koska etsitään vain yksittäisratkaisua, valitaan $C_1 = 0$, jolloin $g = xe^x$.

Ratkaistaan sitten jälkimmäinen osa, eli yhtälö $(D + 2)y = g$. Jälleen kokemuksen syvällä rintaäänellä nähdään heti integroiva tekijä e^{2x}:

$$\begin{aligned} y' + 2y &= xe^x \\ e^{2x}y' + 2e^{2x}y &= xe^{3x} \\ (e^{2x}y)' &= xe^{3x} \\ e^{2x}y &= \int xe^{3x}\, dx \\ e^{2x}y &= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C_2 \\ y &= \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{9}e^x + C_2e^{-2x}. \end{aligned}$$

Valitaan myös edellisessä $C_2 = 0$, jolloin saadaan yksittäisratkaisu

$$y_1 = \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{9}e^x.$$

Lisäämällä tähän homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu $Ae^x + Be^{-2x}$, saadaan epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu:

$$y = \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{9}e^x + Ae^x + Be^{-2x}.$$

Huomataan vielä, että termi $-\frac{1}{9}e^x$ voidaan sisällyttää termiin Ae^x, jolloin yleinen ratkaisu sievenee muotoon

$$y = \frac{1}{3}xe^x + Ae^x + Be^{-2x},$$

jossa A ja B ovat mielivaltaisia reaalilukuja.