

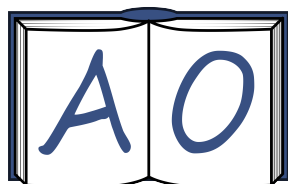
Vapaa matikka

Funktiot ja yhtälöt (MAA1)

“La distance n’y fait rien; il n’y a que le premier pas qui coûte.” – Marie Anne de Vichy-Chamrond, marquise du Deffand

kirjeessä Jean le Rond d’Alembert’lle 7. heinäkuuta 1763

(”Etäisyydellä ei ole mitään merkitystä; vaikeaa on vain ottaa ensimmäinen askel.”)



Avoimet oppimateriaalit ry



Teknologiateollisuuden
100-VUOTISSÄÄTIÖ



Sisältö on lisensoitu avoimella CC BY 4.0 -lisenssillä.

Versio 0.86 (21.8.2014)

LISENSSI

Tämän teoksen käyttöoikeutta koskee Creative Commons Nimeä 4.0 Kansainvälinen (CC BY 4.0) -lisenssi. This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) License.



Lisenssin suomenkielinen tiivistelmä

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.fi>



Tarkat lisenssiehdot (englanniksi)

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>

Voit vapaasti:

Jakaa. Kopioda ja jatkolevittää materiaalia, missä tahansa välineessä ja muodossa, mihin tahansa tarkoitukseen, myös kaupallisesti.

Muuntaa. Remiksata, muuntaa ja jalostaa materiaalia, mihin tahansa tarkoitukseen, myös kaupallisesti.

Lisenssinantaja ei voi vetää näitä vapauksia pois niin kauan kun seuraat lisenssin ehtoja.

Seuraavilla ehdoilla:

Nimeä. Sinun on mainittava tekijät, näytettävä linkki lisenssiin sekä kerrottava, jos olet muuntanut materiaalia. Voit tehdä tämän millä tahansa kohtuullisella tavalla, mutta et niin, että lisenssin antaja näyttäisi tukevan sinua tai materiaalin käyttöäsi.

No additional restrictions. Et voi lisätä lakiehtoja tai teknisiä estoja, jotka estäisivät muita tekemästä mitään, minkä lisenssi sallii.

Huomautukset:

1. Sinun ei tarvitse seurata lisenssiehtoja niiden materiaalin osien kohdalla, jotka ovat public domainissa tai joiden käyttö on sallittua tilannekohtaisen tekijänoikeuspoikkeuksen tai -rajoituksen vuoksi.
2. Mitään takuita ei ole annettu. Lisenssi ei välttämättä anna sinulle kaikkia käyttötarkoituksesi edellyttämiä oikeuksia. Esimerkiksi julkisuus-, yksityisyys- tai moraalisäädökset voivat rajoittaa materiaalin käyttöäsi.

Kirjoittajat

Anttonen, Siiri
Cederberg, Janne
Enwald, Joel
Forsman, David
Hagström, Vesa
Hannula, Jani
Hanski, Samuli
Heinävaara, Otte
Hellsten, Lauri
Hirviniemi, Olli
Iiomäki, Niko
Jalkanen, Matias
Kahilakoski, Olli-Pekka
Keinänen, Tero
Kilpi, Ville-Pekka
Kärkkäinen, Jouni
Laine, Riku
Linja-aho, Vesa
Mauno, Ossi
Mäkinen, Joonas ”JoonasD6”
Nuorteva, Juhani

Oras, Ilari
Pajunen, Matti
Pakkanen, Lumi
Peura, Pekka
Piironen, Annika
Pirttimaa, Oskari
Pohjonen, Kaisa
Rasila, Antti
Ruoho, Henri
Rämö, Johanna
Sipola, Aleksi
Sointu, Juha
Sottinen, Tommi
Talponen, Jarno
Talvitie, Topi
Tamminen, Lilja
Thitz, Paula
Tiensuu, Sampo
Tilvis, Ville
Viertiö, Jaakko
Välttilä, Emilia

Kuvitus ja ulkoasu

Hellström, Kimmo
Keinänen, Tero

Paananen, Pirita
Tamminen, Lilja

Kiitokset

Metropolia Ammattikorkeakoulu
Tekniikan akateemisten liitto TEK
Onnibus
Kebab Pizza Service
Hakkarainen, Heikki

Heinonen, Eveliina
Häsä, Jokke
Kortesuo, Katleena
Köngäs, Hannu
Lahtinen, Viljami

Larsen, Senja

Mäkinen, Joni

Partanen, Jussi

Piironen, Arto

Ruonala, Antti

Saarelainen, Anni

Salmela, Mira

Salola, Tiina

Sotala, Kaj

Tolvanen, Juhapekka ”naula”

Valtakari, Daniel

UUSIMMAT VERSIOT

Git-repot

<https://github.com/avoimet-oppimateriaalit-ry>

Pdf-vedokset

<http://avoimetoppimateriaalit.fi/vapaa-matikka>

PROJEKTI

Tavoite

Kokonainen lukion pitkän matematiikan kirjasarja vapaalla lisenssillä

Koordinaattori

Vesa Linja-aho (Metropolia)

Rahoitus

Teknologiaateollisuuden 100-vuotissäätiö: 30 000 € (2013–2014)

AVOIMET OPPIMATERIAALIT RY

Kotisivu

<http://avoimetoppimateriaalit.fi>

Wikit

<https://github.com/avoimet-oppimateriaalit-ry/general-wiki/wiki> (yleinen)

<https://github.com/avoimet-oppimateriaalit-ry/contrib-wiki/wiki> (sisällöntuotanto)

Sähköpostit

yhdistys@avoimetoppimateriaalit.fi

vapaamatikka@avoimetoppimateriaalit.fi

Facebookissa

<https://facebook.com/avoimetoppimateriaalit>

<https://facebook.com/oppikirjamaraton>

IRCnetissä

#avoimetoppimateriaalit

MIKROLAHJOITUSKANAVAT



Flattr

<https://flattr.com/profile/oppikirjamaraton>



Bitcoin

bitcoin:148pMeTViRMFBqMVZRnMZ6Hwccq9WTubq1?label=Oppikirjamaraton

Sisältö

Esipuhe	9
Lähtötasotesti	12
1 Luvut ja laskutoimitukset	13
1.1 Luku ja relaatio	13
1.2 Lukualueet	19
1.3 Jaollisuus ja tekijöihinjako	31
1.4 Lausekkeiden sieventäminen	34
1.5 Murtoluvuilla laskeminen	43
1.6 Potenssi	56
1.7 Luvun desimaaliesitys	69
1.8 Yksiköt ja suuruusluokat	74
1.9 Pyöristäminen ja vastaustarkkuus	90
1.10 Juuret	94
1.11 Murtopotenssi	102
1.12 Reaaliluvut lukusuoralla	106
2 Yhtälöt	109
2.1 Yhtälö	109
2.2 Ensimmäisen asteen yhtälö	117
2.3 Prosenttilaskenta	128
2.4 Potenssiyhtälöt	141
2.5 Suoraan ja kääntäen verrannollisuus	154
3 Funktiot	161
3.1 Funktio ja sen esitystavat	161
3.2 Potenssifunktio	174
3.3 Eksponenttifunktio	181
Kertaustehtäviä	190
Testaa tietosi	190
Kertaustehtäviä	199

Harjoituskokeita	206
Ylioppilaskoetehtäviä	219
Pääsykoetehtäviä	225
Lisämateriaalia	230
Lukujärjestelmät	230
Vastaukset	235
Hakemisto	274

Matematiikka on kaikkien luonnontieteiden perusta. Se tarjoaa työkaluja asioiden täsmälliseen jäsentämiseen, päättelyyn ja mallintamiseen, joita ilman yhteiskunnan teknologinen ja tieteellinen kehittyminen ei olisi mahdollista. Alasta riippuen käsittelemme matematiikassa erilaisia **objekteja**: Geometriassa tarkastelemme kaksiulotteisia **tasokuvioita** ja kolmiulotteisia **avaruuskappaleita**. Algebra tutkii **lukualueita** ja niissä määriteltäviä **laskutoimituksia**. Todennäköisyyslaskenta tarkastelee satunnaisten **tapahtumien** esiintymistä ja suhdetta toisiinsa. Matemaattinen analyysi tutkii **funktioita** ja niiden ominaisuuksia, esimerkiksi **jatkuvuutta**, **derivoituvuutta** ja **integroituvuutta**. Matemaattista analyysiä käsittelevät pitkässä matematiikassa kurssit 7, 8, 10 ja 13 sekä osin kurssit 9 ja 12. Voidaankin sanoa, että analyysi on keskeisin aihealue lukion pitkässä matematiikassa.¹ Matematiikka opettaa loogista päättelytaitoa ja luovaa ongelmanratkaisukykyä, mistä on hyötyä niin opinnoissa kuin elämässä yleensäkin. Sitä hyödynnetään jollakin tavalla jokaisella tieteenalalla ja myös taiteissa.

Pitkän matematiikan ensimmäinen kurssi MAA1 Funktiot ja yhtälöt käsittelee lähinnä lukuja ja niiden operaatioita eli laskutoimituksia. Kirjassa esittelemme luvun käsitteen ja yleisimmin käytetyt lukualueet laskutoimituksineen, ja jatkamme niistä **yhtälöihin** ja funktioihin. Kurssilla luodaan tietopohja nimensä mukaisesti aiheisiin ja opitaan välttämättömiä työkaluja, joita tarvitaan kaikilla myöhemmillä kursseilla. Ensimmäisen kurssin tiedot riittävät myös jo monipuolisesti monien arkielämän tilanteiden – esimerkiksi korkolaskujen – tarkasteluun, ja suureiden sekä yksiköiden syvälinen käsittely antaa hyvän laskennallisen pohjan fysiikan ja kemian kursseille.

1. Tämä Suomessa käytetty lähestymistapa on käytössä monissa länsimaissa. Sen sijaan esimerkiksi Balkanilla geometrialle ja matemaattiselle todistamiselle annetaan edelleen paljon suurempi painoarvo.

MATEMATIKAN OPETUSSUUNNITELMA

Lukion pitkän matematiikan kurssien tavoitteena on, että opiskelija ymmärtää matemaattisen ajattelun perusteet ja oppii ilmaisemaan itseään matematiikan kielellä sekä mallintamaan itse käytännön asioita matemaattisesti. Matematiikan pitkä oppimäärä antaa hyvät valmiudet luonnontieteiden opiskeluun.

Uusimpien (vuoden 2003) lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaan pitkän matematiikan ensimmäisen kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- vahvistaa yhtälön ratkaisemisen ja prosenttilaskennan taitojaan
- syventää verrannollisuuden, neliöjuuren ja potenssin käsitteiden ymmärtämistään
- tottuu käyttämään neliöjuuren ja potenssin laskusääntöjä
- syventää funktiokäsitteen ymmärtämistään tutkimalla potenssi- ja eksponenttifunktioita
- oppii ratkaisemaan potenssiyhtälöitä.

Opetussuunnitelman perusteet määrittelevät kurssin keskeisiksi sisällöiksi

- potenssifunktion
- potenssiyhtälön ratkaisemisen
- juuret ja murtopotenssin
- eksponenttifunktion.

Avoimet oppimateriaalit ry

Yhdistys tuottaa ja julkaisee oppimateriaaleja ja kirjoja, jotka ovat kaikille ilmaisia ja vapaita käyttää, levittää ja muokata. Vapaa matikka -sarja on suunnattu lukion pitkän matematiikan kursseille ja täyttää valtakunnallisen opetussuunnitelman vaatimukset.

KIRJAN KÄYTTÄMISESTÄ

Kirjan kirjoituksessa on nähty erityistä vaivaa siinä, että *mitään ei oleteta osattavan etukäteen*. Esitietovaatimuksia ei ole melkeinpä lainkaan:

- intuitio yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskusta sekä kyky käyttää laskinta näiden laskemiseen
- tasokuvioita: kolmio, suorakulmio
- geometrian ominaisuuksia: pituus, pinta-ala, tilavuus
- lukusanoja: kymmenen, sata, tuhat, miljoona – käytetään kirjan alussa, ja myöhemmin selitetään perusteellisemmin
- desimaali – sanaa käytetään kirjan alussa, mutta myöhemmin määritellään perusteellisemmin

Jos kirja ei anna tarpeeksi esimerkkejä jostakin asiasta, **ota yhteyttä**, ja asia korjataan välittömästi. **Oletusarvoisesti ymmärtämättömyyden syy ei ole sinun, vaan oppimateriaalin**. Ota toki myös yhteyttä, jos sinulla on mielenkiintoisia tehtäväideoita!

Kirjan tehtävät on suurimmassa osaa luvuista jaettu kolmeen kategoriaan: Peruseet, kokonaisuuden hallitseminen ja lisätehtävät. Perustehtävät tarkistavat luvun määritelmien ja keskeisten tulosten ymmärtämisen sekä perustavanlaatuiset taidot – nämä täytyy osata kurssin läpäisemiseen. Hallitse kokonaisuus -osiossa tehtävät ovat soveltavampia, ja ne yhdistelevät monipuolisesti luvun eri menetelmiä ja myös aiemmissa luvuissa opittuja asioita. Jos kaipaat lisäharjoitusta, sekä perustehtäviä että sekalaisia sovelluksia löytyy lisää kolmannesta osiosta.

Lisää tehtäviä -osion tähdellä ★ merkityt tehtävät ovat selvästi opetussuunnitelman ulkopuolisia tehtäviä, erittäin soveltavia, tekijöiden mielestä erityisen kiinnostavia, oppiainerajat ylittäviä tehtäviä, pitkiä tai muuten koettu suhteellisen haastaviksi. Näiden tehtävien osaaminen ei missään nimessä ole vaatimus kympin kurssiarvosanaan.

Kirjan lopusta löytyy ylimääräinen teorialiite lukujärjestelmistä, kertaustehtäviä, harjoituskokeita, vanhoja yo- ja eri alojen valintakokeita, harjoituskokeiden vastaukset sekä asiasanahakemisto.

Lähtötasotesti

Oheinen lähtötasotesti auttaa selvittämään, mihin asioihin kurssilla kannattaa erityisesti perehtyä. Testin tehtävien tekemiseen pitäisi kulua aikaa yhteensä alle varttitunti. Kirjoita ratkaisut välivaiheineen ja palauta testi opettajalle ensimmäisellä tunnila arviointia varten. Itsearviointia varten näiden tehtävien ratkaisut löytyvät kirjan lopusta. Ei hätää, jos et osaa joitain näistä tehtävistä – jokaiseen tehtävätyyppiin paneudutaan kyllä kurssin aikana, eikä varsinaisia ennakko vaatimuksia ole.

1. Sievennä.

a) $-2^4 - (-2)^3$

b) $4 \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$

c) $\frac{2}{5} : \frac{3}{2}$

d) $-2(4x^2 - x) - x$

e) $\frac{ab^2}{a^3b}$

2. Mitä on 20 kuutiodesimetriä

a) litroina

b) kuutiometreinä?

3. Ratkaise yhtälöt.

a) $2x + 5 = -\frac{1}{2}$

b) $x^2 = 9$

c) $3x^3 = -1$

4. Funktioiden f ja g arvot on määritetty seuraavasti: $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = 2x - 8$, missä x on reaaliluku.

a) Laske $f(-3)$.

b) Määritä funktion g nollakohta.

5. Matka s ja aika t (eli kuljetun matkan kesto) ovat suoraan verrannollisia toisiinsa. Aika t ja nopeus v ovat kääntäen verrannollisia toisiinsa.

a) Jos matka kaksinkertaistuu, niin mitä käy ajalle?

b) Jos nopeus kaksinkertaistuu, niin mitä käy ajalle?

6. Kaupassa on 15 prosentin alennusmyynti.

a) Kuinka paljon 25,95 euron paita maksaa alennuksessa? Ilmoita vastaus pyöristettynä viiden sentin tarkkuuteen.

b) Tuotteen alennettu hinta on 21,25 euroa. Mikä oli tuotteen alkuperäinen hinta?

LUKU 1

Luvut ja laskutoimitukset

1.1 Luku ja relaatio

LUVUN KÄSITE

Luku on käsite, jolla voidaan ilmaista esimerkiksi suuruutta, lukumäärää tai järjestystä. Erityisesti on huomattava, että luku ja **numero** eivät ole synonyymejä; numero on yksittäinen lukujärjestelmän merkki. Luvulla siis on aina suuruus mutta numerolla ei.

ESIMERKKI 1.1

- a) Luku 715 531 koostuu numeroista 7, 1, 5, 5, 3 ja 1.
- b) Luku 9 koostuu ainoastaan vastaavasta numeromerkistä 9.

Joskus numerosarjoja ei tulkita minkään asian suuruudeksi tai lukumääräksi, vaan ne ovat vain joitakin asioita koodaavia merkkijonoja. Esimerkiksi postinnumero 00900 merkitsee postinkantajalle tiettyä aluetta, jolle postia jaetaan. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että esimerkiksi postinnumero 46900 olisi jollakin tapaa suurempi kuin postinnumero 00900.

Englannin kielen sana *number* voi viitata sekä numeroon että lukuun. Sana *digit* tarkoittaa pelkästään yhtä numeromerkkiä. Ruotsiksi luku on *tal*, lukumäärä *antal* ja numeroa tai lukumäärää tarkoittamatonta numeroyhdistelmää kuvaa suomen kielen tapaan sana *nummer*. Huomattavaa on myös, että suomen kielen verbi laskea voi tarkoittaa sekä lukumäärän laskemista että abstraktimpien laskutoimitusten suorittamista – sen sijaan englannissa näille on omat verbinsä: lukumäärälle *count* ja vastaavasti *calculate* laskutoimituksille.

Tuhaterottimena käytetään suomenkielisessä tekstissä välilyöntiä, ei pilkkua tai pistettä. (Kieliopillisena poikkeuksena vuosiluvut kuten 2014 ja erilaiset koodit kirjoitetaan ilman tuhaerotinta.) Tuhaterotin erottaa kaikki kolmen numeron ryhmät luvussa mahdollista desimaaliosaa lukuun ottamatta. Jos lukuja kirjoitetaan sanoilla, tulee sanaväli samaan paikkaan kuin tuhaterotinkin. **Desimaalierotin** puolestaan on suomenkielisessä tekstissä pilkku – ei piste kuten yhdysvaltalaisissa laskimissa. Tekniikan alan teksteissä suositellaan kuitenkin nykyään myös amerikanenglannissa käytettäväksi tuhaterottimena ohutta väliä pilkun tai pisteen sijaan.

ESIMERKKI 1.2

- a) Luku 2 030,0005 lausutaan ja on kirjoitettuna ilman numeroita ”kaksituhatta kolmekymmentä ja viisi tuhannesosaa”.
- b) Luku kaksimiljoonaa kolmesataaseitsemänkymmentäkaksituhatta neljäsataayhdeksänkymmentäkaksi kirjoitettuna numeroilla on 2 372 492.
- c) Jos näet yhdysvaltalaisessa yhteydessä ilmaisun 1,000.50 dollaria, tämä tarkoittaa tuhatta dollaria ja 50 senttiä. Suomenkielisessä tekstissä sama kirjoitettaisiin 1 000,50 dollaria.

Matematiikan merkintätavat eivät usein ole mitään niin sanottua luonnollista kieltä kuten suomi tai tanska, vaan asiat pyritään merkitsemään tiivisti ja mahdollisimman yleisin merkinnöin niin, että samoja merkintöjä ymmärtäisi joku muukin kuin samaa äidinkieltä puhuva. Matematiikan kehitys on sitä myöten tuonut mukanaan suuren määrän erilaisia symboleita ja historian varrella muodostuneita käytäntöjä.

Matematiikassa lukuja merkitään tai pikemminkin symboloidaan usein kirjaimilla. Tästä on se etu, että kirjain voi tarkoittaa mitä lukua tahansa, joten kirjainten avulla pystytään ilmaisemaan kaikille luvuille päteviä yleisiä sääntöjä tarvitsematta välittää siitä, mikä luku johonkin paikkaan kuuluu. Matematiikassa pyritään yleistämään ilmaisut mahdollisimman kattaviksi, jotta poikkeuksia on mahdollisimman vähän.

ESIMERKKI 1.3

- a) Voidaan tiivistää $x = x$ ilmaisemaan, että jokainen luku on yhtä suuri itsensä kanssa, eikä meidän tarvitse erikseen luetella mahdollisia (kaikkiaan ääretöntä määrää) lukuja: $0 = 0$, $1 = 1$, $2 = 2$, ...
- b) Kaikille (ainakin lukiotasolla käsiteltäville) luvuille x ja y pätee $x + y = y + x$, eli yhteenlaskun järjestyksellä ei ole väliä. Tämä on paljon helpompaa kuin luetella (äärettömän monta tapausta), esimerkiksi

■ $2 + 3 = 3 + 2$, $2 + 4 = 4 + 2$, $3 + 4 = 4 + 3$, $2 + 5 = 5 + 2$ ja niin edelleen.

Yleensä samalla kirjaimella tarkoitetaan samassa asiayhteydessä aina samaa lukua. Esimerkiksi edellisessä esimerkissä x tarkoittaa samaa lukua yhtälön kummallakin puolella. y tarkoittaa myös jotain lukua, joka on sama yhtälön kummallakin puolella. y voi tarkoittaa eri lukua kuin x , mutta ei välttämättä. On myös mahdollista, että x ja y voivat tarkoittaa samaa lukua – siis pä yllä mainittu sääntö kertoo myös, että esimerkiksi $2 + 2 = 2 + 2$.

Symboleja, joiden lukuarvo voi vaihdella, on tapana kutsua **muuttujiksi**, ja sellaisia, joiden lukuarvon ajatellaan pysyvän muuttumattomana, on tapana kutsua **vakioiksi**.

ESIMERKKI 1.4

■ Luku 4 on vakio, koska sen suuruus on aina sama asiayhteydestä riippumatta.

RELAATIOT JA LASKUTOIMITUKSET

Matematiikassa olemme kiinnostuneita tutkimuksen kohteen (yleensä lukujen) ominaisuuksista ja niiden suhteista toisiin asioihin. Riippuvuussuhteita kutsutaan matematiikassa **relaatioiksi**. Tulimme jo käyttäneeksi kahta erilaista relaatiota, joilla kummallakin on oma merkintänsä: yhteenlasku ja yhtäsuuruus. Yhteenlasku $+$ yhdistää kaksi lukua yhdeksi uudeksi luvuksi, ja yhtäsuuruus $=$ vertailee kahta lukua keskenään.

Harjoituksena vähän formaalimmasta matematiikasta esitämme seuraavat yhtäsuuruusrelaation ominaisuudet:

Yhtäsuuruus on kahden luvun välinen riippuvuus, jolla on seuraavat kolme tärkeää ominaisuutta:

Yhtäsuuruusrelaation ominaisuudet

1. **Refleksiivisyys:** Jokainen luku on yhtä suuri itsensä kanssa, eli $x = x$ kaikilla luvuilla x .
2. **Symmetrisyys:** Yhtäsuuruus toimii molempiin suuntiin, eli jos $x = y$, niin myös $y = x$ kaikilla x ja y .
3. **Transitiivisuus:** Jos $x = y$ ja $y = z$, niin $x = z$ kaikilla x, y ja z .

ESIMERKKI 1.5

- a) Ei ole väliä, kirjoitetaanko $x = 3$ vai $3 = x$, koska nämä tarkoittavat yhtäsuuruden symmetrisyyden perusteella täysin samaa asiaa.
- b) Jos $t = 3$ ja toisaalta $y = t$, niin silloin välttämättäkin transitiivisuuden perusteella $y = t$.

On hyvinkin mahdollista, että nämä ominaisuudet voivat tuntua lukijasta triviaaleilta eli niin yksinkertaisilta ja itsestään selviltä, ettei niitä tarvitse edes mainita. Matematiikka on kuitenkin kumulatiivinen eli edellisen päälle rakentuva tieteenala, ja ominaisuudet kuten refleksiivisyys on tärkeää nimetä, jotta niihin voidaan myöhemmin viitata ja vedota. Matematiikassa pyritään myös tarkkuuteen, ja kaikki asiat – myös triviaalit – määritellään hyvin. Hyvin määritelty tarkoittaa yksinkertaista ja yksikäsitteistä.

Peruskoulusta tuttuja relaatioita ovat myös $<$ (pienempi kuin), $>$ (suurempi kuin), $\leq$ (pienempi tai yhtä suuri kuin) ja $\geq$ (suurempi tai yhtä suuri kuin), joilla vertaillaan kahden luvun välistä suuruutta.

ESIMERKKI 1.6

- a) Väite $4 < 5$ pitää paikkansa, mutta $5 < 4$ ei. Kyseinen relaatio ei siis ole symmetrinen toisin kuin yhtäsuuruus, koska vasemman- ja oikeanpuoleista lukua ei voida vaihtaa keskenään.
- b) Edustakoot a ja b ihmisiä, ja relaatiota “ a rakastaa b :tä” merkitään $a \heartsuit b$. Tällöin relaatio $\heartsuit$ ei ole symmetrinen (tunteet eivät aina ole molemminpuolisia), refleksiivinen (kaikki eivät rakasta itseään) eikä transitiivinen (rakastaminen ei välity kolmansille osapuolille).

Huomaa, että refleksiivisyyden, symmetrisyyden ja transitiivisuuden määritelmissä käytetty maininta ”– kaikilla x ” on hyvin olennainen. Relaatiolle ei anneta tiettyä ominaisuutta, jos se toimii vain joskus, vaan sen täytyy toimia aina ja kaikissa tilanteissa. Se, mitä relaatio tarkoittaa ja mitä muuttujat edustavat, täytyy määrillä niin selvästi, ettei epävarmuuksille jää sijaa!

Yhteenlasku on esimerkki relaatiosta, joka yhdistää kaksi lukua johonkin kolmanteen lukuun – tällaisia relaatioita kutsutaan **laskutoimituksiksi**. (Yhteenlaskun tapauksessa tätä kolmatta lukua kutsutaan yhteenlaskun summaksi.) Vielä yleisemmin puhutaan **operaatioista**, kun relaation kohteena eivät välttämättä ole luvut vaan jotkin abstraktimmat oliot. Kyseessä on tärkeä ero: kyseinen relaatio ei siis vain liitä kahta lukua toisiinsa kuten $=$ tai $>$.

Tehtäviä

7. Kirjoita luvut oikeaoppisesti

a) kolmekymmentäseitsemäntuhatta kuusisataakuusitoista ja kolme tuhannesosaa

b) miinus kuusikymmentäseitsemänmiljoonaa kolmekymmentäkuusituhatta kahdeksan

8. Onko relaatio refleksiivinen, symmetrinen tai transitiivinen?

a) Kahden luvun välinen relaatio $\leq$

b) Kahden luvun välinen relaatio $>$

c) ” a on b :n lapsi”, missä a ja b edustavat ihmisiä

d) ” a on b :n työkaveri”, missä a ja b edustavat ihmisiä, jotka töissä paikassa, missä on töissä muitakin

9. Olkoot l_1 ja l_2 tason suoria. Määritellään niiden välinen relaatio $l_1 \parallel l_2$, joka luetaan ”suora l_1 on yhdensuuntainen suoran l_2 kanssa”. Onko relaatio refleksiivinen, symmetrinen tai transitiivinen?

1.2 Lukualueet

LUONNOLLISET LUVUT

Luonnolliset luvut ovat lukuja, joita voidaan käyttää lukumäärän ja järjestyksen ilmaisemiseen. Luonnollisten lukujen joukkoa merkitään kirjaimella $\mathbb{N}$ ja niihin katsotaan kuuluvan luvut 0, 1, 2, 3, jne. Matematiikan kielellä tämä on usein tapana ilmaista seuraavanlaisella merkinnällä:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Luvun kuulumista johonkin joukkoon voidaan merkitä symbolilla $\in$, esimerkiksi $2 \in \mathbb{N}$. Jos luku ei kuulu johonkin joukkoon, merkitään vastaavasti $\notin$, esimerkiksi $-2 \notin \mathbb{N}$.

Tässä kirjasarjassa katsotaan, että nolla on myös luonnollinen luku. Matematiikan alasta riippuen käytännöt saattavat vaihdella. Jos halutaan ehdottomasti painottaa nollan kuuluvan käytettyyn luonnollisten lukujen joukkoon, voidaan joukosta käyttää merkintää $\mathbb{N}_0$.

Luonnollisille luvuille m ja n on määritelty yhteenlasku $m + n$, esimerkiksi $5 + 3 = 8$. Luonnollisten lukujen kertolasku määritellään peräkkäisinä yhteenlaskuina

$$5 \cdot 3 = 5 + 5 + 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3.$$

tai yleisesti kirjaimia käyttäen:

Kertolasku

$$m \cdot n = \underbrace{m + m + \dots + m}_{n \text{ kpl}} = \underbrace{n + n + \dots + n}_{m \text{ kpl}}.$$

Kolmea pistettä käytetään kaavoissa esittämään puuttuvaa, systemaattisesti jatkuvaa lausekkeen osaa. Kolmea pistettä ei tule käyttää ellei ole hyvin selvää, miten lyhennetty kohta jatkuu!

Nollalla kertomisen ajatellaan olevan ”tyhjä yhteenlasku” eli nolla:

Nollalla kertominen

$$0 \cdot m = 0$$

Luonnollisten lukujen m ja n erotus määritellään yhteenlaskun avulla: $m - n$ on luku k , jolle $k + n = m$. Tämä on kuitenkin köykäistä, ja vähennyslasku käsitellään elegantimmin kokonaislukujen joukossa.

KOKONAISLUVUT

Peruskoulun matematiikasta tutuista laskutoimituksista yhteenlasku ja kertolasku ovat ainoat, joilla voidaan laskea niin, että pysytään luonnollisten lukujen sisällä. Esimerkiksi vähennyslaskua $3 - 5$ ei voida laskea luonnollisten lukujen joukossa. Jotta vähennyslasku olisi kaikille luvuille mahdollinen, on keksitty niin sanottu **vastaluvun** käsite. Vastaluku määritellään seuraavasti:

Vastaluku

Jokaisella luvulla n on vastaluku $-n$, jolle pätee $n + (-n) = 0$.

Esimerkiksi luvun 2 vastaluku on -2 . Yllä olevan määritelmän mukaan, kun luku lasketaan yhteen vastalukunsa kanssa, saadaan tulokseksi 0. Esimerkiksi $2 + (-2) = 0$. Vastaavasti luvun -2 vastaluku on sellainen luku, joka laskettuna yhteen luvun -2 kanssa antaa luvun 0. Tämä on tietysti 2, koska $-2 + 2 = 0$. Näin voidaan huomata, että $-(-2) = 2$. Yleisesti pätee **peilaus**:

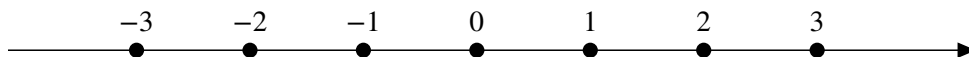
Peilaus

$$-(-a) = a.$$

Luonnolliset luvut ja niiden vastaluvut muodostavat yhdessä **kokonaislukujen** joukon

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$

jota voidaan havainnollistaa **lukusuoran** avulla:



Kun käytämme kokonaislukuja, voidaan kahden luvun erotus määritellä yhteenlaskun ja vastaluvun avulla yksinkertaisesti:

Vähennyslasku

$$m - n = m + (-n)$$

RATIONAALILUVUT

Peruskoulussa opituista laskutoimituksista yhteenlasku, vähennyslasku ja kertolasku ovat sellaisia, joilla voidaan laskea niin, että pysytään kokonaislukujen sisällä. Samoin esimerkiksi laskusta $8 : 4$ tulee tulokseksi kokonaisluku 2. Sen sijaan esimerkiksi laskutoimituksella $8 : 3$ ei ole tulosta kokonaislukujen joukossa. Tätä varten on otettu käyttöön rationaaliluvun käsite.

Rationaaliluvulla tarkoitetaan lukua, joka voidaan esittää kahden kokonaisluvun osamääränä. Esimerkiksi $\frac{2}{3}$ on rationaaliluku, samoin $0,25 = \frac{1}{4}$. Myös kaikki kokonaisluvut ovat rationaalilukuja, sillä ne voidaan esittää osamäärinä: esimerkiksi $5 = \frac{5}{1}$. Rationaalilukujen joukkoa merkitään symbolilla $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \text{rationaalilukujen joukko}$$

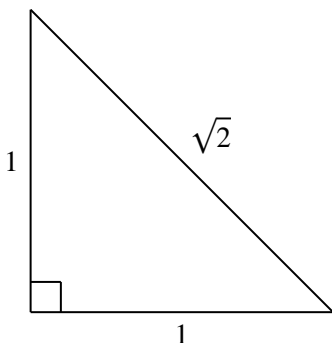
Lisää rationaalilukujen ominaisuuksia käsitellään myöhemmissä luvuissa.

REAALILUVUT

Kaikki käyttämämme luvut eivät ole edes rationaalilukuja. Esimerkiksi peruskoulussa on käytetty lukua π , joka kuvaa ympyrän kehän pituuden suhdetta ympyrän

halkaisijaan. Lukua π ei voida esittää kahden kokonaisluvun osamääränä, joten se ei ole rationaaliluku.

Toinen esimerkki luvusta, joka ei ole rationaaliluku on $\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ tarkoittaa sellaista positiivista lukua, joka kerrottuna itsellään on 2. Se tulee vastaan esimerkiksi suorakulmaisessa kolmiossa, jonka kateetit ovat pituudeltaan 1. (Neliöjuuren käsitteestä puhutaan tarkemmin tämän kirjan luvussa 1.10.)



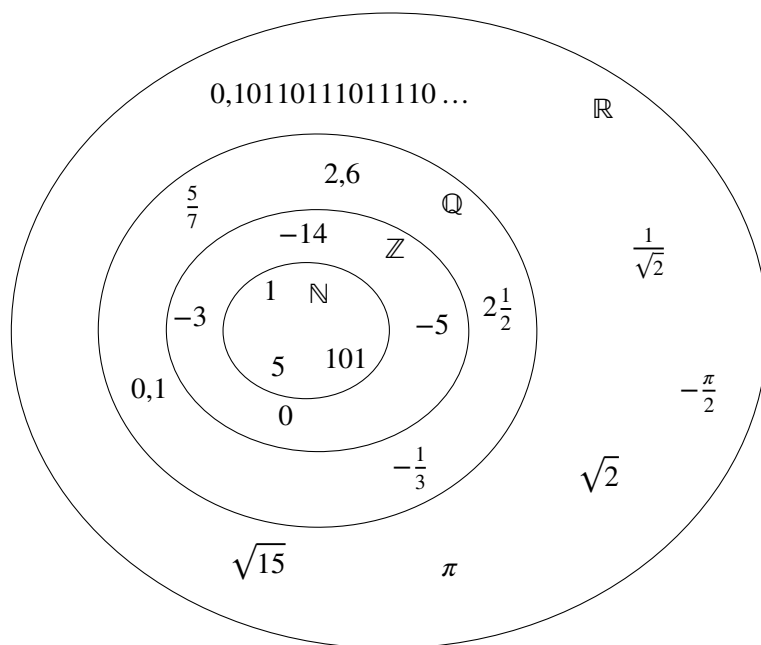
Sellaisia lukuja, kuten π ja $\sqrt{2}$, joita ei voida esittää kahden kokonaisluvun osamääränä, sanotaan **irrationaaliluvuiksi**. Rationaaliluvut ja irrationaaliluvut muodostavat yhdessä **reaalilukujen** joukon $\mathbb{R}$. Reaalilukujen ominaisuuksista kerrotaan lisää luvussa 1.12.

Seuraavassa taulukossa on yhteenveto lukiokursseilla käytettävistä lukualueista:

Lukualueet

Joukko	Symboli	Mitä ne ovat
Luonnolliset luvut	$\mathbb{N}$	Luvut 0, 1, 2, 3, ...
Kokonaisluvut	$\mathbb{Z}$	Luvut ... -2, -1, 0, 1, 2 ...
Rationaaliluvut	$\mathbb{Q}$	Luvut, jotka voidaan esittää murtolukuna
Reaaliluvut	$\mathbb{R}$	Kaikki lukusuoran luvut

Joukot $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$ ovat sisäkkäisiä. Kaikki luonnolliset luvut ovat myös kokonaislukuja, kaikki kokonaisluvut ovat myös rationaalilukuja ja kaikki rationaaliluvut ovat myös reaalilukuja.



Lukualueiden ominaisuudet tulevat tarkemmin esille tämän kirjan myöhemmissä luvuissa.

Lukualueita voidaan laajentaa lisää vielä reaalityyppistäkin – esimerkiksi **kompleksiluvuiksi**, jotka voidaan esittää tason pisteinä. Kompleksilukuja merkitään kirjaimella $\mathbb{C}$. Kompleksiluvut eivät kuulu lukion oppimäärään, mutta niitä tarvitaan muun muassa insinöörialoilla yliopistoissa ja ammattikorkeakouluissa. Esimerkiksi vaihtosähköpiirien analyysissä, signaalinkäsittelyssä ja säätötekniikassa käytetään runsaasti kompleksilukuja. Kompleksiluvut ovat tärkeitä myös matematiikan tutkimuksessa itsessään. Tässä kirjassa niihin ei kuitenkaan perehdytä tarkemmin.

LASKUTOIMITUKSET

Peruslaskutoimitusten yhteen-, vähennys-, kerto- sekä jakolaskun tutkimusta kutsutaan **aritmetiikaksi**. Huomaa, että joitakin laskutoimituksia voidaan merkitä useilla eri tavoilla:

Laskutoimitus	Merkintä
Yhteenlasku	+
Vähennyslasku	–
Kertolasku	$\times$ * ·
Jakolasku	: / – (jakoviivana)

Laskimista tuttua symbolia $\div$ ei tulisi käyttää käsinkirjoitetussa lausekkeissa. Jakoviivan ylä- ja alapuolilla olevat pisteet kuvaavat murtolukuesityksen osoittajaa ja nimittäjää. Siis esimerkiksi laskimeen näppäilty “ $4 \div 2$ ” vastaa jakoviivan avulla merkittyä murtolukuesitystä $\frac{4}{2}$.

Aritmeettiset operaatiot

- yhteenlaskettava + yhteenlaskettava = summa
- vähennettävä – vähentäjä = erotus
- tekijä · tekijä = tulo
- jaettava : jakaja = osamäärä

Yllä on lueteltu peruslaskutoimituksiin osallistuville luvuille annetut nimitykset. Huomaa, että yhteen- ja kertolaskussa laskutoimitukseen osallistuvia lukuja nimitetään samalla tavalla. Tämä kertoo yhteen- ja kertolaskun **vaihdannaisuudesta**. Näissä laskutoimituksissa lukujen järjestyksellä ei siis ole väliä.

Kuten tullaan näkemään, kerto- ja jakolasku määritellään yhteenlaskun avulla.

Yhteen- ja vähennyslasku

Vähennyslasku määriteltiin kokonaislukujen yhteydessä vastaluvun lisäämiseksi:

$$m - n = m + (-n)$$

Tämän perusteella voidaan myös päätellä, mitä tapahtuu, kun vähennettävä luku onkin negatiivinen. Esimerkiksi:

$$\begin{aligned} &8 - (-5) \\ &= 8 + (-(-5)) \\ &= 8 + 5 \end{aligned}$$

Muutetaan vähennyslasku vastaluvun lisäämiseksi
 $-(-5)$ tarkoittaa -5 :n vastalukua, joka on 5.

Tähän ideaan perustuvat seuraavat merkkisäännöt yhteen- ja vähennyslaskulle:

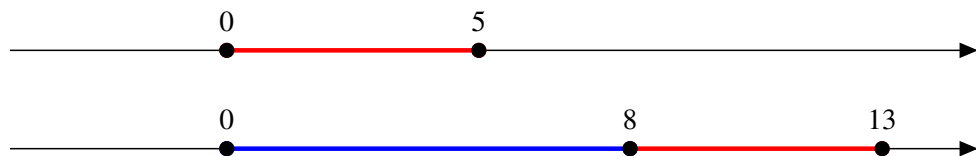
Merkkisäännöt I

- $a + (+b) = a + b$
- $a + (-b) = a - b$
- $a - (+b) = a - b$
- $a - (-b) = a + b$

Tämä asia ilmaistaan usein sanomalla, että kaksi peräkkäistä '-'-merkkiä kumoavat toisensa.

Negatiivisten ja positiivisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskut voidaan helposti tulkita lukusuoran avulla:

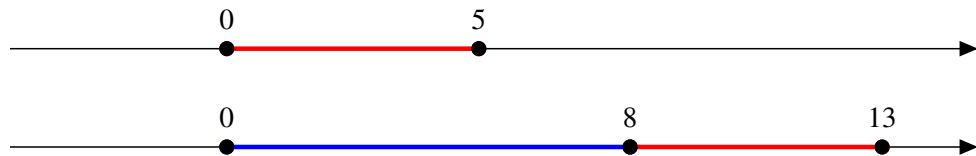
$5 + 8$ ”viiteen lisätään kahdeksan”



$$5 + 8 = 13$$

$5 + (+8)$ ”viiteen lisätään plus kahdeksan”

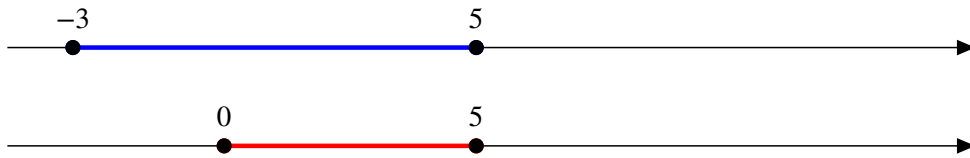
$+8$ tarkoittaa samaa kuin 8. '+'-merkkiä käytetään luvun edessä silloin, kun halutaan korostaa, että kyseessä on nimenomaan positiivinen luku.



$$5 + (+8) = 13$$

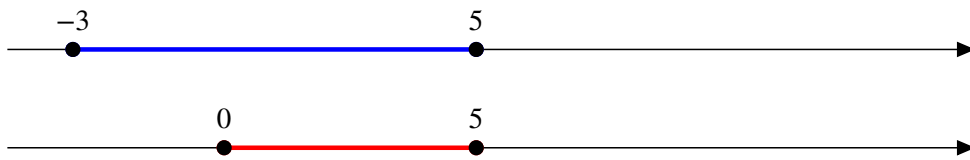
$5 - (+8)$ ”viidestä vähennetään +8”

Tämä tarkoittaa samaa kuin $5 - 8$. Lukusuoralla siis liikutaan 8 pykälää taaksepäin.



$$5 - (+8) = -3$$

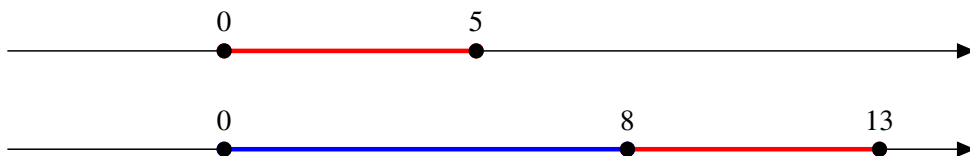
Mitä tapahtuu, kun lisätään negatiivinen luku? Kun lukuun lisätään 1, se kasvaa yhdellä. Kun lukuun lisätään 0, se ei kasva lainkaan. Kun lukuun lisätään negatiivinen luku, esimerkiksi -1 , on luonnollista ajatella, että se pienenee. Tällä logiikalla negatiivisen luvun lisäämisen pitäisi siis pienentää alkuperäistä lukua. Juuri näin vähennyslasku määritellään: $5 + (-8)$ on yhtä suuri kuin $5 - 8$.



$$5 + (-8) = -3$$

$5 - (-8)$ ”viidestä vähennetään miinus kahdeksan”

Negatiivisen luvun lisääminen on vastakohta positiivisen luvun lisäämiselle. Tällöin on luonnollista, että negatiivisen luvun vähentäminen on vastakohta positiivisen luvun vähentämiselle. Koska positiivisen luvun vähentäminen pienentää lukua, pitäisi negatiivisen luvun vähentämisen kasvattaa lukua. Lasku $5 - (-8)$ tarkoittaa siis samaa kuin $5 + 8$.

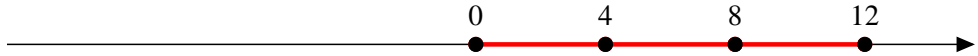


$$5 - (-8) = 13$$

Kertolasku

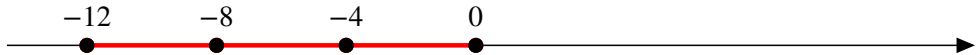
Samaan logiikkaan perustuen on sovittu myös merkkisäännöt positiivisten ja negatiivisten lukujen kertolaskuissa. Kun negatiivinen ja positiivinen luku kerrotaan keskenään, saadaan negatiivinen luku, mutta kun kaksi negatiivista lukua kerrotaan keskenään, saadaan positiivinen luku.

$3 \cdot 4$ ”kolme kappaletta nelosia”



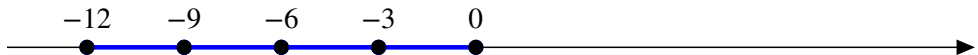
$$3 \cdot 4 = 12$$

$3 \cdot (-4)$ ”kolme kappaletta miinus-nelosia”



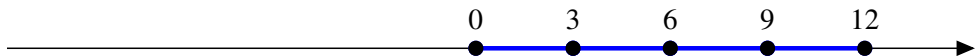
$$3 \cdot (-4) = -12$$

$-3 \cdot 4$ ”miinus-kolme nelinkertaistetaan”



$$-3 \cdot 4 = -12$$

$-3 \cdot (-4)$ ”miinus-kolme miinus-nelinkertaistetaan”



$$-3 \cdot (-4) = 12$$

Jokainen miinusmerkki voidaan tarvittaessa myös tulkita kertolaskuna: $-a = (-1) \cdot a$.

Jakolasku

Kun ensin kerrotaan jollain ja sitten jaetaan samalla luvulla, päädytään takaisin siihen, mistä lähdettiin. Jakolaskujen merkkisäännöt on sovittu niin, että tämä ominaisuus säilyy. Ne ovat siis samat kuin kertolaskujen merkkisäännöt.

Esimerkiksi haluamme, että $(-12) : (-3) \cdot (-3) = -12$. Nyt voimme kysyä, mitä laskun $(-12) : (-3)$ tulokseksi pitäisi tulla, jotta jakolasku ja kertolasku säilyvät toisilleen käänteisinä, eli mikä luku kerrottuna luvulla -3 on -12 . Kertolaskun merkkisäännöistä nähdään helposti, että tämän luvun täytyy olla $+4$ eli 4 . Niinpä on sovittu, että $(-12) : (-3) = 12 : 3 = 4$.

Merkkisäännöt II

- $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(ab)$
- $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b = ab$
- $(-a) : b = a : (-b) = -\frac{a}{b}$
- $(-a) : (-b) = a : b = \frac{a}{b}$

Tehtäviä

10. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

- a) $-1 \notin \mathbb{Z}$
- b) $-1 \in \mathbb{N}$
- c) $\frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$
- d) $-\frac{2}{4} \in \mathbb{Q}$
- e) $-\frac{412}{97} \in \mathbb{R}$

11. Kirjoita laskut näkyviin: Lukusuoral-
la on saavuttu pisteeseen -2 . Mihin pis-
teeseen päädytään, kun liikutaan

- a) 3 askelta negatiiviseen suuntaan?
- b) 6 askelta positiiviseen ja sitten 2 negatiiviseen suuntaan?
- c) 2 askelta positiiviseen ja sitten 6 negatiiviseen suuntaan?

12. Kirjoita laskutoimitukseksi (laskuun ei tarvitse merkitä yksikköjä eli celsiusasteita)

- a) Lämpötila on aluksi 17°C , ja sitten se vähentyy viisi astetta.
- b) Lämpötila on aluksi 5°C , ja sitten se kasvaa kuusi astetta.
- c) Pakkasta on aluksi -10°C , ja sitten se lisääntyy kahdella pakkasasteella.
- d) Pakkasta on aluksi -20°C , ja sitten se hellittää (vähentyy) kolme (pakkas)astetta.

13. Laske

- a) $3 + (-8)$
- b) $5 + (+7)$
- c) $-8 - (-5)$
- d) $+(+8) - (+5)$
- e) $-(-8) - (+8)$.

14. Laske

- a) $3 \cdot (-6)$
- b) $-7 \cdot (+7)$
- c) $-8 \cdot (-5)$
- d) $-(-8) \cdot (-8)$
- e) $-(-8) \cdot (-(+5))$
- f) $-(-8) \cdot (-5) \cdot (-1) \cdot (-2)$.

15. Luet kirjaa sivulta 27 sivulle 86. Montako sivua luet?

16. Kirjoita ohjeen mukainen lauseke ja laske sen arvo, jos mahdollista

- a) lukujen 5 ja -15 osamäärä
- b) lukujen 2 ja 8 tulon vastaluku
- c) luvun -2 vastaluvun ja lukujen x ja y erotuksen osamäärä.

17. Kirjoita erotukset summana

- a) $130 - (-5)$
- b) $-4 - 7$
- c) $2a - b$, kun a ja b ovat kokonaislukuja.

18. Kirjoita summat erotuksena

a) $31 + 4$

b) $-15 + (-92)$

c) $-a + 2b$, kun a ja b ovat kokonaislukuja.

Lisää tehtäviä

19. Laske.

a) $2 + 3 \cdot (-1)$

b) $(5 - (2 - 3)) \cdot 2$

c) $1 + 9 : 3 : 3 - (3 - 5) : 2$.

20. ★ Laske.

a) $\left(\frac{(5+3 \cdot 2) \cdot 6+2}{-(2-12:2)} + (-(-2) - 1) \right) : 2$

b) $-2 + 5 \cdot \left[3 + (2 - 3) \cdot 2 - \frac{3-102}{121:11} \right]$

c) $\{ 3 \cdot 88 : 4 : 2 + 13 : 3 \cdot [21 : (14 : 2)] \} : 9 + 1$

21. ★ Lisää sulkuja siten, että yhtäsuuruusmerkin molemmilla puolilla olevilla lausekkeilla on sama arvo.

a) $5 - 1 \cdot 3 + 2 = 1 + 4 \cdot 4 - 2 - 4 - 8$

b) $2 \cdot -1 : 8 + 3 \cdot 4 = 2 + 1 \cdot 8 - 1$.

c) $7 - 9 + 25 \cdot 5 - 1 : 61 - 6 - 5 = 3 + 4 \cdot 7 \cdot 1 - 5 + 14 \cdot 6 + 8$

1.3 Jaollisuus ja tekijöihinjako

Jaollisuus

- **Määritelmä 1.** Kokonaisluku a on jaollinen kokonaisluvulla $b \neq 0$, jos on olemassa kokonaisluku c niin, että $a = b \cdot c$. Tällöin sanotaan myös, että b on a :n **tekijä**. Voidaan merkitä $b \mid a$, joka luetaan ” b jakaa a :n” tai ” b on a :n tekijä”.
- **Määritelmä 2.** Luku a on jaollinen luvulla $b \neq 0$, mikäli $\frac{a}{b}$ on kokonaisluku. Määritelmät ovat yhtäpitäviä.

Jaollisuudesta puhutaan vain käsiteltäessä kokonaislukuja (eli siis myös luonnollisia lukuja) – käsite ei yleisty mielekkäästi rationaali- tai reaalityöluville.

ESIMERKKI 1.7

- a) Luku -12 on jaollinen luvulla 3 , sillä $-12 = 3 \cdot (-4)$.
- b) -12 ei ole jaollinen luvulla 5 , sillä ei ole kokonaislukua, joka kerrottuna viidellä olisi 12 .

ESIMERKKI 1.8

- a) Väite $4 \mid 12$ on tosi.
- b) Väite $4 \nmid 5$ on tosi.

Kaikki luvut ovat jaollisia itsellään ja luvulla 1 .

ESIMERKKI 1.9

- a) $7 = 7 \cdot 1 = 1 \cdot 7$, joten 7 on jaollinen luvuilla 1 ja 7 , koska sekä 1 että 7 ovat kokonaislukuja.
- b) $-6 = -6 \cdot 1 = 1 \cdot (-6)$, joten -6 on jaollinen sekä itsellään että yhdellä.

Kokonaislukuja, jotka ovat jaollisia kahdella, sanotaan **parillisiksi luvuiksi**. Lukut, jotka eivät ole parillisia, ovat **parittomia lukuja**.

Alkuluku

Alkuluku on lukua yksi suurempi luonnollinen luku, joka ei ole jaollinen muilla positiivisilla kokonaisluvuilla kuin luvulla 1 ja itsellään.

ESIMERKKI 1.10

- a) Luvut 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ja 19 ovat alkulukuja.
- b) Luku 18 ei ole alkuluku, koska se on jaollinen esimerkiksi luvulla 9.
- c) Mikään negatiivinen luku ei voi olla alkuluku, koska jokainen negatiivinen luku $-a$ voidaan kirjoittaa tulona $-1 \cdot a$.

Jos luvun tekijä on alkuluku, sitä kutsutaan **alkutekijäksi**.

Aritmetiikan peruslause

Jokainen ykköstä suurempi kokonaisluku voidaan esittää (termien järjestystä lukuunottamatta) yksikäsitteisesti alkulukujen tulona. Jokainen yhtä suurempi kokonaisluku voidaan jakaa alkutekijöihin (termien järjestystä lukuunottamatta) yksikäsitteiselä tavalla.

Aritmetiikan peruslause todistetaan kurssilla Logiikka ja lukuteoria.

Esimerkiksi luku 84 voidaan kirjoittaa muodossa $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$. Havaitaan, että 2, 3, ja 7 ovat kaikki alkulukuja. Aritmetiikan peruslauseen nojalla tiedetään, että tämä on ainoa tapa kirjoittaa 84 alkulukujen tulona – mahdollista kerrottavien termien järjestyksen vaihtoa lukuunottamatta.

Luvun alkutekijät voi löytää etsimällä luvulle ensin jonkin esityksen kahden luvun tulona. Näiden kahden luvun ei tarvitse olla alkulukuja. Sen jälkeen sama toistetaan näille kahdelle luvulle ja edelleen aina uusille luvuille, kunnes jäljellä on vain alkulukuja.

Tehtäviä

22. Mitkä seuraavista luvuista ovat jaollisia luvulla 4? Jos luku a on jaollinen luvulla 4, kerro, millä kokonaisluvulla b pätee $a = 4 \cdot b$.

- a) 1
- b) 12
- c) 13
- d) 2
- e) -20
- f) 0

23. Ovatko väitteet tosia vai epätosia?

- a) $2|4$
- b) $4|2$
- c) $4 \nmid 10$
- d) $10 \nmid 100$

24. Jaa alkutekijöihin

- a) 12
- b) 15
- c) 28
- d) 30
- e) 64
- f) 90
- g) 100.

25. Jaa luvut tekijöihin. Mitkä luvuista ovat alkulukuja?

- a) 111
- b) 75
- c) 97
- d) 360

26. Pikaruokaketju myy kananuggetteja 4, 6, 9, ja 20 nuggetin pakkauksissa. Luettele ne alle 25 nuggetin tilaukset, joita et voi tilata yhdistelemällä edellä mainittuja annoskokoja. Entä jos et kehtaa ostaa 4 nuggetin lasten annoksia?

27. Onko kokonaislukujen jaollisuusrelaatio $|$ (esim. $8 | 64$)

- a) refleksiivinen
- b) symmetrinen
- c) $\star$ transitiivinen?

28. Positiivisia kokonaislukuja, jotka ovat itsestään poikkeavien tekjööidensä summia, sanotaan **täydellisiksi luvuiksi**. Esimerkiksi 6 on täydellinen luku, sillä $6 = 1 + 2 + 3$. Tällä hetkellä ei tiedetä, onko täydellisiä lukuja äärettömän montaa – vuonna 2013 löydettiin tietokoneella 48. täydellinen luku, jossa on lähes 35 miljoonaa numeroa. Myöskään ei tiedetä, onko parittomia täydellisiä lukuja olemassa. Määritä seuraava kuutta suurempi täydellinen luku. (Se on alle 30.)

29. $\star$ Osoita jaollisuuden määritelmään nojaten, että jos kokonaisluku on jaollinen kuudella, niin se on jaollinen sekä kahdella että kolmella.

1.4 Lausekkeiden sieventäminen

Mitä tahansa lukua tai kirjoitettua laskutoimitusta (kuten 9 tai $\frac{x}{3} - 9$) kutsutaan **lausekkeeksi**. Lausekkeen **arvoksi** kutsutaan sitä lukua, joka saadaan, kun lausekkeen laskutoimitukset lasketaan. Esimerkiksi lausekkeen $5 - 3$ arvo on 2. Samoin lausekkeen 2 arvo on myös 2.

Lausekkeiden sanotaan olevan yhtäsuuria, kun niiden arvot ovat yhtä suuria. Tällöin voidaan merkitä esimerkiksi $2 + 3 = 10 : 2$, koska lausekkeen $2 + 3$ arvo on 5 ja lausekkeen $10 : 2$ arvo on myös 5.

Usein matemaattikassa on tapana, että luku ilmaistaan kirjoittamalla lauseke, jonka arvo kyseinen luku on. Tällöin tietyn luvun voi itse asiassa ilmaista hyvin monella eri tavalla. Esimerkiksi seuraavat merkinnät tarkoittavat kaikki samaa lukua:

$$\begin{aligned} &42 \\ &-(-42) \\ &6 \cdot 7 \\ &(50 - 29) \cdot 2 \end{aligned}$$

Niinpä matemaattikassa voi luvun 42 paikalle kirjoittaa merkinnän $(50 - 29) \cdot 2$, sillä se tarkoittaa samaa lukua kuin merkintä 42.

Kun lauseke muodostuu yhteenlaskusta, käytetään nimitystä **termi** tarkoittamaan yhtä yhteenlaskettavaa osaa lausekkeesta. Termissä voi olla yhdistelmä luvuista, vakioista ja muuttujista tulona tai se voi myös olla vain yksittäinen luku. Esimerkiksi lausekkeen $-4\sqrt{2}ax^2 + ax + 1$ termit ovat $-4\sqrt{2}ax^2$, ax ja 1.

Usein lausekkeessa esiintyy myös kirjaimia. Niillä merkitään lukuja, joiden arvoa ei tiedetä tai joiden arvo voi vaihdella tilanteesta riippuen ja niitä kutsutaan muuttujiksi, tuntemattomiksi tai vakioiksi (ks. luku ??). Yleensä lausekkeella on myös tällöin lu-

kuarvo, mutta tätä lukuarvoa ei välttämättä voi laskea, jos muuttujan, tuntemattoman tai vakion lukuarvoa ei tiedetä.

Kun lausekkeissa esiintyy tuntemattomia lukuja, on tapana sanoa, että kaksi lauseketta ovat yhtä suuria silloin, kun ne ovat yhtä suuria riippumatta siitä, mikä lukuarvo tuntemattomilla on. Esimerkiksi lausekkeet $x + y + 2$ ja $y + 2 + x$ ovat yhtä suuria, koska riippumatta siitä, mitä x :n ja y :n lukuarvot ovat, kummastakin lausekkeesta saadaan sama tulos.

LASKUJÄRJESTYS

Kun lauseke sisältää monta eri laskutoimitusta, on laskutoimitusten suoritusjärjestyksellä usein vaikutusta lausekkeen arvoon. Tällöin käytetään sulkumerkkejä ilmaisemaan haluttua laskujärjestystä. Tämän lisäksi on olemassa yleinen sopimus siitä, missä järjestyksessä laskutoimitukset lasketaan silloin, kun suluilla ei ole muuta ilmaistu.

Jos lausekkeessa on useita eri laskutoimituksia, ne suoritetaan seuraavassa järjestyksessä:

Suoritusjärjestys

1. Suluissa olevat lausekkeet sisemmistä suluista ulompiin sulkuihin
2. Potenssilaskut (potenssia käsitellään tarkemmin myöhemmin tässä kirjassa)
3. Kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle
4. Yhteen- ja vähennyslaskut vasemmalta oikealle

Käytännössä laskutoimituksen voi laskea, jos sen kummallakaan puolella ei ole laskutoimitusta, joka pitäisi laskea ensin.

Tässä kannattaa huomata lisäksi, että vaikka laskujärjestyssääntöjen mukaan kerto- ja jako- sekä yhteen- ja vähennyslaskut lasketaan vasemmalta oikealle, on tiettyjä tilanteita, joissa järjestys ei vaikuta laskun lopputulokseen ja laskut voidaan laskea myös vaikka oikealta vasemmalle. Tästä puhutaan tarkemmin vähän myöhemmin vaihdanta- ja liitäntälain yhteydessä.

ESIMERKKI 1.11

Lasketaan lausekkeen $2 + (3 + 1) \cdot 5$ arvo.

Koska lausekkeessa on useita eri laskutoimituksia, joudumme laskemaan ne annetun järjestyksen mukaisesti.

Ensimmäiseksi laskemme lausekkeen $(3 + 1)$ arvon, koska se on sulkujen sisällä. Tämän jälkeen laskemme tulon, koska kertolasku lasketaan ennen yhteenlaskua. Lopuksi summaamme saadun tulon luvun 2 kanssa.

$$\begin{aligned} &2 + (3 + 1) \cdot 5 \\ &= 2 + 4 \cdot 5 \\ &= 2 + 20 \\ &= 22 \end{aligned}$$

Lasketaan ensin $(3 + 1)$
sen jälkeen tulo $4 \cdot 5$
lopuksi vielä summa

LAUSEKKEIDEN SIEVENTÄMINEN

Matemaattisia ongelmia ratkaistaessa kannattaa usein etsiä vaihtoehtoisia tapoja jonkin laskutoimituksen, lausekkeen tai luvun ilmaisemiseksi. Tällöin usein korvataan esimerkiksi jokin laskutoimitus toisella laskutoimituksella, josta tulee sama tulos. Näin lauseke saadaan sellaiseen muotoon, jonka avulla ratkaisussa päästään eteenpäin. Kun merkitsemme monimutkaisen lausekkeen lyhyemmin, sitä kutsutaan **sieventämiseksi**. Sieventäminen on ikään kuin sotkuisen kaavan siistimistä selkeämmäksi. Tähän lukuun on koottu sääntöjä, joiden avulla lauseketta voi muuttaa niin, että sen arvo ei muutu.

Tässä luvussa on esitelty tärkeimpiä sääntöjä, joita voidaan käyttää lausekkeiden sieventämisessä. Näitä sääntöjä tulee myöhemmin paljon lisää. Monet myöhemmin vastaan tulevista säännöistä voidaan myös perustella tässä luvussa esitettyjen sääntöjen avulla.

Vaihdantalaki ja liitäntälaki

Yhteenlaskujen järjestys

Yhteenlaskut voi laskea missä järjestyksessä tahansa

$$a + b = b + a$$

(vaihdantalaki)

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$$

(liitântälaki)

Esimerkiksi laskemalla voidaan tarkistaa, että $5 + 7 = 7 + 5$ ja että $(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$.

Nämä säännöt voidaan yhdistää yleiseksi säännöksi, jonka mukaan yhteenlaskun sisällä laskujärjestystä voi vaihtaa miten tahansa.

Tämä sääntö voidaan yleistää koskemaan myös vähennyslaskua, kun muistetaan, että vähennyslasku tarkoittaa oikeastaan vastaluvun lisäämistä. $5 - 8$ tarkoittaa siis samaa kuin $5 + (-8)$, joka voidaan nyt kirjoittaa yhteenlaskun vaihdantalain perusteella muotoon $(-8) + 5$ eli $-8 + 5$ ilman, että laskun lopputulos muuttuu. Tästä seuraa seuraava sääntö:

Yhteen- ja vähennyslaskujen järjestys

Pelkästään yhteen- ja vähennyslaskua sisältävässä lausekkeessa laskujärjestystä voi vaihtaa vapaasti, kun ajattelee miinusmerkin kuuluvan sitä seuraavaan lukuun ja liikkuvan sen mukana.

ESIMERKKI 1.12

$$\blacksquare \quad 5 - 8 + 7 - 2 = 5 + (-8) + 7 + (-2) = (-2) + (-8) + 5 + 7 = -2 - 8 + 5 + 7$$

Vastaavat säännöt pätevät kerto- ja jakolaskulle samoista syistä.

Kertolaskujen järjestys

Kertolaskut voi laskea missä järjestyksessä tahansa

$$a \cdot b = b \cdot a$$

(vaihdantalaki)

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$$

(liitântälaki)

ESIMERKKI 1.13

$$\blacksquare \quad 5 \cdot 6 = 6 \cdot 5$$

$$\blacksquare \quad 2 \cdot (1 + 2) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2$$

Kerto- ja jakolaskujen järjestys

Pelkästään kerto- ja jakolaskua sisältävässä lausekkeessa laskujärjestystä voi vaihtaa vapaasti, kun ajattelee jakolaskun käänteisluvulla kertomisena.

ESIMERKKI 1.14

$$5 : 8 \cdot 7 : 2 = 5 \cdot \frac{1}{8} \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot 5 = 7 : 2 : 8 \cdot 5$$

Osittelulaki

Yhteen- ja kertolaskua sisältävälle lausekkeelle pätee seuraava sääntö:

Osittelulaki

$$a(b + c) = ab + ac$$

Luettaessa annettua kaavaa vasemmalta oikealle puhutaan **sulkujen avaamisesta**.

Oikealta vasemmalle päin luettaessa puhutaan **yhteisen tekijän ottamisesta**.

Osittelulakia voidaan käyttää muiden laskutoimituksiin liittyvien lakien rinnalla. Kun vähennyslasku ajatellaan vastaluvun lisäämisenä ja jakolasku ajatellaan käänteisluvulla kertomisena, voidaan osittelulaki laajentaa koskemaan myös jakolaskua. Seuraavassa on esimerkkejä tällaisista osittelulain sovelluksista:

ESIMERKKI 1.15

$$(b + c)a = a(b + c) = ab + ac = ba + ca$$

(Sovellettu vaihdantalakia)

$$a(b + c + d) = a((b + c) + d) = a(b + c) + ad = ab + ac + ad$$

(Sovellettu liitäntälakia)

$$a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a \cdot (-c) = ab - ac$$

(Sovellettu kertolaskun merkkisääntöä)

$$(b + c) : a = (b + c) \cdot \frac{1}{a} = b \cdot \frac{1}{a} + c \cdot \frac{1}{a} = b : a + c : a$$

(Sovellettu jakolaskun ilmaisemista käänteisluvun avulla.)

Tärkeää on huomata osittelulain toimivan myös, vaikka sulkeissa olisi vähennyslasku, eli osittelulaki voidaan yleistää muotoon $a(b \pm c) = ab \pm c$, missä lausekkeiden molemmille puolille valitaan aina sama merkki – plus tai miinus.

Tämä voidaan johtaa vastaluvun ominaisuuksia käyttämällä:

$$\begin{aligned}
 a(b - c) &= a(b + (-c)) && \text{vähennyslaskun määritelmä} \\
 &= ab + a \cdot (-c) && \text{osittelulaki} \\
 &= ab + (-c)a && \text{vaihdantalaki} \\
 &= ab + (-1)ca && \text{tulkitaan miinusmerkki } -1:\text{llä kertomiseksi} \\
 &= ab + (-ca) \\
 &= ab - ca && \text{vähennyslaskun määritelmä}
 \end{aligned}$$

Tilanteessa $a(-b - c)$ toimitaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}
 a(-b - c) &= a((-1)b + (-1)c) && \text{tulkitaan miinusmerkit } -1:\text{llä kertomiseksi} \\
 &= a((-1)(b + c)) && \text{osittelulaki} \\
 &= (a(-1))(b + c) && \text{kertolaskun liitännäisyys} \\
 &= -a(b + c)
 \end{aligned}$$

Sievennyksen lisäksi osittelulaki on kätevä työkalu luvuilla laskemisessa ja päässä-laskussa, kuten seuraavat esimerkit osoittavat:

ESIMERKKI 1.16

$$\begin{aligned}
 7\,777 \cdot 542 - 7\,777 \cdot 541 &= 7\,777 \cdot (542 - 541) \\
 &= 7\,777 \cdot 1 \\
 &= 7\,777
 \end{aligned}$$

ESIMERKKI 1.17

$$\begin{aligned}
 46 \cdot 9 &= 46 \cdot (10 - 1) \\
 &= 46 \cdot 10 - 46 \cdot 1 \\
 &= 460 - 46 \\
 &= 414
 \end{aligned}$$

Osittelulakia käytetään usein tuntemattomia lukuja sisältävien lausekkeiden muok-
kaamisessa.

ESIMERKKI 1.18

a) $2(x + 5) = 2x + 2 \cdot 5 = 2x + 10$

b) $-x(y + 1) = -xy - x$

c) $3(x + y)a = (3x + 3y)a = 3ax + 3ay$

Joissakin tilanteissa osittelulakia tarvitaan useamman kerran, jotta sulkeet saadaan
poistettua.

Käänteistoimitukset

Luvun ja sen vastaluvun summa on nolla. Yhteen- ja vähennyslasku ovat toisten-
sa käänteistoimituksia, joten saman luvun lisääminen ja vähentäminen peräkkäin
kumoavat toisensa:

Käänteistoimitukset I

- $a - a = 0$
- $-a + a = 0$
- $a + b - b = a$
- $a - b + b = a$

Vastaavasti luvun ja sen käänteisluvun tulo on nolla. Kerto- ja jakolasku ovat tois-
ensa käänteistoimituksia, joten peräkkäin kertominen ja jakaminen samalla luvulla
kumoavat toisensa:

Käänteistoimitukset II

- $a \cdot \frac{1}{a} = 1$
- $\frac{1}{a} \cdot a = 1$
- $a \cdot b : b = a$
- $a : b \cdot b = a$

s Nämä säännöt ovat sieventämisen työkaluja. Voimme poistaa niiden avulla ylimääräisiä termejä ja tulontekijöitä lausekkeista.

ESIMERKKI 1.19

Sievennetään $2 + c - c$, missä c on mikä tahansa kokonaisluku.

Koska $-c$ on c :n vastaluku, niin niiden summa $c + (-c)$ on 0. Tällöin lausekkeen arvo on $2 + 0$. Huomaa, että vastaus on 2 riippumatta c :n arvosta.

Tehtäviä

30. Kirjoita seuraavat laskutoimitukset uudestaan käyttäen annettua laskulakia. Tarkista laskemalla, että tulos säilyy samana.

- a) $3 \cdot (-6)$ (vaihdantalaki)
- b) $5 \cdot (7 + 6)$ (yhteenlaskun vaihdantalaki)
- c) $5 \cdot (7 + 6)$ (kertolaskun vaihdantalaki)
- d) $5 \cdot (7 + 6)$ (osittelulaki)
- e) $(-8 \cdot (-5)) \cdot 2$ (liitântälaki)

31. Laske seuraavat laskut ilman laskinta soveltamalla vaihdantalakia, liitântälakia ja osittelulakia. Selvitä jokaisessa vaiheessa, mitä laskulakia käytit.

- a) $350 \cdot 271 - 272 \cdot 350$
- b) $370 \cdot 1\,010$
- c) $594 + 368 + 3 - 368$

32. Sievennä

- a) $2(a + b) - a$
- b) $3(2a + b) + (2a + b)$
- c) $-(-(-a) - b)$
- d) $-(-a - (-a - b) - b) \cdot (1 + 2b)$.

33. Sievennä

- a) $(b - 1)(c - 1)$
- b) $(b - a)(c - 2)$
- c) $(1 - 2x)(1 - 2y)$

34. Perustele laskutoimitusten määritelmien ja ominaisuuksien avulla, miksi

- a) $3 \cdot 2 = 6$
- b) $6 - 4 = 2$
- c) $3x + x = 4x$
- d) $xy + yx = 2xy$,

kun x ja y ovat kokonaislukuja?

1.5 Murtoluvuilla laskeminen

Rationaaliluvun esitystä kokonaislukujen osamääränä $\frac{a}{b}$ kutsutaan **murtoluvuksi**. Luku a on murtoluvun **osoittaja** ja luku b on **nimittäjä**. Nimittäjä on aina erisuuri kuin nolla ($b \neq 0$). Määritelmän mukaan kaikki rationaaliluvut voidaan esittää murtolukuina. Usein rationaaliluvut voidaan esittää myös desimaaliesityksen avulla.

Rationaalilukuja esitetään toisinaan myös **sekamurtolukuina** eli lyhyemmin sekalukuina. Sekalukuesityksessä luku esitetään summana kokonaisosasta ja murto-osasta (yleensä luku nollan ja yhden väliltä), mutta yhteenlaskumerkki jätetään merkitsemättä. Esimerkiksi sekaluku $3\frac{1}{4}$ tarkoittaa lukua $3 + \frac{1}{4}$, jonka voi esittää murtolukuna $\frac{13}{4}$. Jos luku on negatiivinen, miinusmerkki merkitään koko sekaluvun eteen, siis $-6\frac{4}{5}$ tarkoittaa lukua $-(6 + \frac{4}{5})$. Merkintä saattaa aiheuttaa sekaannusta, sillä $3\frac{5}{6}$ saattaisi myös viitata tuloon $3 \cdot \frac{5}{6}$. Sekalukumerkintää käytetään vain tunnetuilla lukuarvoilla, siis $a\frac{b}{c}$ tarkoittaa aina tuloa $a \cdot \frac{b}{c}$.

ESIMERKKI 1.20

Rationaaliluvulla $\frac{5}{4}$ on kolme erilaista esitystapaa: murtolukuesitys, sekalukuesitys ja desimaaliesitys.

$$\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} = 1,25$$

Murtolukujen laskutoimituksia varten sekaluvut kannattaa usein muuttaa murtolukuesitykseksi.

Jos kahdella murtoluvulla on sama nimittäjä, niitä sanotaan **samannimisiksi**.

ESIMERKKI 1.21

Luvut $\frac{1}{5}$, $\frac{7}{5}$ ja $-\frac{25}{5}$ ovat keskenään samannimisiä. Luvut $\frac{2}{3}$ ja $\frac{5}{7}$ eivät ole samannimisiä.

Samannimisten murtolukujen vertailu on helppoa. Kun kaksi murtolukua esittää samankokoisia osia eli nimittäjät ovat samat, nähdään lukujen keskinäinen suuruus suoraan osoittajista. (Tarvittaessa huomioidaan myös mahdollinen negatiivisuus.)

Jos käsiteltävät murtoluvut eivät jo valmiiksi ole samannimisiä, ne voidaan aina vertailua tai muuta käsittelyä varten muuttaa samannimisiksi **laventamalla** tai **supistamalla**.

Laventaminen ja supistaminen

Murtoluvun arvo pysyy samana, kun sekä osoittajassa että nimittäjässä oleva luku kerrotaan (**lavenetaan**) samalla luvulla. Vastaavasti, osoittaja ja nimittäjä voidaan jakaa (**supistaa**) samalla luvulla, jos jako menee tasan.

laventaminen

→

$$\frac{a}{b} = \frac{ca}{cb}$$

←

supistaminen

missä $b \neq 0$ ja $c \neq 0$.

Laventamisen mahdollistaa se, että jokainen luku $c (\neq 0)$ voidaan esittää muodossa $\frac{c}{c} = 1$. Kun mielivaltaista lukua kerrotaan luvulla 1, luvun arvo ei muutu. Huomaa, että murtoluvun laventaminen ei tarkoita samaa kuin murtoluvun kertominen.

Koska murtolukuesitystä voidaan laventaa millä tahansa (nollasta eriävällä) kokonaisluvulla, jokaisella murtoluvulla on monta esitystapaa; esimerkiksi $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. Konkreettisemmin voidaan ajatella, että puolikas pizza ei vähene vaikka molemmat puolikkaat jaetaan edelleen kolmeen osaan.

Samannimiseksi laventaminen ja supistaminen

Mitä tahansa kahta murtolukua voidaan vertailla laventamalla (tai supistamalla) ne samannimisiksi siten, että yhteinen nimittäjä on positiivinen, ja sitten vertaamalla osoittajia.

MURTOLUKUJEN YHTeen- JA VÄHENNYSLASKU

Murtolukujen yhteenlasku, samat nimittäjät

Jos murtolukujen nimittäjät ovat samat, voidaan murtoluvut laskea yhteen laskemalla osoittajat yhteen.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

, missä $c \neq 0$

Jos yhteenlaskettavilla murtoluvuilla on eri nimittäjät, murtoluvut lavennetaan ensin samannimisiksi ja sitten osoittajat lasketaan yhteen. Jos siis $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ ovat murtolukuja (missä $b \neq 0$ ja $d \neq 0$), lasketaan

Murtolukujen yhteenlasku, eri nimittäjät

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Tässä $\frac{a}{b}$ lavennetaan luvulla d ja $\frac{c}{d}$ lavennetaan luvulla b . Nyt saadaan kaksi samannimistä murtolukua, joiden kummankin nimittäjäksi tulee yhteenlaskettavien nimittäjien tulo bd .

Yllä esitetty menettely, missä murtoluvut on lavennettu toistensa nimittäjillä toimii aina, mutta toisinaan pelkästään toisen murtoluvun laventaminen tai supistaminen riittää.

ESIMERKKI 1.22

 Laske

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6}.$$

Ratkaisu. Lavennetaan nimittäjät samannimisiksi ja lasketaan osoittajat yhteen.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} &= \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \\ &= \frac{3}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \\ &= \frac{3+1+2}{6} \\ &= \frac{6}{6} = 1.\end{aligned}$$

ESIMERKKI 1.23

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6} + \frac{9}{6} = \frac{10}{6} = \frac{\cancel{2} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot 3} = \frac{5}{3}$$

Kaikki rationaaliluvut voidaan esittää murtolukumuodossa, mutta myöskökonaisluvut voidaan esittää murtolukuina asettamalla murtoluvun nimittäjäksi yksi. Tätä voidaan käyttää, kun lasketaan yhteen kokonaislukuja ja murtolukuja.

ESIMERKKI 1.24

Laske

$$2 + \frac{1}{3}.$$

Ratkaisu. Kirjoitetaan lausekkeen kokonaisluku 2 murtolukuna, minkä jälkeen murtoluvut voidaan laventaa samannimisiksi ja laskea yhteen:

$$\begin{aligned}2 + \frac{1}{3} &= \frac{2}{1} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 1} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{6+1}{3} \\ &= \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

Murtolukujen vähennyslasku toimii periaatteessa samalla tavalla kuin yhteenlasku-kin (vähennyslasku määriteltiin vastaluvun lisäämisenä). Ensin lavennetaan samannimisiksi, sitten suoritetaan vähennyslasku osoittajassa.

ESIMERKKI 1.25

Laske

$$2\frac{2}{3} - \frac{3}{7}$$

ja anna vastaus sekamurtolukuna.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} 2\frac{2}{3} - \frac{3}{7} &= 2 + \frac{2}{3} - \frac{3}{7} \\ &= \frac{2}{1} + \frac{2}{3} - \frac{3}{7} \\ &= \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3} - \frac{3}{7} \\ &= \frac{6}{3} + \frac{2}{3} - \frac{3}{7} \\ &= \frac{6+2}{3} - \frac{3}{7} \\ &= \frac{8}{3} - \frac{3}{7} \\ &= \frac{8 \cdot 7}{3 \cdot 7} - \frac{3 \cdot 3}{7 \cdot 3} \\ &= \frac{56}{21} - \frac{9}{21} \\ &= \frac{56-9}{21} \\ &= \frac{47}{21} \\ &= \frac{42+5}{21} \\ &= \frac{2 \cdot 21 + 5}{21} \\ &= \frac{2 \cdot 21}{21} + \frac{5}{21} \\ &= \frac{2}{1} + \frac{5}{21} \\ &= 2 + \frac{5}{21} \\ &= 2\frac{5}{21} \end{aligned}$$

sekalukuesitys murtoluvuksi

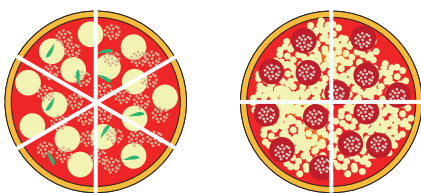
(Koska vastaus pyydettiin sekamurtolukuna, ei kokonaisosaa llopulta olisi tarvinnutkaan muuttaa murtolukumuotoon.)

Vastaus.

$$2\frac{5}{21}$$

ESIMERKKI 1.26

Mozzarellapizza jaetaan kuuteen ja salamipizza neljään yhtä suureen siivuun. Minttu saa kaksi siivua mozzarellapizzaa ja yhden siivun salamipizzaa. Vesa saa kaksi siivua salamipizzaa. Kumpi saa enemmän pizzaa, jos molemmat pizzat ovat saman kokoisia?



Ratkaisu. Pizzan kokonaismäärän vertailua varten luvut on lavennettava samannimisiksi. Yhteiseksi nimittäjäksi tarvitaan luku, joka on jaollinen sekä kuudella että neljällä. Huomataan, että $12 = 3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$. Murtolukujen nimittäjään tarvitaan siis luku 12. Mintun saama määrä pizzaa on

$$\begin{aligned}\frac{2}{6} + \frac{1}{4} &= \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 6} + \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 4} \\ &= \frac{4}{12} + \frac{3}{12} \\ &= \frac{7}{12}.\end{aligned}$$

Vesan saama määrä pizzaa on

$$\frac{2}{4} = \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12}.$$

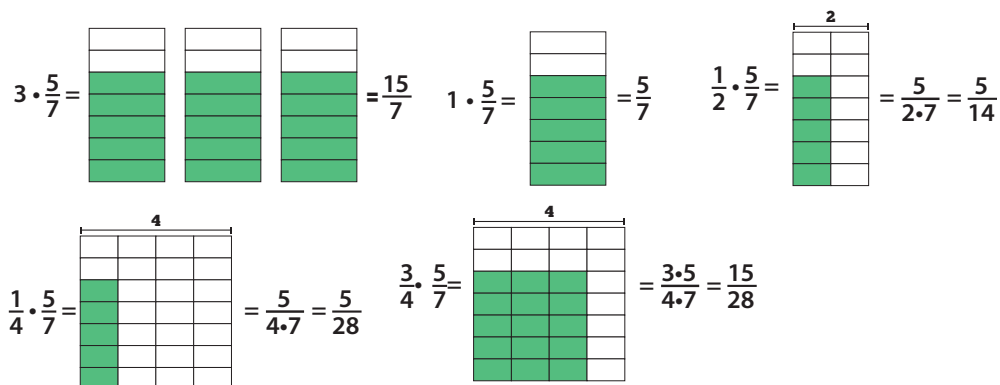
Vastaus. Koska $6/12 < 7/12$, Minttu saa enemmän.

MURTOLUKUJEN KERTOLASKU

Murtolukujen kertolasku

Murtolukujen $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ ($b \neq 0$ ja $d \neq 0$) tulo lasketaan kertomalla lukujen osoittajat ja nimittäjät keskenään:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$



ESIMERKKI 1.27

Laske

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5}$$

Ratkaisu. Murtolukujen kertolaskussa tekijöitä ei tarvitse laventaa samannimisiksi. Osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät kerrotaan keskenään:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

Vastaus. $\frac{9}{10}$

MURTOLUKUJEN JAKOLASKU

Käänteisluku

Luvun a **käänteisluku** on sellainen luku b , joka kerrottuna luvulla a on yksi, $ab = 1$.

Rationaaliluvun a käänteisluku on $\frac{1}{a}$ ($a \neq 0$), sillä

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

Vastaavasti rationaaliluvun $\frac{a}{b}$ käänteisluku on $\frac{b}{a}$ ($a \neq 0$ ja $b \neq 0$), sillä

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

ESIMERKKI 1.28

Luvun 5 käänteisluku on $\frac{1}{5}$, koska

$$5 \cdot \frac{1}{5} = 1.$$

Vastaavasti luvun $-\frac{2}{3}$ käänteisluku on $-\frac{3}{2}$, koska

$$-\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 1.$$

Käänteislukua tarvitaan muun muassa murtolukujen jakolaskuissa.

ESIMERKKI 1.29

Murtolukujen jakolasku. Laske $\frac{3}{5} : \frac{2}{7}$.

Ratkaisu. Jakolaskun määritelmän mukaan osamäärän tulisi olla sellainen luku, joka kerrottuna jakajalla antaa tulokseksi jaettavan. Jos merkitään laskun $\frac{3}{5} : \frac{2}{7}$ vastausta kirjaimella x , pitää siis olla $x \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{5}$. Tätä yhtälöä kutsutaan jakolaskun $\frac{3}{5} : \frac{2}{7}$ **jakoyhtälöksi**.

Kerrotaan jakoyhtälön molemmat puolet luvun $\frac{2}{7}$ käänteisluvulla $\frac{7}{2}$. Koska käänteislukujen tulo on 1, saadaan

$$\text{vasen puoli} = x \cdot \underbrace{\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2}}_{=1} = x \quad \text{ja} \quad \text{oikea puoli} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2}.$$

Kun yhtälön molemmat puolet kerrotaan samalla luvulla, ovat myös näin saadut luvut yhtä suuria. Siis on saatu

$$x = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2}.$$

Koska x :llä merkittiin alkuperäistä jakolaskua, on nyt onnistuttu muuttamaan jakolasku kertolaskuksi:

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 2} = \frac{21}{10} = 2\frac{1}{10}.$$

Murtolukujen jakolasku

Olkkoon $b \neq 0$, $c \neq 0$ ja $d \neq 0$. Murtolukujen osamäärä $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ lasketaan kertomalla jaettava jakajan käänteisluvulla:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

MURTOLAUSEKKEIDEN SIEVENTÄMINEN

Yhteiseksi tekijäksi ottaminen

Jos murtoluvun osoittajassa tai nimittäjässä on summa, jonka osilla on yhteinen tekijä, sen voi ottaa *yhteiseksi tekijäksi* sulkujen eteen. Jos osoittajassa ja nimittäjässä on sen jälkeen sama kerroin, sen voi jakaa pois molemmista eli *supistaa* pois.

$$\frac{ac + bc}{c} = \frac{\cancel{c}(a + b)}{\cancel{c}} = a + b \quad (1.1)$$

Joskus murtolauseke sieventyy, jos sen esittääkin kahden murtoluvun summana.

$$\frac{ca + b}{c} = \frac{ca}{c} + \frac{b}{c} = a + \frac{b}{c} \quad (1.2)$$

Kun jakaa kolme erikokoista nallekarkkipussia (a , b ja c) tasan kolmen ihmisen kesken, on sama, laittaako kaikki ensin samaan kulhoon ja jakaa ne sitten ($\frac{a+b+c}{3}$) vai jakaako jokaisen pussin erikseen ($\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3}$).

Jos taas samat kolme henkilöä jakavat keskenään pussin tikkareita (6 kpl) ja yhden pussin nallekarkkeja (n kpl), niin saadaan seuraavanlainen lasku: $\frac{6 \text{ tikkaria} + n \text{ nallekarkkia}}{3} = \frac{6 \text{ tikkaria}}{3} + \frac{n \text{ nallekarkkia}}{3} = \frac{\cancel{3} \cdot 2 \text{ tikkaria}}{\cancel{3}} + \frac{n \text{ nallekarkkia}}{3} = 2 \text{ tikkaria} + \frac{n \text{ nallekarkkia}}{3}$. Toisin sanoen, kukin saa kaksi tikkaria ja kuinka paljon ikinä onkaan kolmasosa kaikista nallekarkeista.

Tehtäviä

Opi perusteet

35. Supista niin pitkälle kuin mahdollista.

a) $\frac{15}{20}$

b) $\frac{27}{30}$

c) $\frac{2}{32}$

d) $\frac{65}{105}$

e) $\frac{144}{243}$

36. Lavenna samannimisiksi

a) $\frac{2}{3}$ ja $\frac{4}{5}$

b) $\frac{5a}{6}$ ja $\frac{7b}{9}$

c) $\frac{2}{3a}$ ja $\frac{5b}{2}$.

37. Laske

a) $\frac{3}{11} + \frac{5}{11}$

b) $\frac{4}{5} - \frac{1}{5}$

c) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6}$

d) $\frac{11}{12} - \frac{5}{6} + \frac{3}{2}$.

38. Esitä sekamurtolukuna

a) $\frac{15}{2}$

b) $\frac{177}{16}$

c) $\frac{2\,013}{15}$.

39. Muunna murtoluvuksi

a) $3\frac{2}{5}$

b) $4\frac{1}{34}$

c) $2\frac{6}{3\,145}$.

40. Laske

a) $1\frac{2}{9} + \frac{5}{9}$

b) $\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3}$

c) $2 + \frac{5}{4} + 3\frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{2} + 1 - \frac{5}{6}$.

41. Laske

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$

b) $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4}$

c) $2 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot 10$.

42. Laske

a) $\frac{2}{3} : \frac{7}{11}$

b) $\frac{4}{3} : \left(\frac{-13}{4}\right)$

c) $\frac{7}{8} : 4$

d) $\frac{1}{\frac{3}{7} - \frac{9}{21}}$.

43. Aseta luvut suuruusjärjestykseen

a) $\frac{-15}{11}, \frac{-19}{9}, \frac{11}{12}, \frac{3}{4}, -7$

b) $\frac{15}{21}, \frac{7}{-3}, \frac{-3}{-4}, \frac{8}{9}, \frac{5}{-2}$.

44. Laske luvun $\frac{3}{4}$

a) vastaluku

b) käänteisluku

c) vastaluvun vastaluku

d) vastaluvun käänteisluku

e) käänteisluvun vastaluku

f) käänteisluvun käänteisluku.

g) Mitkä tehtävän luvuista ovat samoja kuin alkuperäinen luku? Miksi?

h) Mitkä tehtävän luvuista ovat samoja keskenään? Miksi?

45. Laske lukujen $\frac{5}{4}$ ja $\frac{1}{8}$

a) vastalukujen summa

b) käänteislukujen summa

c) summan vastaluku

d) summan käänteisluku

Huomioi, mitkä luvuista ovat samoja.

Hallitse kokonaisuus

46. Laske murtolukujen $\frac{5}{6}$ ja $-\frac{2}{15}$

a) summa b) erotus c) tulo
d) osamäärä.

47. Laske a) $\frac{5}{8} \cdot (\frac{3}{5} + \frac{2}{5})$ b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{5}$.

48. Supista a) $\frac{12a+2ab}{4a}$ b) $\frac{a \cdot a \cdot (3b)}{3a}$.

49. Laske a) $\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{3}}$ b) $\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{6} - \frac{7}{12}}$.

50. Millä luvun x arvolla lukujen

a) x ja $\frac{3}{8}$ tulo on 0?

b) x ja $\frac{3}{8}$ tulo on 1?

c) x , $\frac{7}{91}$ ja $\frac{23}{2}$ tulo on 1?

51. Laatikossa on palloja, joista kolmasosa on mustia, neljäsosa valkoisia ja viidesosa harmaita. Loput palloista ovat punaisia. Kuinka suuri osuus palloista on punaisia?

52. Eräässä pitkän matematiikan ensimmäisen kurssin ryhmässä on 16 opiskelijaa. Heistä 8 on tyttöjä ja tytöistä neljänneksellä on siniset silmät. Kuinka suuri osa luokan oppilaista on sinisilmäisiä tyttöjä?

53. Laske lausekkeen $\frac{x}{2-3x}$ arvo, kun x on

a) 4

b) $-\frac{1}{2}$

c) $\frac{7}{10}$.

54. Selvitä, millä nolasta poikkeavilla luvuilla on se ominaisuus, että luvun vastaluvun käänteisluku on yhtä suuri kuin luvun käänteisluvun vastaluku.

Lisää tehtäviä

55. Laske lausekkeen $\frac{x+y}{2x-y}$ arvo, kun

a) $x = \frac{1}{2}$ ja $y = \frac{1}{4}$

b) $x = \frac{1}{4}$ ja $y = -\frac{3}{8}$.

56. Laske

a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$

b) $\frac{5}{7} + \frac{4}{7}$

c) $2 + \frac{2}{3}$

d) $3 + \frac{3}{5} + \frac{2}{5}$.

57. a) $\frac{6}{2} + \frac{3}{5}$

b) $\frac{7}{8} - \frac{1}{4}$

c) $2\frac{1}{3} + \frac{4}{6}$

d) $4\frac{7}{2} - 6\frac{5}{4}$

58. a) $2 \cdot \frac{2}{5}$

b) $2 \cdot \frac{2}{3}$

c) $\frac{5}{4} \cdot 2 \cdot 3$

d) $\frac{3}{4}$

59. a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5}$

b) $\frac{5}{4} \cdot (-\frac{2}{3})$

c) $\frac{2}{5}(2 - \frac{3}{4})$

d) $(\frac{5}{6} - \frac{1}{3})(\frac{7}{4} - \frac{3}{2})$

60. a) $\frac{\frac{3}{7} + \frac{5}{4}}{3}$

b) $\frac{\frac{10}{8}}{\frac{5}{2}}$

c) $\frac{\frac{1}{3} - \frac{5}{10}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}$

d) $3\frac{\frac{4}{2} + \frac{10}{4}}{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}$

61. a) $\frac{4}{9} : \frac{1}{5}$

b) $\frac{2}{7} : \frac{5}{9}$

c) $\frac{2}{3} : \frac{4}{3}$

62. Laske $\frac{10}{9} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}$.

63. Mira, Pontus, Jarkko-Kaaleppi ja Milla leipoivat lanttuvompattiipirakkaa. Pontus kuitenkin söi piirakasta kolmanneksen ennen muita, ja loput piirakasta jaettiin muiden kanssa tasan. Kuinka suuren osan muut saivat?

64. Huvipuiston sisäänpääsylippu maksaa 20 euroa, ja lapset pääsevät sisään puoleen hintaan.

a) Kuinka paljon kolmen lapsen yksinhuoltajaperheelle maksaa päästä sisään?

b) Kuinka paljon sisäänpääsy maksaa perheelle avajaispäivänä, kun silloin sisään pääsee neljänneksen (25 %) halvemmalla?

65. Eräässä kaupassa on käynnissä loppuunmyynti, ja kaikki tuotteet myydään puoleen hintaan. Lisäksi kanta-asiakkaat saavat aina viidenneksen alennusta ostokistaan. Paljonko kanta-asiakas maksaa nyt tuotteesta, joka normaalisti maksaisi 40 euroa?

66. Kokonaisesta kakusta syödään maanantaina iltapäivällä puolet, ja jäljelle jääneestä palasta syödään tiistaina iltapäivällä taas puolet. Jos kakun jakamista ja syömistä jatketaan samalla tavalla koko viikko, kuinka suuri osa alkuperäisestä kakusta on jäljellä seuraavana maanantaiaamuna?

67. Laske lausekkeen $\frac{1}{n} - \frac{1}{m}$ arvo, kun tiedetään, että $n = \frac{1}{9}$ ja $m = n + 1$.

68. Tarkastellaan lukuja $\frac{3+a}{a}$ ja $\frac{\frac{5}{3}+a}{a}$. Kumpi luvuista on suurempi, kun a on kokonaisluku ja suurempi tai yhtäsuuri kuin 1?

69. Laske lausekkeen $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n}$ arvo, kun tiedetään, että $n = 10$.

70. Määritä nollasta poikkeavien rationaalilukujen r ja s käänteislukujen summan käänteisluku. Minkä arvon saat, jos $r = \frac{2}{3}$ ja $s = 3$?

71. ★

a) Jos n on positiivinen kokonaisluku, laske lukujen n ja $(n+1)$ käänteislukujen erotus.

b) Laske summa $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$.

72. ★ Määritä ne positiiviset reaaliluvut x , jotka ovat käänteislukuaan $\frac{1}{x}$ suurempia.

73. ★ Sievennä

a) $a + b \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{\frac{b}{c}}{\frac{ab}{c}}$

b) $\frac{208ab+52b+26b(\frac{a}{26}-\frac{6a}{3a})-ab}{-42ab+52b+42ba}$.

74. ★ Vanhalla matemaatikolla on kolme lasta. Eräänä päivänä hän antaa lapsilleen laatikollisen vuosien varrella ongelmanratkaisukilpailuista voitettuja palkintoja. Hän kertoo antavansa vanhimmalle lapselleen puolet saamistaan arvoesineistä, keskimmaiselle neljäsosan ja nuorimmalle kuudesosan. Laatikossa on kuitenkin vain 11 palkintoa. Miten palkinnot jaetaan ja kuinka monta arvoesineettä matemaatikko pitää itsellään?

75. ★ Fibonaccin luvut 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... määritellään seuraavasti: Kaksi ensimmäistä Fibonaccin lukua ovat 0 ja 1, ja siitä seuraavat saadaan kahden edellisen summana: $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$ ja niin edelleen. Tutki, miten Fibonaccin luvut liittyvät lukuihin $\frac{1}{1+1}$, $\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}$, $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}$, $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}$, ...

76. Sievennä ryhmittelemällä.

a) $2x^2 + 3x + 5x^2$

b) $x^2 + 3x^3 + x^2 + x^3 + 2x^2$

c) $ax^2 + bx + cx$

d) $ax^3 + bx + cy^3 + dx + ey^3 + fx^3$

77. Sievennä.

a) $\frac{1-x}{3} + \frac{x-2}{6}$

b) $\frac{5x-1}{3} - \frac{2x+5}{2}$

c) $\frac{x}{6y} \cdot \frac{3y}{2}$

78. ★ Sievennä $(2ab + 4b^2 - 8b^3c) : (a + 2b - 4b^2c)$.

1.6 Potenssi

Jos a on rationaaliluku ja n on positiivinen kokonaisluku, potenssimerkintää a^n käytetään lyhennysmerkintänä tulolle

Potenssi

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kpl}}$$

Lukua a kutsutaan potenssin **kantaluvuksi** ja lukua n **eksponentiksi**. Merkinnällä 2^4 siis tarkoitetaan tuloa

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

Luvun toista potenssia a^2 kutsutaan myös luvun a **neliöksi** ja kolmatta potenssia a^3 sen **kuutioksi**. Nimitysten taustalla on, että luvun $a > 0$ neliö on sellaisen neliön pinta-ala, jonka sivun pituus on a . Vastaavasti, jos kuution särmän pituus on a , on a^3 kyseisen kuution tilavuus. Luvun ensimmäinen potenssi on luku itse eli $a^1 = a$.

Laskimissa ja tietokoneohjelmissa potenssiinkorottamisen symbolina käytetään usein sirkumfleksimerkkiä $^$.

ESIMERKKI 1.30

Sievennä lausekkeet.

a) 3^4

b) $xxx \cdot x$

c) $x(x + 1)$

d) $x^3(2x - 1)$

Ratkaisu. a) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 9 = 81$ (potenssin määritelmä)

b) $xxx \cdot x = x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$ (potenssin määritelmä)

c) $x(x+1) = x \cdot x + x \cdot 1 = x^2 + x$ (osittelulaki ja potenssin määritelmä)

d) $x^3(2x-1) = x^3 \cdot 2x - x^3 \cdot 1 = x \cdot x \cdot x \cdot 2x - x^3 = 2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x - x^3 = 2x^4 - x^3$
(osittelulaki ja potenssin määritelmä)

Vastaus. a) 81

b) x^4

c) $x^2 + x$

d) $2x^4 - x^3$

Laskujärjestys

Potenssi on määritelmänsä perusteella toistuvaa kertolaskua. Potenssin arvo tulee kuitenkin laskea ennen yhdistämistä mahdollisiin lausekkeen muihin kerto- ja jakolaskuihin. (Sulut lasketaan kuitenkin aina ensimmäisenä.)

ESIMERKKI 1.31

Tarkkaile laskujärjestystä

a) $1 + 2 \cdot 5^2 = 1 + 2 \cdot (5 \cdot 5) = 1 + 2 \cdot 25 = 51$

b) $2 \cdot 4^3 = 2 \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4) = 2 \cdot 64 = 128$

c) $1 + 3^2 = 1 + 3 \cdot 3 = 10$

d) $(1 + 3)^2 = 4^2 = 16.$

Mikäli potensseja on monta päällekkäin (eli eksponenttina on potenssilauseke), laskeminen aloitetaan ylimmästä, ”uloimmasta” potenssista.

ESIMERKKI 1.32

a) $2^{3^2} = 2^9 = 512$

b) $(2^3)^2 = 8^2 = 64$

Monesti tulee tarpeeseen sieventää yksittäisiä lukuja monimutkaisempien lausekkeiden potensseja. Tämä tapahtuu potenssin määritelmällä ja osittelulailla.

ESIMERKKI 1.33

Avataan sulut lausekkeesta $(x + 2)^2$:

$(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2)$	potenssin määritelmä
$= (x + 2)x + (x + 2)2$	osittelulaki
$= x(x + 2) + 2(x + 2)$	vaihdantalaki
$= xx + x2 + 2x + 2 \cdot 2$	osittelulaki
$= x^2 + 2x + 2x + 4$	potenssin määritelmä ja vaihdatalaki
$= x^2 + 4x + 4$	osittelulaki ja summa

NEGATIIVINEN KANTALUKU

Jos kantaluku on negatiivinen, sen ympärille merkitään aina sulkeet.

ESIMERKKI 1.34

$$(-2)^4 = -2 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$

Merkinnässä -2^4 puolestaan potenssin kantaluku on 2. Koska $2^4 = 16$, $-2^4 = -16$. Kerralla laskettuna: $-2^4 = -(2^4) = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$

Negatiivisella kantaluvulla laskettaessa ei ole mitään erityistä.

ESIMERKKI 1.35

- a) $(-5)^2 = -5 \cdot (-5) = 25$
- b) $-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$
- c) $10 - 5^2 = 10 - 25 = -15$
- d) $10 + (-5)^2 = 10 + 25 = 35$.

Huomaa seuraavat potenssien etumerkkeihin liittyvät ominaisuudet.

Potenssien etumerkit

- $x^a = 0$ kun $x = 0$ ja $a \neq 0$
- Kun eksponentti a on pariton kokonaisluku, niin tuloksen etumerkki on sama, kuin kantaluvun etumerkki.
- Jos eksponentti on taas parillinen, on tulos aina positiivinen. Siis, kun a on

parillinen kokonaisluku, niin $x^a \geq 0$.

- $x^a \geq 0$ kun $x \geq 0$

- $x^a \leq 0$ kun $x \leq 0$

Parillinen potenssi on negatiivisellakin kantaluvulla positiivinen siksi koska tulossa on negatiivisia kertoimia parillinen määrä. Tällöin miinukset kumoavat toisensa, olipa kantaluku mikä tahansa. Esimerkiksi $(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 = 1$

Kun negatiivinen kantaluku korotetaan parittomaan potenssiin, tulee kertoimia pariton määrä, jolloin tulos on negatiivinen. [ESIMERKKI 1.36](#)

■ $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 4 \cdot 4 \cdot (-2) = 16 \cdot (-2) = -32$

ESIMERKKI 1.37

Koska parilliseen potenssin korottamisessa saadaan lopputulos sekä luvulla että sen vastaluvulla, lausekkeiden $(x - y)^2$ ja $(y - x)^2$ tulisi olla samat. Todetaan tämä avaamalla ensin ensimmäisestä lausekkeesta sulkeet potenssin määritelmän ja osittelulain avulla:

$(x - y)^2 = (x - y)(x - y)$	potenssin määritelmä
$= (x - y)x - (x - y)y$	osittelulaki
$= x(x - y) - y(x - y)$	vaihdantalaki
$= xx - xy - yx + y \cdot y$	osittelulaki
$= x^2 - xy - xy + y^2$	potenssin määritelmä ja vaihdantalaki
$= x^2 - 2xy + y^2$	osittelulaki ja summa

Huomataan, että avatussa muodossa x ja y esiintyvät symmetrisesti, ts. niiden paikkoja voi vaihtaa vaikuttamatta lausekkeen arvoon:

$x^2 - 2xy + y^2 = y^2 - 2xy + x^2$	yhteenlaskun vaihdannaisuus
$= y^2 - 2yx + x^2$	kertolaskun vaihdannaisuus

Tämä on täsmälleen myös se muoto, johon päädytään, jos avattaisiin sulut ja sievennettäisiin lauske $(y - x)^2$. Siis $(x - y)^2 = (y - x)^2$.

POTENSSIEN LASKUSÄÄNNÖT

Potenssilausekkeita voi usein sieventää paljonkin, vaikka kantaluku olisi tuntematon. Tässä esimerkkejä.

Samankantaisten potenssien kertolasku

$$a^3 \cdot a^4 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3 \text{ kpl}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{4 \text{ kpl}} = a^{3+4} = a^7$$

Samankantaisten potenssien jakolasku

$$\frac{a^7}{a^4} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^{7-4} = a^3$$

Potenssin potenssi

$$(a^2)^3 = \underbrace{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}_{3 \text{ kpl}} = \underbrace{(a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a)}_{2 \cdot 3 = 6 \text{ kpl}} = a^{2 \cdot 3} = a^6$$

Tulon potenssi

$$(ab^5)^3 = ab^5 \cdot ab^5 \cdot ab^5 = a \cdot a \cdot a \cdot b^5 \cdot b^5 \cdot b^5 = a^{1 \cdot 3} \cdot b^{5 \cdot 3} = a^3 b^{15}$$

Osamäärän potenssi

$$\left(\frac{a^9}{b^7}\right)^3 = \frac{a^9}{b^7} \cdot \frac{a^9}{b^7} \cdot \frac{a^9}{b^7} = \frac{a^9 \cdot a^9 \cdot a^9}{b^7 \cdot b^7 \cdot b^7} = \frac{a^{9 \cdot 3}}{b^{7 \cdot 3}} = \frac{a^{27}}{b^{21}}$$

Edellä esitetyt ideat voi yleistää potenssien laskusäännöiksi:

Potenssien laskusääntöjä

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	Samakantaisten potenssien tulo
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Samakantaisten potenssien osamäärä ($a \neq 0$)
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	Potenssin potenssi
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	Tulon potenssi
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	Osamäärän potenssi ($b \neq 0$)

ESIMERKKI 1.38

Lasketaan potenssien laskusääntöjen avulla

a) $a^3 \cdot a^2 = a^{2+3} = a^5$

b) $(a^3)^2 = a^{2 \cdot 3} = a^6$

c) $\frac{7^9}{7^7} = 7^{9-7} = 7^2 = 49$

d) $(ab)^5 = a^5 b^5$.

NOLLA JA NEGATIIVINEN LUKU EKSPONENTTINA

EkspONENTTimerkintää voidaan laajentaa myös tapauksiin, joissa eksponentti on negatiivinen tai nolla, kunhan määritellään järkevästi, mitä sillä tarkoitetaan. Oletetaan seuraavissa päättelyissä, että $a \neq 0$. Silloin voimme jakaa luvulla a .

Potenssin a^0 voi määritellä vain yhdellä tavalla, jos halutaan potenssien laskusääntöjen pätevän sillekin. Lasketaan $\frac{a^3}{a^3}$ kahdella eri tavalla:

$$\frac{a^3}{a^3} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = 1,$$

toisaalta

$$\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0.$$

Siis $a^0 = 1$, kunhan $a \neq 0$. Laskua 0^0 ei ole määritelty, koska nollalla ei voi jakaa.

EkspONENTTina nolla

Kun $a \neq 0$,

$$a^0 = 1$$

ESIMERKKI 1.39

Laske

a) $7^0 = 1$

b) $(-556)^0 = 1$

Sievennetään sitten osamäärä $\frac{a^3}{a^5}$ kahdella eri tavalla. Supistamalla yhteiset tekijät saadaan lopputulos

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = \frac{1}{a \cdot a} = \frac{1}{a^2}.$$

Potenssien laskusääntöjä käyttämällä saataisiin

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}.$$

Samasta laskusta saatiin kaksi eri tulosta, joten on johdonmukaista määritellä

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}.$$

Sama ajatus yleistyy: koska potenssien laskusääntöjen halutaan pätevän myös negatiivisille eksponenteille, ne voidaan määritellä vain yhdellä tavalla:

Negatiivinen eksponentti

Kun $a \neq 0$,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Erityisesti $a^{-1} = \frac{1}{a}$ kaikilla $a \neq 0$, eli miinus yksi eksponenttina tarkoittaa käänteislukua.

ESIMERKKI 1.40

a) $4^{-1} = \frac{1}{4^1} = \frac{1}{4}$

b) $8^{-1} = \frac{1}{8^1} = \frac{1}{8}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 : \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

d) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{5}$

$$\text{e) } 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\text{f) } \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16}$$

$$\text{g) } (-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{h) } 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

ESIMERKKI 1.41

Jos taulukoidaan esimerkiksi luvun 2 potensseja, huomataan että yhtä pienempi potenssi tarkoittaa aina sitä, että luku on *puolet* edellisestä. Vähenevä ja lopulta negatiivinen eksponentti voidaan siis tulkita toistuvana *jakamisena* potenssin alkuperäisen naiivin määritelmän mukaan, joka intuitiivisesti tarkoitti toistuvaa kertolaskua. Alla olevassa taulukossa on muutamien lukujen potensseja:

Kantaluku	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1	a^2	a^3
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
3	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
4	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16	64
$\frac{1}{3}$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
-2	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	1	-2	4	-8

Ilmiötä, jossa alunperin intuitiivinen merkintätapa yleistetään mahdollisimman laajakäyttöiseksi, kutsutaan **analyttiseksi jatkamiseksi**. Tämä on matematiikassa hyvin yleistä ja vastaa pyrkimyksiä esittää asiat mahdollisimman yleisesti. Potenssimerkintää laajennetaan vieläkin yleisemmäksi luvussa Murtopotenssi.

Tehtäviä

Opi perusteet

79. Mikä seuraavissa potenssimerkinnöissä on kantaluku, eksponentti ja potenssin arvo?

- a) 5^3
- b) 2^5
- c) 9
- d) 1
- e) $(-4)^3$
- f) $(-1)^{10}$
- g) 6^{-2}

80. Esitä potenssin avulla

- a) $a \cdot a \cdot a$
- b) $a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$
- c) $a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a$.

81. Sievennä lausekkeet.

- a) $a^2 \cdot a^3$
- b) $(a^2)^3$
- c) $\frac{a^7}{a^5}$
- d) a^0
- e) $a^3 \cdot a^2 \cdot a^5$
- f) $(a^2 a^3)^4$

82. Laske

- a) $2^3 \cdot 2^3$
- b) 4^3
- c) $(2^2)^3$
- d) 2^{2+2+2} .

83. Laske

- a) 2^4
- b) $(-2)^4$
- c) -2^4 .

84. Laske

- a) -7^2
- b) $(-7)^2$
- c) 7^{-2}
- d) $(-7)^{-2}$.

85. Kirjoita murtolukuna

- a) 3^{-1}
- b) 5^{-2}
- c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$
- d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$.

86. Sievennä

- a) $b^3(ab^0)^2$
- b) $(ab^3)^0$
- c) $(aa^4)^3 a^2$.

87. Laske.

a) $\frac{a^3}{a^2}$

b) $\frac{b^4}{b^2}$

c) $\frac{c^3}{c^1}$

d) $\frac{d^3}{d^0}$

e) $\frac{e^3}{e^4}$

f) $\frac{f^3}{f^5}$

g) $\frac{k^3}{k^{-5}}$

88. Esitä lausekkeet sievennettynä ilman sulkeita.

a) $x^2(x - 1)$

b) $k^3(k^2 - 3k)$

c) $t^{100}(\frac{1}{t^{98}} - t^2 - 1)$

89. Sievennä.

a) $\frac{2x^3}{x}$

b) $\frac{3x^3y^2}{xy}$

c) $\frac{x^2yz}{xy^2}$

d) $\frac{6xy^3z^2}{2xz}$

Hallitse kokonaisuus

90. Sievennä

a) $(a^2)^{-2}$

b) $(ab^{-1})^3$

91. Sievennä

a) $\frac{10^{n+1}}{10 \cdot 10^n} \cdot 10^{-1}$

b) $\frac{125^3}{5^4}$

c) $\frac{2 \cdot 4^n}{4^2}$

d) $\frac{8^{2i}}{16^{-3}}$

92. Sievennä.

a) $\left(\frac{a^2b^{-2}}{a^2b}\right)^{-3}$

b) $\frac{5a^2}{-15a}$

c) $\left(-\left(\frac{10^3}{100b}\right)^2b^{-1}\right)^2$

93. Sievennä.

a) $a^2(-a^4)$

b) $(ab^2)^0$

c) $(3a)^3$

d) $(a^5b^3)^3$

94. Sievennä.

a) $\left(-\frac{ab^2}{a^2b}\right)^3$

b) $(-a^4b^4)^2$

c) $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^4\right)^2$

95. Esitä lausekkeet sievennettynä ilman sulkeita.

a) $(y - 1)(y + 1)$

b) $(2s^2 - 1)(1 - s)$

c) $(z^2 + 2)(z^2 + 2)$

96. Sievennä.

- a) $\frac{2x^5+3x^3}{x^2}$
- b) $\frac{6x^2+8y}{2x^2}$
- c) $\frac{3x-2x^2y^3}{xy}$
- d) $\frac{2x^2+3xy^2z-4xz}{2xy^2z}$

97. Pudotat pallon kädestäsi lattialle. Pallo pomppaa ensin metrin korkeudelle ja sen jälkeen jokaisen pompun korkeus on aina puolet edellisestä korkeudesta. Kuinka korkea on pallon 5. pomppu? Entä 13. pomppu?

98. Millä kokonaisluvun n arvoilla

- a) 2^n
- b) $(-3)^n$
- c) $(-1)^{n-1}$
- d) $(-1)^{n-1}(-2)^n$

on positiivinen?

99. Laske

- a) $\left(\frac{4}{8}\right)^{1543} 2^{1546}$
- b) $\left(\frac{28}{15}\right)^{214} \left(\frac{45}{98}\right)^{109} \left(\frac{5}{8}\right)^{105}$

100. Eukleides Aleksandrialainen oli kuuluisa, noin vuonna 300 eaa. elänyt kreikkalainen matemaatikko. Hän esitti *Alkeet*-kirjassaan kaavan täydellisten lukujen systemaattiselle laskemiselle (ks. luvun Jaollisuus tehtävät). Nykykielellä ilmaistuna se menisi seuraavasti:

$$\frac{p(p+1)}{2} \text{ on täydellinen luku, kun}$$

p on muotoa $2^n - 1$ oleva alkuluku.

Muotoa $2^n - 1$ olevia alkulukuja, missä todistettavasti välttämättäkin myös n on alkuluku, kutsutaan **Mersennen alkuluvuiksi**. Vastaa 1700-luvulla sveitsiläinen Euler todisti, että kaikki parilliset täydelliset luvut voidaan esittää kyseisessä muodossa.

a) Laske kaavan avulla kolmas yhtä suurempi täydellinen luku.

b) Osoita, että Eukleideen kaava on yhtäpitävä kaavan $2^{n-1}(2^n - 1)$ kanssa, missä $2^n - 1$ on Mersennen alkuluku.

Lisää tehtäviä

101. Ympyrän mallisen pöytäliinan halkaisija on 1,2 m. Mikä on pöytäliinan pinta-ala? Ympyrän pinta-ala A voidaan laskea kaavalla $A = \pi r^2$, missä r on pöytäliinan säde (eli puolet halkaisijasta).

102. Sievennä

- a) $(1 \cdot a)^3$
- b) $(a \cdot 2)^2$
- c) $(-2abc)^3$
- d) $(3a)^4$

103. Sievennä.

- a) $-a^3 \cdot (-a^2)$
- b) $a \cdot (-a) \cdot (-b)$
- c) $a^2 \cdot (-a^2)$

104. Sievennä.

- a) $(a^3 b^2)^2$
- b) $a(a^2 b^3)^4$
- c) $(b^2 a^4)^5$
- d) $b(2ab^2)^3$

105. Sievennä lausekkeet.

- a) $\frac{a^2 b^2}{ab}$
- b) $\frac{a^2 b}{a^2}$
- c) $\frac{a^3}{a^3}$
- d) $\frac{1}{a^0}$
- e) $\frac{ab^3}{-b^4}$

106. Sievennä ja kirjoita potenssiksi, jonka eksponentti on positiivinen

- a) a^{-3}
- b) $\frac{a}{a^3}$
- c) $a^{-2} \cdot a^5$
- d) $\frac{b}{a^4} b^{-4}$
- e) $\frac{a^3}{a^{-5}}$

107. a) a^0

- b) $a^0 a^0$
- c) aa^1
- d) aa^0
- e) $a^0 a^1$

108. Esitä ilman sulkuja ja sievennä.

- a) $(\frac{1}{2})^2$
- b) $(\frac{1}{3})^3$
- c) $(\frac{a}{b})^4$
- d) $(\frac{a^2}{b^3})^2$
- e) $(\frac{a^2}{ab^2})^2$

Laske tai sievennä.

109. a) $a^2 a^5$

- b) $\frac{a^5}{a^3}$
- c) $(a^3)^2$
- d) 12^0

110. a) $\frac{2^7}{2^9}$

- b) $\frac{a^3}{a}$
- c) $(\frac{1}{3})^2$
- d) $(\frac{a^{-2}}{ab^4})^4$

111. Sievennä

- a) $a^3 \cdot b^2 \cdot a^5$
- b) $(-ab^3)^2$
- c) $(a^5 a^4)^3$
- d) 10^{2^3}

112. Sievennä.

- a) $(-a) \cdot (-a)$
- b) $(-a) \cdot (-a) \cdot (-b)^3$
- c) $(-a^2) \cdot (-a)^2$

113. a) $a^2 \cdot a^3$

b) $a^3 a^2$

c) $a^2 a$

d) $aa^2 a$

e) $a^2 a^1 a^3$

114. Sievennä.

a) $a^1 aa^2$

b) $aaaa$

c) $a^3 ba^2$

d) $aba^0 ba^1$

115. Tarinan mukaan muuan intialainen ruhtinas pyysi erästä matemaatikkoa kehittämään uuden strategisen lautapelin ja luvannut hänelle pelin keksimisestä suuren palkkion. Tällöin matemaatikko keksi shakin. Ruhtinas ihastui peliin ja kysyi keksijältä, mitä tämä halusi palkkioksi. Keksijä pyysi palkkioksi niin monta vehnän jyvää kuin saadaan koko shakki-
laudalta, jos niitä asetetaan sen ensimmäiselle ruudulle yksi, toiselle ruudulle kaksi, kolmannelle neljä, neljännelle kahdeksan ja edelleen jokaiselle ruudulle kaksi kertaa niin monta kuin edelliselle ruudulle.

a) Kuinka monta vehnän jyvää tulee viidennelle ruudulle?

b) Kuinka monta vehnän jyvää viimeiselle ruudulle tulee?

c) Kuinka monta vehnän jyvää tulee n :nnelle ruudulle?

d) ★ Kuinka montaa vehnän jyvää keksijä pyysi yhteensä?

116. ★ Niin sanottu **tetraatio** on lyhennysmerkintä ”potenssitornille”, jossa esiintyy vain yhtä lukua. Se määritellään kaavalla

$${}^n a = \underbrace{a^{a^{\dots^a}}}_{n \text{ kpl}}.$$

Laske

a) ${}^4 2$

b) ${}^3 5$.

117. ★ Sievennä lauseke

$$\left[\frac{(a^2 b^{-2} c)^{-3} : (c^2 \cdot (ab^{-2})^0 \cdot a^{-4})}{((c^{-1} \cdot a^3)^{-1} : a^2)^3 (ab^2 c^{-3})^3} \right]^2.$$

118. ★ Kompleksilukujen niin sanottu **imaginääriyksikkö** i määritellään seuraavalla (kaikista reaalityyppisistä poikkeavalla) ominaisuudella:

$$i^2 = -1$$

Sievennä lausekkeet.

a) i^3

b) i^4

c) i^{4k+1} , missä k on kokonaisluku

d) $i^{1\,001}$

e) $\frac{1}{i}$

f) $(1+i)(1-i)$

g) $(x+iy)(x-iy)$, missä x ja y ovat mielivaltaisia reaalilukuja

1.7 Luvun desimaaliesitys

teoriaMurtolukujen lisäksi desimaaliluvut ovat tuttu tapa merkitä lukuja, jotka eivät ole kokonaislukuja. 123,456 on esimerkki desimaaliluvusta. Pilkun jälkeen tulevat numerot tarkoittavat kymmenesosia, sadasosia ja niin edelleen.

- a) 123 on sen **kokonaisosa**.
- b) Kokonaisluku erotetaan loppuosasta **desimaalierottimella**, joka on suomen kielessä pilkku (,)
- c) Osaa 456 kutsutaan luvun **desimaaliosaksi**.

Desimaaliluku

Esimerkkinä annettu desimaaliluku tulkitaan seuraavasti:

$$123,456 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}$$

$$\underbrace{1}_{1 \cdot 10^2} \underbrace{2}_{2 \cdot 10^1} \underbrace{3}_{3 \cdot 10^0}, \underbrace{4}_{4 \cdot 10^{-1}} \underbrace{5}_{5 \cdot 10^{-2}} \underbrace{6}_{6 \cdot 10^{-3}}$$

Kymmenjärjestelmä saa nimensä siitä, että jokainen luvussa esiintyvä numeromerkki kertoo sen paikkaa vastaavien kymmenen potenssien määrän.

Murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi

Murtoluku on tapa merkitä jakolaskua. Jakolaskun tuloksen esittämiseksi desimaalilukuna käytetään peruskoulun alaluokilla opetettavaa jakokulmaa. Jakokulman ajatus on yksinkertaisesti kokeilla, kuinka monta jakajaa, sen kymmenesosaa, sadasosaa ja niin edelleen jaettavaan mahtuu. Jakokulmat voi laskea käsin, laskin tekee saman nopeammin.

Muutetaan $\frac{21}{4}$ desimaaliluvuksi laskemalla jakolasku $21 : 4$ jakokulmassa.

$$\begin{array}{r|rrrr} & - & \underline{5} & \underline{2} & \underline{5} \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & \underline{2} & \underline{0} & & \\ & & 1 & 0 & \\ & \underline{-} & & \underline{8} & \\ & & & 2 & 0 \\ & & \underline{-} & \underline{2} & \underline{0} \\ & & & & 0 \end{array}$$

Vastaavasti laskien saadaan $\frac{3}{11} = 0,272727 \dots$:

$$\begin{array}{rcccccc}
& \underline{0}, & \underline{2} & \underline{7} & \underline{2} & \underline{\dots} \\
11 & | 3, & 0 & 0 & 0 & \dots \\
= & \underline{2} & \underline{2} & & & \\
& & 8 & 0 & & \\
= & \underline{7} & \underline{7} & & & \\
& & 3 & 0 & & \\
= & \underline{2} & \underline{2} & & & \\
& & 8 & 0 & & \\
& & & & & \ddots
\end{array}$$

$$0,27272727 \dots = 0,\overline{27}$$

ESIMERKKI 1.43

a) $\frac{5}{4} = 1,250000 \dots = 1,25\overline{0}$ merkitään 1,25

b) 001,25 merkitään 1,25

Huomaa, että matemaatikolle luvut 1,25 ja 1,250 tarkoittavat täsmälleen samaa asiaa. Sovelluksissa, joissa luvut eivät ole tarkkoja vain mittaustuloksia tai arvioita, esityksillä voi olla nyanssiero, joka kertoo mittauksen tarkkuudesta. Vastaustarkkuudesta ja pyöristämisestä kerrotaan lisää myöhemmin.

Toistuva nollien jakso on vain yksi esimerkki rationaalilukujen desimaaliesityksen vääjäämättömästä jaksollisuudesta.

Rationaalilukujen desimaaliesitykset

Kaikkien rationaalilukujen desimaaliesitykset ovat jaksollisia.

Vähennyslaskuissa syntyvät jakojäännökset ovat nimittäin aina jakajaa pienempiä, ja siksi ne alkavat väistämättä toistaa itseään, ellei jako jossakin vaiheessa mene tasan. Koska eri vaihtoehtoja jakojäännöksiksi on yksi jakajaa vähemmän, jakson pituus on suurimmillaan yhden verran jakajaa pienempi. Esimerkiksi luvulla $\frac{1}{7} = 0,14285\overline{7}$ jakso on pisin mahdollinen, $7 - 1 = 6$ numeron mittainen.

ESIMERKKI 1.44

Esimerkkejä murtolukujen desimaaliesityksistä

a) $\frac{1}{10} = 0,1$

b) $\frac{1}{100} = 0,01$

c) $\frac{1}{2} = 0,5$

d) $\frac{1}{4} = 0,25$

e) $\frac{3}{4} = 0,75$

Desimaaliluvun muuttaminen murtoluvuksi

Päättävät desimaaliluvut voidaan muuttaa murtoluvuiksi muuttamalla kukin desimaali erikseen murtoluvuksi ja laskemalla syntyneet luvut yhteen.

ESIMERKKI 1.45

$$21,37 = 21 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} = \frac{2100}{100} + \frac{30}{100} + \frac{7}{100} = \frac{2100+30+7}{100} = \frac{2137}{100}.$$

Tämä on turhan työlästä, ja paljon helpommalla päästäänkin laventamalla luku ”niin monella kympillä, kuin desimaalipilkun jälkeen on numeroita” – täsmällisemmin sanottuna laventamalla luvulla 10^n , jossa n on pilkun jälkeen tulevien numeroiden määrä.

ESIMERKKI 1.46

Luvussa 52,41 kaksi desimaalia (pienimpinä sadasosat), joten lavennetaan siis sadalla. ($100 = 10^2$) $52,41 = 52,41 \cdot \frac{100}{100} = \frac{52,41 \cdot 100}{100} = \frac{5\,241}{100}$

ESIMERKKI 1.47

$$0,007 = 0,007 \cdot 1 = 0,007 \cdot \frac{10^3}{10^3} = \frac{0,007 \cdot 1\,000}{1\,000} = \frac{7}{1\,000}$$

(Muista, että erilaisia murtolukuesityksiä on kuitenkin olemassa samalle luvulle ääretön määrä. Saattaa olla, että menetelmällä saatu murtoluku on vielä supistettavissa.)

Minkä tahansa **jaksollisen desimaaliluvun** voi muuttaa murtoluvuksi seuraavalla tempulla: Muutetaan esimerkiksi 0,575757 ... murtoluvuksi. Jos merkitään

$$\begin{aligned} x &= 0,575757 \dots, & \text{saadaan sadalla kertomalla} \\ 100x &= 57,575757 \dots, & \text{joiden erotuksena} \\ 100x - x &= 57,57 \dots - 0,57 \dots, & \text{eli} \\ 99x &= 57, & \text{josta saadaan} \\ x &= \frac{57}{99} = \frac{19}{33}. \end{aligned}$$

Siis $0,575757 \dots = \frac{19}{33}$. Menetelmä toimii kaikille jaksollisille desimaaliluvuille: kerrotaan vain sopivalla luvun 10 potenssilla, jotta jakso katoaa vähennyslaskussa.

Nämä kannattaa muistaa

- $\frac{1}{3} = 0,3333 \dots$
- $\frac{2}{3} = 0,6666 \dots$

Tehtäviä

119. Laske ja totea murtolukujen $\frac{1}{10} = 0,1$, $\frac{1}{100} = 0,01$, $\frac{1}{2} = 0,5$, $\frac{1}{4} = 0,25$, $\frac{3}{4} = 0,75$ desimaaliesitysten paikkansapitävyys.

120. Esitä murtolukuna a) 0,5 b) 0,333 ... c) 1,234 d) -0,2.

121. Esitä desimaalilukuna

a) $-\frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{12}{20}$ d) $-1\frac{1}{6}$.

122. Muuta murtolukumuotoon

a) 43,532

b) 5,031

c) 0,23

d) 0,3002

e) 0,101.

123. Muuta murtolukumuotoon ja sievennä

a) 0,01

b) 0,0245

c) 0,004

d) 0,001004.

124. Muuta murtolukumuotoon

a) 0,77777 ...

b) 0,151515 ...

c) $2,05\overline{631}$

d) 0,99999

125. Muuta desimaaliluvuksi

a) $\frac{151}{250}$

b) $\frac{251}{625}$

c) $\frac{386}{1\,250}$

d) $\frac{493}{500}$.

126. Muuta murtoluvuksi

a) $0,\overline{649}$

b) $0,\overline{2154}$.

127. Muuta desimaaliluvuksi

a) $\frac{42}{11}$

b) $\frac{37}{13}$

c) $\frac{38}{99}$

d) $\frac{14}{15}$.

1.8 Yksiköt ja suuruusluokat

SUUREET JA YKSIKÖT

Monissa sovelluksissa (ja erityisesti fysiikassa) luvut eivät esitä vain matemaattista lukuarvoa, vaan niitä käytetään yhdessä jonkin **yksikön** kanssa. Tällöin luku ja yksikkö yhdessä esittävät tietoa **suureesta** eli jostakin mitattavasta ominaisuudesta.

ESIMERKKI 1.48

Aika on suure, jota voidaan mitata käyttämällä yksikkönä esimerkiksi sekunteja tai vuosia.

Pituus on suure, ja sen arvo voidaan mitata ja esittää käyttäen yksikkönä esimerkiksi metrejä ja tuumia. Itse asiassa myös matkaa ja etäisyyttä mitataan samoissa yksiköissä; näillä suureilla on sovellusriippuvainen, erityisesti geometriassa ja fysiikassa esille tuleva nyanssiero.

Energia on suure, jota mitataan esimerkiksi yksiköissä joule tai kalori.

Jotkin suureet ovat **skalaarisuureita** ja toiset **vektorisuureita**. Skalaarisuureet ovat sellaisia mitattavia ominaisuuksia, joiden kuvaamiseen riittää yksi luku. Vektorisuureet ovat ominaisuuksia, joilla on sekä suuruus että suunta, eikä yksi luku riitä kertomaan kaikkea. (Vektorilaskentaan tutustutaan tarkemmin MAA5-kurssilla sekä fysiikan mekaniikan kursseilla.)

ESIMERKKI 1.49

Lämpötilan esittämiseen riittää yksi luku, eli lämpötila on skalaarisuure.

Käytetystä yksiköstä riippuen kyseinen luku saattaa olla joko negatiivinen, nolla tai positiivinen.

Nopeus on vektorisuure, koska nopeuteen liittyy sen suuruuden lisäksi myös suunta. Esimerkiksi puhuttaessa tuulen nopeudesta kerrotaan myös, mistä suunnasta tuuli puhaltaa.

Matemaattisesti suureita käsitellään aivan kuin luku ja yksikkö olisivat kerrotut keskenään:

Tehtävissä yksiköistä käytetään standardilyhenteitä, eikä yksiköiden nimiä tarvitse kirjoittaa kokonaan. Käytäntö on jättää kertolaskun sijasta luvun ja yksikön väliin tyhjää (tämä on ISO-standardin mukainen merkintätapa). Tähän on muutama poikkeus: kulman suuruutta ilmaisevat asteet, minuutit ja sekunnit, joita merkitään symboleilla °, ' ja ", sekä jotkin pituusyksiköt kuten tuuma, jota merkitään ". Yksiköt kirjoitetaan konekirjoitetussa tekstissä pystyyn, ei *kursiivilla*.

ESIMERKKI 1.50

Seuraava taulukko selventää oikeinkirjoitusta:

Oikein	Väärin
3 m	3m
100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$
2 ‰	2‰
3°	3 °
3,16° 5' 13"	3,16 ° 5 ' 13 "
6 °C	6°C

SI-JÄRJESTELMÄ

SI-järjestelmä eli kansainvälinen yksikköjärjestelmä (ransk. *Système international d'unités*) on maailman käytetyin mittayksikköjärjestelmä. Siihen kuuluvat seuraavat **perussuureet** ja vastaavat perusyksiköt:

SI-järjestelmän perussuureet ja yksiköt

Suure	Suureen tunnus	Yksikkö	Yksikön tunnus
pituus	l	metri	m
massa	m	kilogramma	kg
aika	t	sekunti	s
sähkövirta	I	ampeeri	A
(termodynaaminen) lämpötila	T	kelvin	K
ainemäärä	n	mooli	mol
valovoima	I	kandela	cd

Toisin kuin yksiköt, suureiden kirjainlyhenteet kirjoitetaan konekirjoituksessa oikeaoppisesti *kursiivilla*.

Jokaisella perussuureen yksiköllä on oma tarkkaa määritelmänsä. Suureiden tunnuksia käytetään yleensä muuttujan symbolina kaavoissa. Itse suureita käsitellään tarkemmin fysiikassa ja kemiassa, mutta matematiikan kursseilla tulee tuntee ainakin pituus, massa ja aika. (Huomaa, että arkikielessä käytetään usein sanaa paino, vaikka tarkoitetaan massaa.) Tämän lisäksi matematiikan tehtävissä esiintyy usein joitakin näistä perussuureistayhdistämällä saatuja **johdannais suureita** kuten nopeus, pinta-ala, tilavuus ja tiheys.

Tärkeitä johdannaisuuureita

- Nopeus (tunnus v , engl. *velocity*) on johdannaisuure, joka saadaan kuljetun matkan ja matkan kulkemiseen käytetyn ajan osamäärästä: $\text{nopeus} = \frac{\text{matka}}{\text{aika}}$. Vastaava nopeuden yksikkö saadaan jakamalla matkan yksikkö ajan yksiköllä, käytettiin mitä yksiköitä hyvänsä – esimerkiksi $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ja $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
- Pinta-ala (tunnus A , engl. *area*) saadaan kertomalla pituus toisella pituudella. Vastaavasti pinta-alan yksiköt saadaan pituuden yksiköistä. Jos esimerkiksi pituutta on mitattu metreissä, niin vastaava pinta-alan yksikkö on $\text{m} \cdot \text{m} = \text{m}^2$ eli neliömetri.
- Tilavuus (tunnus V , engl. *volume*) on edelleen johdettavissa kolmen pituuden tulona. Jos pituutta on mitattu metreissä, niin vastaava tilavuuden yksikkö on $\text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{m} = \text{m}^3$ eli kuutiometri.
- Tiheys (tunnus ρ , kreikkalainen pieni kirjain *rho*) on johdannaisuure, joka määritellään massan ja tilavuuden osamääränä: $\text{tiheys} = \frac{\text{massa}}{\text{tilavuus}}$. Vastaavasti tiheyden yksiköt saadaan jakolaskulla massan ja tilavuuden yksiköistä: jos kappaleen tilavuus on mitattu kuutiometreissä ja massa kilogrammoina, voidaan kappaleen tiheys esittää yksiköissä $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Tiheydestä kannattaa muistaa nyrkkisääntönä, että veden tiheys on noin yksi kilogramma per litra.

Kun johdannaisyksiköissä esiintyy jakolaskua, yksikön voi kirjoittaa useassa eri muodossa potenssisääntöjen avulla.

ESIMERKKI 1.51

Nopeuden yksikkö metriä sekunnissa voidaan kirjoittaa murtolausekkeena $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, samalla rivillä m/s tai negatiivisen eksponentin avulla m s^{-1} .

Joillekin johdannaisyksiköille on annettu oma nimensä ja lyhenteensä, eikä yksikössä esiinny alkuperäisiä perusyksiköitä.

ESIMERKKI 1.52

- a) Tuhatta kilogrammaa kutsutaan tonniksi.
- b) Yksi litra vastaa yhtä kuutiodesimetriä, eli $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$ (ks. etuliitteet edellä).

- c) Energian yksikkö joule ilmaistuna vain SI-järjestelmän perusyksiköitä käyttämällä: $J = \frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^2}$.

SUURUUSLUOKAT JA KYMMENPOTENSsimuoto

Suuruusluokkien ymmärtäminen (kuvaajien ja tilastojen tulkitsemisen ohella) on tärkeä osa *lukutaitoa* – näiden ymmärtäminen estää sinua tulemasta huijatuksi ja harhaanjohtetuksi.¹

Kymmenpotenssimuoto eli eksponenttimuoto on merkintätapa, jossa luku ilmoitetaan kertoimen sekä jonkin kymmenen kokonaislukupotenssin tulona. Kymmenpotenssimuodosta on hyötyä, kun halutaan kirjoittaa suuria tai pieniä lukuja lyhyesti. Myös mittaustarkkuuden ilmoittamiseksi tarvitaan joskus kymmenpotenssimuotoa. On yleinen tapa valita esitysmuoto niin, että potenssin kerroin on vähintään yksi mutta alle kymmenen. Sama luku voidaan esittää äärettömän monella tavalla kymmenpotenssimuodossa.

Yleisellä ilmaisulla “**pilkun siirtäminen**” tarkoitetaan käytännössä luvun kymmenpotenssiesityksen muokkaamista. Pilkku siirtyy oikealle yhtä monta pykälää kuin kymmenen potenssi pienenee ja päinvastoin. Pilkuttoman luvun tapauksessa pilkku “kuvitellaan luvun perään”. Koska $10^0 = 1$, voidaan ilman kymmenpotenssia esitetyn luvun perään tarvittaessa lisätä tämä kerroin mielessä. 10 tarkoittaa luonnollisesti samaa asiaa kuin 10^1 .

Joitakin esitysmuotoja samoille luvuille

$1\,234\,000 \cdot 10^{-3}$	$14 \cdot 10^{-3}$	$130\,000\,000\,000 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$
$123\,400 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$13\,000\,000\,000 \cdot 10^{-2}$	$0,1 \cdot 10^{-4}$
$12\,340 \cdot 10^{-1}$	$0,14 \cdot 10^{-1}$	$1\,300\,000\,000 \cdot 10^{-1}$	$0,001 \cdot 10^{-2}$
1 234	0,014	130,000 000	0,00001
$123,4 \cdot 10$	$0,0014 \cdot 10$	$130 \cdot 10^6$	$0,000001 \cdot 10$
$12,34 \cdot 10^2$	$0,00014 \cdot 10^2$	$1,3 \cdot 10^2$	$0,0000001 \cdot 10^2$
$1,234 \cdot 10^3$	$0,000014 \cdot 10^3$	$0,13 \cdot 10^9$	$0,00000001 \cdot 10^3$

1. Kirjallisuutta aiheesta tarjoaa muun muassa John Allen Paulosin teos Numerotaidottomuus. (Kirja on nimetty hassusti, ottaen huomioon, että siinä erityisesti puhutaan *luvuista*, ei numeroista – oletamme tämän huonoksi käännokeksi, koska englanninkielen sana *number* tarkoittaa lukua.

ESIMERKKI 1.53

- a) Maan massa on noin 5 974 000 000 000 000 000 000 kg. Luvussa on ensimmäisen numeron (5) jälkeen vielä 24 numeroa, eli kymmenpotenssimuodoksi saadaan $5,974 \cdot 10^{24}$ kg.
- b) Vety molekyyli H_2 ytimien välinen etäisyys on noin 0,000000000074 m eli $7,4 \cdot 10^{11}$ m.
- c) Jos juoksuradan pituudeksi ilmoitetaan 1 000 m, ei lukija voi tietää, millä tarkkuudella mittaus on tehty. Mittaustarkkuus välittyy kymmenpotenssin avulla: jos etäisyys ilmoitetaan muodossa $1,00 \cdot 10^3$ m, on mitattu kymmenen metrin tarkkuudella, ja jos muodossa $1,0 \cdot 10^3$ m, on mitattu sadan metrin tarkkuudella jne.

ETULIITTEET JA SUURTEN LUKUJEN NIMET

Monesti suureita kuvataan **kerrannaisyksiköiden** avulla. Tällöin yksikön suuruutta muokataan etuliitteellä, joka toimii suuruusluokkaa muuttavana kertoimena.

Tavallisimmat kerrannaisyksiköiden etuliitteet

Nimi	Kerroin	Tunnus	Arvo suomeksi
deka	10^1	da	kymmenen
hecto	10^2	h	sata
kilo	10^3	k	tuhat
mega	10^6	M	miljoona
giga	10^9	G	miljardi
tera	10^{12}	T	biljoona
peta	10^{15}	P	tuhat biljoonaa

Nimi	Kerroin	Tunnus	Arvo suomeksi
desi	10^{-1}	d	kymmenesosa
sentti	10^{-2}	c	sadasosa
milli	10^{-3}	m	tuhannesosa
mikro	10^{-6}	μ	miljoonasosa
nano	10^{-9}	n	miljardisosa
piko	10^{-12}	p	biljoonasosa
femto	10^{-15}	f	tuhatbiljoonasosa

Etuliitteitä käytetään siis muuttamaan yksikköä pienemmäksi tai suuremmaksi. Taroituksena on yleensä valita sovelluskohtaisesti sopivan kokoinen yksikkö niin, että käytetyn luvun ei tarvitse olla valtavan suuri tai pieni. Mitä suuremman yksikön valitsee, sitä pienemmäksi sen kanssa käytettävä luku tulee – ja toisinpäin.

ESIMERKKI 1.54

- a) Kilogramma tarkoittaa tuhatta grammaa. Kilogramma on valittu SI-järjestelmässä massan perusyksiköksi gramman asemesta käytännöllisyyssyistä, sillä yksi gramma on moniin sovelluksiin turhan pieni yksikkö.
- b) Ilmaisussa 0,000046 metriä luku on niin pieni, että on käytännöllisempää ja usein helppotajuisempaa kirjoittaa 46 mikrometriä eli $46 \mu\text{m}$.
- c) Hyvin pienistä massoista puhuttaessa voidaan puhua esimerkiksi nanogrammoista. Esimerkiksi $1 \text{ ng} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ g} = 0,000000009 \text{ g}$.

Taulukoitujen suurten lukujen nimet kannattaa opetella, ja myös huomata, että eri kielten välillä on joitakin poikkeuksia. [ESIMERKKI 1.55](#)

■ Amerikanenglanniksi miljardi on billion, ja biljoona on trillion.

HUOMAUTUKSIA TIETOTEKNIIKASTA

Datan tai informaation määrää mitataan bitteinä ja tavuina – yksi tavu on kahdeksan bittiä. Tietotekniikassa datan määrä on suurena dikstreetti eli bittejä voi olla vain jokin luonnollisen luvun osoittama määrä. Bittejä ei siis voi jakaa mielivaltaisen pieniin palasiin toisin kuin esimerkiksi sekunteja ja metrejä. Yhteen kahdeksan bitin mittaiseen tavuun voidaan tallettaa kokonaisluku väliltä 0–255. Tavun sisällön merkitys voidaan tulkita usealla tavalla, esimerkiksi yhtenä kirjaimena jossain merkistössä.

Suomen kielessä bitin lyhenne on b ja tavun t. Usein käytettävät englanninkieliset lyhenteet bitille (engl. *bit*) ja tavulle (engl. *byte*) ovat vastaavasti b ja B.

ESIMERKKI 1.56

Pelkästään muotoilematonta tekstiä kirjoittaessa yksi tavallinen englanninkielien kirjoitusmerkki vie tietokoneella tallennustilaa yhden tavun.

Internetpalveluntarjoajat mainostavat yhteysnopeuksiaan yleensä muodossa X/Y , missä X on luvattu teoreettinen maksiminopeus datan vastaanottamiselle (lataamiselle, engl. *download*) ja Y teoreettinen maksiminopeus datan lähettämiseksi (engl. *upload*). Yksikkönä mainosteksteissä on tavallisilla kuluttajanopeuksilla usein englanninkielinen Mbps eli megabittiä sekunnissa (*megabits per second*, oikeaoppisesti kirjoitettuna Mb/s). Koska ilmaisu on biteissä käytännössä enemmän käytettyjen tavujen sijaan, nopeus näyttää suurelta. Oma yhteysnopeus kannattaa testata jossain siihen tarkoitettuun verkkopalvelussa – palveluntarjoajalle eli operaattorille kannattaa valittaa, jos yhteysnopeus jää paljon luvatusista.

Tietokoneiden rakenteen kaksikantaisuuden (ks. liite lukujärjestelmistä) johdosta tavujen kerrannaisyksiköillä tarkoitetaan yleensä kymmenen potenssien sijaan usein lähimpiä kahden potensseja. SI-järjestelmä ei tue kaksikantaista käytäntöä, vaan sen mukaan kt on tasan 1 000 t ja niin edelleen. Tarvitsemme datan käsittelyyn uudet binääriset etuliitteet:

Etuliite	Nimi	Arvo	Lähin kymmenenpotenssi
ki	kibi	2^{10}	10^3
Mi	mebi	2^{20}	10^6
Gi	gibi	2^{30}	10^9
Ti	tebi	2^{40}	10^{12}
Pi	pebi	2^{50}	10^{15}

Kyseisten etuliitteiden käyttö on kuitenkin (edelleen) harvinaista. Kun vuosikymmeniä sitten datan tallennuskapasiteetti oli pieni, ei kilotavun ja kibitavun (suhteellinen) ero ollut suuri, mutta nykyään ero on suurempien datamäärien käsittelyssä hyvin merkityksellinen.

ESIMERKKI 1.57

Lasketaan SI-etuliitteiden ja binääristen eli kaksikantaisten etuliitteiden erotuksia tavujen tilanteessa.

a) $1 \text{ kit} - 1 \text{ kt} = 1\,024 \text{ t} - 1\,000 \text{ t} = 24 \text{ t}$

$$\text{b) } 1 \text{ Mt} - 1 \text{ Mt} = 2^{20} - 10^6 = 48\,576 \text{ t}$$

$$\text{c) } 1 \text{ Gt} - 1 \text{ Gt} = 2^{30} - 10^9 = 73\,741\,824 \text{ t}$$

Huomataan, että suuruusluokkien kasvaessa esitystapojen välinen virhe kasvaa merkittävästi.

Arkikielessä ja markkinoinnissa nykyään käytetään kuitenkin lähinnä SI-järjestelmän etuliitteitä, ja on ymmärrettävä kontekstista, että ”kilotavulla” tarkoitetaan 1 024:ää tavua (2^{10}), ”megatavulla” tarkoitetaan 1 024:ta ”kilotavua”, ja niin edelleen.

Valitettavasti monessa yhteydessä ei ole selvää, tarkoitetaanko kymmenen vai kahden potensseja. Jotkin käyttöjärjestelmät ja tietokoneohjelmat sanovat toista ja tarkoittavat toista. Kuluttajan hämmennykseksi usein esimerkiksi keskusmuistien koosta puhuttaessa käytetään binäärikerrannaisyksikköjä mutta kiintolevyjen koosta puhuttaessa kymmenen potensseja. Siirtonopeudet sen sijaan ovat yleensä *aivan oikein* ilmoitettu SI-etuliitteillä.

ESIMERKKI 1.58

Kun ääntä (esimerkiksi musiikkia) pakataan MP3-muotoon, keskiarvon äänenlaadun saavuttamiseksi bittivirta (engl. *bitrate*) voi olla 128 kb/s. Tämä tarkoittaa oikeasti tasan 128 000 bitin siirtoa sekuntia kohden. Koska tavu on kahdeksan bittiä, vastaa tämä tavuissa tiedonsiirtonopeutta $\frac{128}{8} \text{ kb/s} = 16 \text{ kt/s}$.

ESIMERKKI 1.59

Ostat kahden ”teran” kiintolevyn pöytäkoneeseen. Tuotteessa itsessään lukee tällöin yleensä englanniksi 2 TB ja suomeksi puhumme teratavuista (merkitään 2 Tt). Ilmaisuu tuo kuitenkin mukanaan yllätyksen, sillä kun levyn asentaa koneeseen, voi käyttöjärjestelmä ilmoittaa vapaan tilan olevan huomattavasti kahta teratavua pienempi. Ero johtuu siitä, että levyllä on tilaa $2 \text{ Tt} = 2 \cdot 10^{12}$ tavua, mutta ohjelmat, käyttöjärjestelmä (ja myös koneen käyttäjä) voi olettaa koon olevan ilmoitettu kaksikantaisena niin, että kokonaistila olisikin $2 \text{ Tit} = 2 \cdot 2^{40}$ tavua. Jos käyttöjärjestelmä tämän lisäksi ilmoittaa levytilan SI-etuliitteiden avulla (vaikka tarkoittaaisikin kaksikantaisia), voi levyn ostajalle tulla huijattu olo. Eroa näillä kahdella ilmaisulla on $2 \cdot 2^{40} \text{ t} - 2 \cdot 10^{12} \text{ t} = 99\,511\,627\,776 \text{ t} \approx 100 \text{ gigatavua} \approx 93 \text{ gigitavua!}$, eli käytettävissä olevaa tilaa onkin melkein kymmenesosa vähemmän kuin mitä on mielestään ostanut! (Monta kiintolevyvalmistajaa on haastettu oikeuteen näistä epämääräisyyksistä.)

YKSIKKÖMUUNNOKSET

Kerrannaisyksiköiden tapauksessa tulee vain huomata, että etuliitteet ovat matemaattisesti vain kertoimia. Kaikki ilmaisut voidaan aina halutessa esittää luvun ja yksikön tulona ilman etuliitteitä.

ESIMERKKI 1.60

$$270 \text{ mm} = 270 \cdot \text{mm} = 270 \cdot 10^{-3} \text{ m} = \frac{270}{1\,000} \text{ m} = 0,27 \text{ m}$$

ESIMERKKI 1.61

Erään solun tilavuus on $9,0 \cdot 10^{-12}$ l. Ilmoita tilavuus

a) pikolitroina

b) nanolitroina

Ratkaisu. a) $9,0 \cdot 10^{-12} \text{ l} = 9,0 \text{ pl}$.

b) Kymmenen eksponentiksi halutaan -9 . Koska 10^{-12} on pienempi kuin 10^{-9} , sitä tulee kasvattaa – samalla kerroin pienenee. Kymmenenpotenssi kerrotaan tuhannella, ja kerroin jaetaan samaten tuhannella, jotta itse lukuarvo ei muutu: $9,0 \cdot 10^{-12} = 9,0 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-9} = 0,009 \text{ nl}$.

Erittäin tärkeää kerrannaisyksiköiden potensseista!

Edellä esitetty taulukko etuliitteistä pätee vain ensimmäisen asteen yksiköihin! Desimetri on kymmenesosa metristä, mutta neliödesimetri *ei* ole kymmenesosa neliömetristä. (Vrt. neliödesimetri ja desineliömetri)

Avain tämän ymmärtämiseen on tietää seuraava kirjoitustavan sopimus:

dm^2 tarkoittaa oikeasti $(\text{dm})^2$!

Potenssisääntöjä käyttämällä huomataan: $(\text{dm})^2 = \text{d}^2\text{m}^2 = (10^{-1})^2 \text{ m}^2 = 10^{-2} \text{ m}^2 = \frac{1}{100} \text{ m}^2$. Eli yksi neliödesimetri onkin *sadaosa* neliömetristä!

ESIMERKKI 1.62

■ Kuinka mones osa kuutiodesimetri on kuutiometristä?

Ratkaisu. Puretaan auki käyttäen mainittua kirjoituskonventiota, potenssisääntöjä ja desi-etuliitteen määritelmää:

$$\begin{aligned}1 \text{ dm}^3 &= 1 (\text{dm})^3 \\&= 1 \text{ d}^3 \text{ m}^3 \\&= 1 (10^{-1})^3 \text{ m}^3 \\&= 10^{-1 \cdot 3} \text{ m}^3 \\&= 10^{-3} \text{ m}^3 \\&= \frac{1}{1\,000} \text{ m}^3\end{aligned}$$

Nähdään, että yksi kuutiodesimetri on tuhannesosa kuutiometristä.

Matkan (pituuden), pinta-alan ja tilavuuden yksikkömuunnoksia käsitellään tarkemmin ja lisää geometrian MAA3-kurssilla.

Ajan yksiköissä on jäänneitä 60-järjestelmästä. Yksikköjä ei jaetakaan kymmeneen pienempään osaan vaan kuuteenkymmeneen:

Ajan yksiköt

- Yksi tunti on 60 minuuttia: $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$
- Yksi minuutti on 60 sekuntia: $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$
- Yksi tunti on 3 600 sekuntia: $1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 60 \cdot 60 \text{ s} = 3\,600 \text{ s}$

ESIMERKKI 1.63

Kuinka monta minuuttia on 1,25 h?

Ratkaisu. $1,25 \text{ h} = 1,25 \cdot 60 \text{ min} = 75 \text{ min}$. 1,25 tuntia on siis 75 minuuttia.

Huomaa, että voit laskuissasi esittää desimaaliluvun 1,25 sekamurtolukuna $1 \frac{25}{100}$ eli $1 \frac{1}{4}$, mikä saattaa helpottaa laskemista.

ESIMERKKI 1.64

Pikajuoksija Usain Boltin huippunopeudeksi 100 metrin juoksukilpailussa mitattiin 12,2 m/s. Janin polkupyörän huippunopeus alamäessä oli 42,5 km/h.

Kumman huippunopeus oli suurempi?

Ratkaisu. Muunnetaan yksiköt vastaamaan toisiaan, jolloin luvuista tulee keskenään vertailukelpoisia. Janin polkupyörän huippunopeus oli $42,5 \text{ km/h} = 42,5 \cdot (1\,000 \text{ m})/\text{h} = 42\,500 \text{ m/h} = 42\,500 \text{ m}/(3\,600 \text{ s}) = \frac{42\,500}{3\,600} \text{ m/s} \approx 11,8 \text{ m/s}$. Bolt oli siis pyöriälevää Jania nopeampi.

SI-järjestelmä ei ole ainoa käytetty mittayksikköjärjestelmä. Esimerkiksi niin kutsutussa brittiläisessä mittayksikköjärjestelmässä (imperial) pituutta voidaan mitata esimerkiksi tuumissa. Yksi tuuma (merkitään $1''$) vastaa $2,54$ senttimetriä. Massan perusyksikkönä brittiläisessä mittayksikköjärjestelmässä käytetään paunaa.

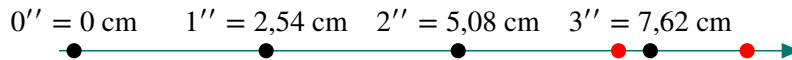
Suure	Yksikkö	Yksikön tunnus	SI-järjestelmässä
pituus	tuumaa	$''$ (tai in)	$2,54 \text{ cm}$
massa	pauna	lb	$453,59237 \text{ g}$

Tuumien tai paunojen avulla ilmaistut suureet voidaan muuntaa SI-järjestelmään yllä olevassa taulukossa näkyvien suhdelukujen avulla.

ESIMERKKI 1.65

Kuinka monta senttimetriä on $3,5$ tuumaa? Entä kuinka monta tuumaa on $7,2$ senttimetriä?

Ratkaisu. Yksi tuuma vastaa $2,54$ senttimetriä, joten kaksi tuumaa vastaa $5,08$ senttimetriä jne.



Tuumat saadaan siis senttimetreiksi kertomalla luvulla $2,54$. Näin ollen $3,5'' = 3,5 \cdot 2,54 \text{ cm} \approx 8,9 \text{ cm}$. Senttimetrien muuntaminen tuumiksi onnistuu vastaavasti *jakamalla* luvulla $2,54$. Näin ollen $7,2 \text{ cm} \approx 2,8''$, koska $7,2 : 2,54 \approx 2,8$.

YKSIKÖIDEN YHDISTÄMINEN LASKUISSA

Jos lausekkeessa on useita samanlaisia yksiköitä, näitä voidaan usein yhdistää. Suureen määritelmän luvun ja yksikön kertolaskukäsityksestä seuraa, että sovelluksissa ja sievennystehtävissä yksiköillä voidaan laskea kuin luvuilla. Käytännössä yksiköitä kohdellaan kuin lukuja, ja niitä voi kertoa ja jakaa keskenään. Tutut potenssisäännöt, rationaalilukujen laskusäännöt ja kertolaskun vaihdannaisuuslaki pätevät — lopullisessa sievennetyssä muodossa vain merkitään taas luvun ja yksikön väliin lyhyt väli

kertolaskun asemesta. Kerrannaisyksiköiden etuliitteet voi aina muuttaa tarvittaessa kymmenpotenssimuotoon tai murtolausekkeiksi.

ESIMERKKI 1.66

2 metriä kertaa 3 metriä $= 2 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} = 2 \cdot \text{m} \cdot 3 \cdot \text{m} = 2 \cdot 3 \cdot \text{m} \cdot \text{m} = 6 \text{ m}^2$ eli kuusi neliömetriä.

ESIMERKKI 1.67

Keskinopeus v voidaan laskea kaavasta $\frac{s}{t}$, missä s on kuljettu matka ja t matkaan käytetty aika. Tästä voidaan johtaa (ks. luku Yhtälöt) kaava, jolla voidaan laskea matkan kulkemiseen kulunut aika: $t = s/v$, missä s on kuljettu matka ja v on nopeus. Lasketaan, kuinka kauan kestää 300 metrin matka nopeudella 7 m/s.

Sijoitetaan kaavaan yksikköineen $s = 300 \text{ m}$ ja $v = 7 \text{ m/s}$ ja käytetään rationaalilukujen laskusääntöjä, jolloin saadaan:

$$t = \frac{100 \text{ m}}{7 \text{ m/s}} = \frac{100}{7} \cdot \frac{\text{m}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{100}{7} \cdot \frac{\text{m}}{1} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}} = \frac{100}{7} \cdot \frac{\cancel{\text{m}}\text{s}}{\cancel{\text{m}}} = \frac{100}{7} \text{ s} \approx 14 \text{ s}.$$

Huomaa, että eri suureita voi kertoa ja jakaa keskenään, mutta yhteen- ja vähennyslasku ei ole määritelty. (Mitä tarkoittaisikaan ”kolme metriä plus kaksi grammaa”?)

Tehtäviä

Opi perusteet

128. Onko annettu suure skalaarisuure? Jos kyllä, mainitse esimerkkinä jokin yksikkö (koko nimi ja lyhenne), jota kyseisen ominaisuuden mittaamiseen käytetään.

- a) energia
- b) lämpötila
- c) kiihtyvyys
- d) massa
- e) tiheys

129. Esitä luvut ilman kymmenpotenssia.

- a) $3,2 \cdot 10^4$
- b) $-7,03 \cdot 10^{-5}$
- c) $10,005 \cdot 10^{-2}$

130. Kirjoita luku numeroin (ilman kymmenpotenssia).

- a) viisimiljardia kuusimiljoonaa
- b) miinus kolmebiljoonaa seitsemänsataatuhatta kolmekymmentäkuusi
- c) kaksitriljoonaa kaksi
- d) kolmekymmentäkuusi miljardisosaa
- e) forty-three billion seventy-three thousand (amerikanenglanti)

131. Kirjoita/lausu luku kirjaimin.

- a) 76 000 000 076
- b) 1 002 003 004 560

132. Esitä luku ilman etuliitettä tai kymmenpotenssimuotoa.

- a) 0,5 dl
- b) 233 mm
- c) 33 senttimetriä
- d) 16 kg
- e) 2 MJ
- f) 4 kubitavua
- g) 0,125 Mit

133. Maailman nopein kamera vuonna 2014 ottaa 4,4 biljoonaa kuvaa sekunnissa.

- a) Esitä kymmenpotenssimuodossa sievennettynä tarkkana arvona, kuinka kauan yhden kuvan ottaminen keskimäärin kestää.
- b) Kuinka monta kokonaista nanosekuntia kestää ottaa kyseisellä kameralla miljoonaa kuvaa?

134. Muuta

- a) 1 h 36 min tunneiksi
- b) 2 h 45 min minuuteiksi
- c) 1,5 h sekunneiksi.

135. Muuta seuraavat ajat tunneiksi.

- a) 73 minuuttia
- b) 649 sekuntia
- c) 15 minuuttia ja 50 sekuntia
- d) 42 minuuttia ja 54 sekuntia

136. Elektroniikkayhtiö on ilmoittanut, että laitteen täyteen ladattu akku kestää käyttöä 450 minuuttia. Laitetta on käytetty lataamisen jälkeen 3 h 30 min. Kuinka monta tuntia akun voi olettaa vielä kestävän?

137. Muuta seuraavat pituudet SI-muotoon (1 tuuma = 2,54 cm, 1 jaardi = 0,914 m, 1 jalka = 0,305 m, 1 maili = 1,609 km).

- a) 5 tuumaa senttimetreiksi
- b) 0,3 tuumaa millimetreiksi
- c) 79 jaardia metreiksi
- d) 80 mailia kilometreiksi
- e) 5 jalkaa ja 7 tuumaa senttimetreiksi
- f) 330 jalkaa kilometreiksi

138. Laske

- a) $3,0 \text{ cm} \cdot 2,5 \text{ cm} \cdot 6,0 \text{ cm}$
- b) $0,4 \text{ km} : 8 \text{ m/s}$
- c) $2 \text{ g} : 50 \text{ mg/ml}$.

139. Laske

- a) $3,0 \text{ ml} \cdot 25 \text{ mg/ml}$
- b) $150 \text{ m} : 3 \text{ m/s}$
- c) $3,0 \text{ g} : 2,0 \text{ dm}^2$.

140. Kuinka monta litraa maitoa mahtuu $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ -laatikkoon? Jos kuution särmän pituus on a , on kuution tilavuus a^3 .

141. Liuoksen pitoisuus voidaan laskea kaavalla $c = m/V$, missä c on pitoisuus, m on liuenneen aineen määrä ja V on liuoksen tilavuus. Laske suolaliuoksen pitoisuus (yksikkönä mg/ml), kun 4,5 grammaa suolaa on liuotettu 500 millilitraan liuosta.

142. USB (engl. *Universal Serial Bus*) on yleinen tekniikka erilaisten lisälaitteiden yhdistämiseksi tietokoneisiin. Vuonna 2008 esitelty USB:n versio 3.0 on yli kymmenen kertaa nopeampi kuin USB 2.0, ja USB 3.0:n suurin tiedonsiirtonopeus on jopa 5 Gb/s.

a) Kuinka paljon tämä on megatavuina sekunnissa?

b) Kuinka kauan kyseisellä nopeudella kestää siirtää 13 Gb:n kokoinen Blu-ray-elokuva ulkoiselle kiintolevyllä? Oletetaan, että mikään muu siirtovaihe ei toimi pullonkaulana.

143. (YO K00/3) Suorakulmaisen särmiön muotoinen hautakivi on 80 cm korkea, 2,10 m pitkä ja 32 cm leveä. Voisiko kivi nostaa nosturilla, joka pystyy nostamaan enintään kahden tonnin painoisen kuorman? Hautakiven tiheys on $2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. [Suorakulmaisen särmiön tilavuus on sen kolmen pituusdimension eli pituuden, leveyden ja syvyyden tulo.]

Lisää tehtäviä

144. Muuta sekunneiksi

- a) 1 h 42 min
- b) 3 h 32 min
- c) 1,25 h
- d) 4,5 h.

145. Muuta minuuteiksi

- a) 1 h 17 min
- b) 2 h 45 min
- c) 1,5 h
- d) 1,75 h

146. Muuta tunneiksi ja minuuteiksi

- a) 125 min
- b) 667 min
- c) 120 min
- d) 194 min.

147. Jasper-Korianteri ja Kotivalo vertailivat keppejään. Jasper-Korianteri mittasi oman keppinsä 5,9 tuumaa pitkäksi ja Kotivalo omansa 14,8 senttimetriä pitkäksi. Kummalla on pidempi keppi?

148. Liisa ohjelmoi tietokoneensa sammumaan 14 400 sekunnin kuluttua. Kuinka monen tunnin kuluttua Liisan tietokone sammuu?

149. Laske oma pituutesi ja painosi tuumissa ja paunoissa.

150. ★ (Muunnelma fyysikko Enrico Fermi esittämästä ongelmasta.) Chicagossa asuu osapuilleen 5 000 000 asukasta. Kussakin kotitaloudessa asuu keskimäärin kaksi asukasta. Karkeasti joka kahdennessakymmenennessä kotitaloudessa on säännöllisesti viritettävä piano. Säännöllisesti viritettävät pianot viritetään keskimäärin kerran vuodessa. Pianonvirittäjällä kestää noin kaksi tuntia viritää piano, kun matkustusajat huomioidaan. Kukin pianonvirittäjä työskentelee kahdeksan tuntia päivässä, viisi päivää viikossa ja 50 viikkoa vuodessa. Mikä arvio Chicagon pianonvirittäjien lukumäärälle saadaan näillä luvuarvoilla?

1.9 Pyöristäminen ja vastaustarkkuus

PYÖRISTÄMINEN

Mikäli urheiluliikkeessä lumilaudan pituudeksi ilmoitetaan tarkan mittauksen jälkeen 167,9337 cm, on tämä asiakkaalle tarpeettoman tarkka tieto. Epätarkempi arvo 168 cm antaa kaiken oleellisen informaation ja on mukavampi lukea. Pyöristämisen ajatus on korvata luku sitä lähellä olevalla luvulla, jonka esitysmuoto on yksinkertaisempi. Voidaan pyöristää esimerkiksi tasakymmenien, kokonaisten tai vaikkapa tuhannesosien tarkkuuteen.

Siis esimerkiksi kokonaisluvuksi pyöristettäessä $2,8 \approx 3$, koska 3 on lähin kokonaisluku. Lisäksi on sovittu, että puolikkaat (kuten 2,5) pyöristetään ylöspäin. Se, pyöristetäänkö ylös vai alaspäin (eli suurempaan vai pienempään lukuun), riippuu siis haluttua tarkkuutta seuraavasta numerosta: pienet 0, 1, 2, 3, 4 pyöristetään alaspäin, suuret 5, 6, 7, 8, 9 ylöspäin.

Ellei muuta mainita, tehtävissä käytetään kaikkein yleisintä pyöristysmenetelmää, jossa viimeisen numeron perusteella pyöristetään lähimpään, ja numeroon 5 päättyvät pois päin nolasta.

ESIMERKKI 1.68

Pyöristetään luku 15,0768 sadasosien tarkkuuteen. Katkaistaan luku sadasosien jälkeen ja katsotaan seuraavaa desimaalia:

$$15,0768 = 15,07|68 \approx 15,08.$$

Pyöristettiin ylöspäin, koska seuraava desimaali oli 6.

Merkitsevät numerot

Mikä on tarkin mittaus, 23 cm, 230 mm vai 0,00023 km? Kaikki kolme tarkoittavat täsmälleen samaa, joten niitä tulisi pitää yhtä tarkkoina. Luvun esityksessä esiintyvät kokoluokkaa ilmaisevat nollat eivät ole *merkitseviä numeroita*, vain 2 ja 3 ovat.

Merkitsevät numerot

Merkitseviä numeroita ovat kaikki luvussa esiintyvät numerot, paitsi nollat kokonaislukujen lopussa ja desimaalilukujen alussa.

Luku	Merkitseviä numeroita
123	3
12 000	2 (tai enemmän)
12,34	4
0,00123	3

Kokonaislukujen kohdalla on toisinaan epäselvyyttä merkitsevien numeroiden määrässä. Kasvimaalla asuvaa 100 citykaniä on tuskin laskettu ihan tarkasti, mutta 100 m juoksuradan todellinen pituus ei varmasti ole todellisuudessa esimerkiksi 113 m.

Vastausten pyöristäminen sovelluksissa

Pääsääntö on, että vastaukset pyöristetään aina epätarkimman lähtöarvon mukaan. Yhteen- ja vähennyslaskuissa epätarkkuutta mitataan desimaalien lukumäärällä.

ESIMERKKI 1.69

Jos 175 cm pituinen ihminen nousee seisomaan 2,15 cm korkuisen laudan päälle, olisi varsin optimistista ilmoittaa kokonaiskorkeudeksi 177,15 cm. Kyseisen ihmisen pituus kun todellisuudessa on mitä tahansa arvojen 174,5 cm ja 175,5 cm väliltä. Lasketaan siis $175 \text{ cm} + 2,15 \text{ cm} = 177,15 \text{ cm} \approx 177 \text{ cm}$. Epätarkempi lähtöarvo oli mitattu senttien tarkkuudella, joten pyöristettiin tasasentteihin.

Kerto- ja jakolaskussa tarkkuutta arvioidaan merkitsevien numeroiden mukaan. Jos esimerkiksi pitkän pöydän pituus karkeasti mitattuna on 5,9 m ja pöydän leveydeksi saadaan tarkalla mittauksella 1,7861 m, ei ole perusteltua olettaa pöydän pinta-alan olevan todella

$$5,9 \text{ m} \cdot 1,7861 \text{ m} = 10,53799 \text{ m}^2.$$

Pyöristys tehdään epätarkimman lähtöarvon mukaisesti kahteen merkitsevään numeroon:

$$5,9 \text{ m} \cdot 1,7861 \text{ m} = 10,53799 \text{ m}^2 \approx 11 \text{ m}^2.$$

Tarkkuus ei ole aina hyvästä lukujen esittämisessä. Esimerkiksi

$$\pi = 3,141592653589793238462643383279 \dots$$

mutta käytännön laskuihin riittää usein 3,14.

Muista, että kolmen pisteen käyttö desimaaliesityksen lopussa on suotavaa vain, jos on yksikäsitteisen selvää, miten desimaalit tulevat jatkumaan. Piin tapauksessa niitä voi käyttää, koska luvun desimaalikehitelmä on hyvin tunnettu ja mielivaltaisen tarkasti laskettavissa.

Tarkka arvo

Matematiikassa ei ilman erityistä tarkoitusta käytetä likiarvoja vaan niin sanottuja tarkkoja arvoja. Käytännössä tämä tarkoittaa arvojen esittämistä mahdollisimman yksinkertaisessa ja sievennetyssä muodossa niin, että irrationaalilukuja kuten π ja $\sqrt{2}$ ei esitetä pyöristettyinä desimaaleina.

Käyttämällä tarkkoja arvoja ei menetetä tietoa arvosta kuten likiarvoilla, joilla joudutaan tyytymään tiettyyn tarkkuuteen luvun esityksessä.

ESIMERKKI 1.70

Lasku $3\sqrt{8\pi} \cdot \frac{1}{9}$ voidaan sieventää muotoon $\frac{2\sqrt{2\pi}}{3}$, joka on tarkka arvo, sillä tästä sieventäminen ei enää onnistu. Voidaan kyllä laskea vastaukseksi desimaaliluku $\frac{2\sqrt{2\pi}}{3} = 2,9619219587722441646772539933737957990764144595837 \dots$, mutta tuloksena on vain likiarvo, lasketaanpa desimaalilukua mihin tahansa tarkkuuteen hyvänsä.

Tehtäviä

Opi perusteet

151. Pyöristä kymmenen tarkkuudella

- a) 8
- b) 23
- c) 65
- d) 9 001
- e) 1
- f) -6
- g) -12
- h) 99 994.

152. Montako merkitsevää numeroa on seuraavissa luvuissa

- a) 5
- b) 12,0
- c) 9 000
- d) 666
- e) 9 000,000
- f) 0,0
- g) -1
- h) -0,00024?

153. Pyöristä kahden merkitsevän numeron tarkkuudella

- a) 1,0003
- b) 3,69
- c) 152,8
- d) 7 062,4
- e) -2,05
- f) 0,00546810
- g) -1 337
- h) 0,0000501.

154. Laske pöydän pinta-ala neliösenttimetreinä mittaustarkkuus huomioiden, kun pöytälevyn sivujen pituuksiksi on mitattu 72,5 cm ja 81,5 cm.

Hallitse kokonaisuus

155. Astmalääke Bricanylia annetaan injektiona 30 kg painavalle lapselle. Bricanyl-injektionesteen vahvuus on 0,35 mg/ml ja annos 11 $\mu\text{g/kg}$. Kuinka monta mikrolitraa injektionestettä lapsi saa? Anna vastaus 1 μl :n tarkkuudella.

156. Erään antibioottimikstuuran vahvuus on 0,23 mg/ml. Lapselle annostus on 1. päivänä 42 mg (aloitusannos) ja 2.–7. päivänä 12 mg (ylläpitoannokset). Mikstuuran pakkauskoko on 90,0 ml. Kuinka monta pakkausta tarvitaan, ja montako millilitraa jää käyttämättä? Ilmoita tulos 0,1 ml:n tarkkuudella.

1.10 Juuret

NELIÖJUURI

Ajatellaan, että neliön pinta-ala on a . Halutaan tietää, mikä on kyseisen neliön sivun pituus. Vastausta tähän kysymykseen kutsutaan luvun $a \geq 0$ **neliöjuureksi** ja merkitään $\sqrt{a}$. Luvun a neliöjuuri on myös yhtälön $x^2 = a$ ratkaisu. Tällöin täytyy kuitenkin huomata, että myös luku $x = -\sqrt{a}$ toteuttaa kyseisen yhtälön. Neliöjuurella tarkoitetaan kyseisen yhtälön epänegatiivista ratkaisua. Tämä on luonnollista, koska neliön sivun pituus ei voi olla negatiivinen luku.

Neliöjuuri

Luvun a neliöjuuri on epänegatiivinen luku, jonka neliö on a . Tämä voidaan ilmaista myös $(\sqrt{a})^2 = a$.

Rajoitumme lukiokursseilla käsittelemään reaalitykkuja, emmekä voi ottaa neliöjuurta negatiivisesta luvusta, koska jokaisen reaalityluvun neliö on positiivinen tai nolla. (Toisin sanoen ei ole esimerkiksi mitään sellaista reaalitylukua a , että $a^2 = -2$.) Huomionarvoista on tällöin, että parillisen juuren tuloksena ei voi myöskään olla negatiivinen luku.

ESIMERKKI 1.71

Laske

- a) $\sqrt{4}$
- b) $\sqrt{144}$
- c) $\sqrt{4471}$.

Ratkaisu. a) Laskimella tai päässä laskemalla saadaan, että $\sqrt{4} = 2$, koska $2 \geq 0$ ja $2^2 = 4$.

b) $\sqrt{144} = 12$. Tämä voidaan vielä tarkistaa laskemalla $12^2 = 12 \cdot 12 = 144$.

c) $\sqrt{4471} \approx 66,9$. Vertailun vuoksi laskimella saadaan myös $67 \cdot 67 = 4489$.

Vastaus. a) 2

b) 12

c) 66,9

KUUTIOJUURI

Kuution tilavuus on a . Halutaan tietää, mikä on kyseisen kuution sivun pituus. Vastausta tähän kysymykseen kutsutaan luvun $a \geq 0$ **kuutiojuureksi** ja merkitään $\sqrt[3]{a}$. Luvun a kuutiojuuri on myös yhtälön $x^3 = a$ vastaus.

Kuutiojuuri

Luvun a kuutiojuuri on luku, jonka kuutio on a . Tämä voidaan ilmaista myös $(\sqrt[3]{a})^3 = a$.

Jos $a < 0$, niin kysymys kuutiosta jonka tilavuus on a , ei ole mielekäs. Tästä huolimatta kuutiojuuri määritellään myös negatiivisille luvuille. Syy tähän on, että yhtälöllä $x^3 = a$ on tässäkin tapauksessa yksikäsitteinen ratkaisu. Positiivisen luvun kuutiojuuri on aina positiivinen ja negatiivisen luvun kuutiojuuri on aina negatiivinen luku. Kuutiojuuren voi siis ottaa mistä tahansa reaaliluvusta.

ESIMERKKI 1.72

Laske

a) $\sqrt[3]{27}$

b) $\sqrt[3]{1\,397}$

c) $\sqrt[3]{2\,197}$.

Ratkaisu. a) Laskimella tai päässä laskemalla saadaan, että $\sqrt[3]{27} = 3$, koska $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

b) $\sqrt[3]{1\,397} \approx 11,18$.

c) $\sqrt[3]{2\,197} = 13$

Tämä voidaan vielä tarkistaa laskemalla $13^3 = 13 \cdot 13 \cdot 13 = 2\,197$.

Vastaus. a) 3

b) 11,18

c) 13

KORKEAMMAT JUURET

Yhtälön $x^n = a$ ratkaisujen avulla voidaan määritellä n :s **juuri** mille tahansa positiiviselle kokonaisluvulle n . Neliö- ja kuutiojuurten tapauksessa voidaan kuitenkin huomata, että kuutiojuuri on määritelty kaikille luvuille, mutta neliöjuuri vain epänegatiivisille luvuille. Tämä toistuu myös korkeammissa juurissa: parilliset ja parittomat juuret on määritelty eri joukoissa.

Juurimerkinnällä $\sqrt[n]{a}$ (luetaan n :s juuri luvusta a) tarkoitetaan lukua, joka toteuttaa ehdon $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Jotta juuri olisi yksikäsitteisesti määritelty, asetetaan lisäksi, että parillisessa tapauksessa n :s juuri tarkoittaa kyseisen yhtälön epänegatiivista ratkaisua.

Parillinen juuri

Kun n on parillinen luku, luvun $a \geq 0$ n :s juuri on luku $b \geq 0$, jonka n :s potenssi on a , eli $b^n = a$. Lukua b merkitään $\sqrt[n]{a}$, eli $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Edelleen, kun n on parillinen luku, n :ttä juurta ei ole määritelty negatiivisille luvuille.

Luvun toista juurta, eli neliöjuurta $\sqrt[2]{a}$ merkitään yleensä yksinkertaisemmin $\sqrt{a}$.

Pariton juuri

Kun n on pariton luku, luvun $a \in \mathbb{R}$ n :s juuri on yksikäsitteinen luku $b \in \mathbb{R}$, jonka n :s potenssi on a , eli $b^n = a$. Lukua b merkitään $\sqrt[n]{a}$, eli $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Erityisesti n :s juuri on määritelty parittomilla n myös negatiivisille luvuille toisin kuin n :s juuri parillisilla n .

Korkeampien juurten laskeminen tapahtuu tavallisesti laskimella kuin myös juurenotto suhteellisen monimutkaisista luvuista ja lausekkeista.

ESIMERKKI 1.73

Laske

a) $\sqrt[4]{256}$

b) $\sqrt[5]{-243}$

c) $\sqrt[4]{-8}$.

Ratkaisu. a) Laskimella saadaan $\sqrt[4]{256} = 4$, koska $4^4 = 256$.

b) Laskimella $\sqrt[5]{-243} = -3$, koska $(-3)^5 = -243$.

c) Luvun -8 neljäs juuri $\sqrt[4]{-8}$ ei ole määritelty, koska minkään luvun neljäs potenssi ei ole negatiivinen.

Vastaus. a) 4

b) -3

c) ei määritelty

JUURTEN LASKUSÄÄNNÖT

Juurille on olemassa laskusääntöjä, jotka voivat auttaa sieventämisessä ja ratkaisujen löytämisessä.

Laskusäännöt

1. Ehdolla, että $x \geq 0$, $y > 0$ ja m sekä n ovat positiivisia kokonaislukuja.

1.1. $\sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{y} = \sqrt[m]{xy}$

1.2. $\frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[m]{y}} = \sqrt[m]{\frac{x}{y}}$

1.3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

Lisäksi parillisilla $m:n$ arvoilla $\sqrt[m]{x^m} = |x|$, missä merkkintä $|x|$ tarkoittaa luvun x itseisarvoa. Itseisarvo ilmaisee lukusuoralla luvun etäisyyttä nolasta, joten se on aina epänegatiivinen.

ESIMERKKI 1.74

- a) $\sqrt[6]{4^6} = |4| = 4$
- b) $\sqrt[2]{(-5)^2} = |-5| = 5$
- c) $\sqrt[12]{0^{12}} = |0| = 0$

Itseisarvo määritellään tarkemmin luvussa 3.1.

Laskusäännöt perustuvat juuren määritelmään ja potenssin laskusääntöihin. Esimerkiksi määritelmän mukaan $\sqrt[m]{xy}$ on sellainen luku, että $(\sqrt[m]{xy})^m = xy$. Luku $\sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{y}$ täyttää edellisen vaatimuksen, sillä $(\sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{y})^m = (\sqrt[m]{x})^m \cdot (\sqrt[m]{y})^m = xy$.

ESIMERKKI 1.75

Laske

- a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{48}$
- b) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$
- c) $\sqrt[x]{\sqrt{4^x}}$, missä $x \in \mathbb{N}$
- d) $\sqrt[8]{515^8}$.

Ratkaisu. a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{48} = \sqrt{3 \cdot 48} = \sqrt{144} = 12$

b) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{32}{2}} = \sqrt[4]{16} = 2$

c) $\sqrt[x]{\sqrt{4^x}} = \sqrt[x]{4^{x/2}} = \sqrt[x]{4^{x/2}} = \sqrt{4} = 2$

d) $\sqrt[8]{515^8} = |515| = 515$

Vastaus. 12

a.a) 2

b) 2

c) 515

Sievennystapana on, että juuren sisälle jätetään mahdollisimman yksinkertainen (itseisarvoltaan pieni, vähän numeroita sisältävä) luku. Tällöin pyritään jakamaan juurrettava alkulukutekijöihin, joista yhden tai useamman potenssi vastaava otetun juuren kertalukua. Vaikeissa tapauksissa sopivan tulomuodon etsimiseen voi käyttää

esimerkiksi laskinta. Huomaa, että oikeita lopullisia vastauksia on vain yksi oikea, eikä optimaalisinta tulomuotoa tarvitse keksiä heti ensimmäisenä.

ESIMERKKI 1.76

Sievennä juurilausekkeet.

a) $\sqrt{20}$

b) $\sqrt{\frac{9}{16}}$

c) $\sqrt[3]{120}$

d) $\sqrt{10}$

Ratkaisu. a) Koska 20 voidaan kirjoittaa tulona $4 \cdot 5$, on $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5}$.

Juurten tulosäännön nojalla tämä voidaan kirjoittaa kahden neliöjuuren tulona $\sqrt{4}\sqrt{5}$, joka sievenee muotoon $2\sqrt{5}$, koska luku neljä on neliöluku.

b) $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{4^2}} = \frac{3}{4}$

c) Kirjoitetaan luku 120 tulona, jossa esiintyisi jokin kuutioluku, eli jonkin kokonaisluvun kolmas potenssi. Esimerkiksi $120 = 8 \cdot 15$ kelpaa, sillä $8 = 2^3$. Tällöin $\sqrt[3]{120} = \sqrt[3]{8 \cdot 15} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 15} = \sqrt[3]{2^3} \sqrt[3]{15} = 2\sqrt[3]{15}$. (Luvun 15 kuutiojuurta ei enää sievennettyä.)

d) Luvun 10 alkulukukehitelmä on $10 = 2 \cdot 5$, ja siinä ei ole yhtäkään toista potenssia, josta voisi päästä neliöjuurella eroon. $\sqrt{10}$ on siis jo mahdollisimman sievässä muodossa.

Vastaus. a) $2\sqrt{5}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $2\sqrt[3]{15}$

d) $\sqrt{10}$ (valmiiksi sievin muoto)

Tehtäviä

Opi perusteet Laske

157. a) $\sqrt{64}$

b) $\sqrt{-64}$

c) $\sqrt[3]{64}$

d) $\sqrt[3]{-64}$

e) $\sqrt{100}$

158. a) $\sqrt[4]{81}$

b) $\sqrt[4]{-81}$

c) $\sqrt[5]{32}$

d) $\sqrt[5]{-32}$

e) $\sqrt[3]{1\,000}$

159. a) $\sqrt{81}$ b) $\sqrt[3]{27}$ c) $\sqrt[4]{-81}$ d) $\sqrt[8]{256}$

160. a) $\sqrt{2}\sqrt{8}$ b) $\sqrt{3}\sqrt{5}$ c) $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{25}$ d) $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{25}$

161. a) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{8}}$ c) $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}} \cdot \sqrt[3]{4}$

162. Laske $\sqrt{8\,100}$ päässä ajattelemalla juuretettava luku sopivana tulona.

163. Pienen kuution sivu on puolet ison kuution sivusta. Kuinka pitkä pienen kuution sivu on, jos ison kuution tilavuus on 64 yksikköä?

Hallitse kokonaisuus Laske.

164. a) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{35}}$ b) $\frac{\sqrt{64}-\sqrt{9}}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{2\cdot\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}}$

165. a) $\frac{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{\sqrt{15}}$ b) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

166. Kumpi juurista on suurempi? Arvaa ja laske. a) $\sqrt[3]{8}$ vai $\sqrt{16}$ b) $\sqrt{8}$ vai $2\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{64}$ vai $\sqrt[5]{32}$ d) $\sqrt[2]{121}$ vai $\sqrt[5]{243}$

167. Selvitä ilman laskinta, kumpi luvuista $3\sqrt{2}$ ja $2\sqrt{3}$ on suurempi.

168. Mitä tapahtuu neliöjuuren arvolle, kun juuretettavaa kerrotaan luvulla 100? Miten tulos yleistyy?

169. Laske neliöjuuret laskimella.

a) $\sqrt{320}$, b) $\sqrt{15}$, c) $\sqrt{71}$

170. Oletetaan, että suorakaiteen leveyden suhde korkeuteen on 2 ja suorakaiteen pinta-ala on 10. Mikä on suorakaiteen leveys ja korkeus?

171. Etsi luku $a > 0$, jolle $a^4 = 83\,521$.

172. Laske luvun 10 potensseja: $10^1, 10^2, 10^3, 10^4, \dots$. Kuinka monta nollaa on luvussa 10^n ? Laske sitten $\sqrt[6]{1\,000\,000}$ ja $\sqrt[10]{10\,000\,000\,000}$.

173. Onko annettu juuri määritelty kaikilla luvuilla a ? Millaisia arvoja juuri voi saada luvusta a riippuen?

a) $\sqrt[4]{a^2}$ b) $\sqrt[4]{-a^2}$ c) $\sqrt[4]{(-a)^2}$ d) $-\sqrt[4]{a^2}$

174. Onko annettu juuri määritelty kaikilla luvuilla a ? Millaisia arvoja juuri voi saada luvusta a riippuen?

a) $\sqrt[5]{a^2}$ b) $\sqrt[5]{a^3}$ c) $\sqrt[5]{-a^2}$ d) $-\sqrt[5]{a^2}$

175. Etsi positiivinen rationaaliluku a , jolla a) $\sqrt{a}\sqrt{2} = 4$ b) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{3} = 9$.

176. Anna esimerkki sellaisista luvuista a ja b , että $\sqrt{a^b} \neq \sqrt{a}^b$.

177. Etsi jotkin erisuuret ykköstä suuremmat luonnolliset luvut a ja b , jolla

a) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ on jokin luonnollinen luku

b) $\sqrt[b]{a} = 2$.

Lisää tehtäviä

178. Sievennä $(3 + \sqrt{3}x)^4 : (\sqrt{3} + x)^3$.

179. Laske laskimella likiarvot viiden merkitsevän luvun tarkkuudella. Mikä yhteys luvuilla on? a) $\sqrt{1^2 + 1^2}$ b) $\frac{\sqrt{3^2 + 3^2}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{9^2 + 9^2}}{9}$

180. Etsi jotkin erisuuret luonnolliset luvut a ja b , jolla $\frac{\sqrt{\sqrt{a}b}}{\sqrt{a}} = 1$.

181. Osoita vastaesimerkin avulla, että seuraavat opiskelijat ovat erehtyneet:

a) Mikael: ”Jos n :s juuri korotetaan johonkin muuhun potenssiin kuin n , myös tuloksessa esiintyy välttämättä juuri. Esimerkiksi $\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$ ja $\sqrt[5]{3^6} = 3\sqrt[5]{3}$.”

b) Raisa: ”Neliöjuuria sisältävän summalausekkeen voi aina korottaa toiseen, jolloin neliöjuurista pääsee eroon. Esimerkiksi $\sqrt{5^2} = 5$ ja $(\sqrt{2} + \sqrt{8})^2 = 18$.”

182. Sievennä

a) $\sqrt{\sqrt[3]{27}}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt[16]{\sqrt{2}^{16^2}}}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{\sqrt[6]{42^{22}}}}}}^3$

1.11 Murtopotenssi

Seuraavaksi tutkitaan potenssin käsitteen laajentamista tilanteeseen, jossa eksponenttina on rationaaliluku – erityisesti murtoluku. Esimerkiksi voidaan pohtia, mitä tarkoittaa merkintä $2^{\frac{1}{3}}$. Potenssin laskusääntöjen perusteella

$$(2^m)^n = 2^{mn}, \text{ kun } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Siten on luonnollista ajatella, että **murtopotenssille** $2^{\frac{1}{3}}$ pätee

$$(2^{\frac{1}{3}})^3 = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2.$$

Koska luvun 2 kuutiojuuri toteuttaa yhtälön $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$, täytyy siis asettaa $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$. Yleisemmin asetetaan $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, kun n on positiivinen kokonaisluku ja $a \geq 0$.

Kaavan on edelleen luontevaa ajatella yleistyvän niin, että esimerkiksi

$$(2^{\frac{1}{3}})^2 = 2^{\frac{2}{3}}.$$

Yleisemmin otetaan murtopotenssin $a^{\frac{m}{n}}$ määritelmäksi

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m,$$

kun m ja n ovat kokonaislukuja ja $n > 0$.

Murtopotenssimerkinnät

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \text{ kun } a \geq 0.$$

Erityisesti $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m, \text{ kun } a > 0.$$

Kun murtolukueksponentit määritellään näin, kaikki aikaisemmat potenssien las-

kusäännöt ovat sellaisenaan voimassa myös niille. Esimerkiksi kaavat

$$a^q \cdot a^q = a^{p+q}, \quad (a^p)^q = a^{pq}, \quad (ab)^q = a^q b^q$$

pätevät kaikille rationaaliluvuille p ja q .

Huomautus määrittelyjoukosta

Murtopotenssimerkintää käytettäessä vaaditaan, että $a \geq 0$ myös silloin, kun n (eli juuren kantaluku) on pariton. Syy tähän on seuraava. Esimerkiksi $\sqrt[3]{-1} = -1$, koska $(-1)^3 = -1$, mutta lauseketta $(-1)^{\frac{1}{3}}$ ei ole tällöin määriteltä. Murtopotenssimerkinän määrittelystä voi tällöin seurata yllättäviä ongelmia:

$$-1 = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{6}} = 1^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{1} = 1.$$

Luvun $\frac{1}{3}$ lavennus muotoon $\frac{2}{6}$ on ongelman ydin, mutta murtolukujen lavennussäännöistä luopuminen olisi myös hankalaa. Siksi sovitaan, ettei murtopotenssimerkintää käytetä, jos kantaluku on negatiivinen.

Nolla kantalukuna taas aiheuttaa ongelmia, jos eksponentti on negatiivinen. Esimerkiksi

$$0^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{0^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{0},$$

jota ei ole määriteltä.

ESIMERKKI 1.77

Muuta lausekkeet murtopotenssimuotoon.

a) $\sqrt[5]{3}$

b) $\sqrt[4]{a^7}, a > 0$

Ratkaisu. a) $\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$

b) $(\sqrt[4]{a})^7 = (a^{\frac{1}{4}})^7 = a^{\frac{7}{4}}$

ESIMERKKI 1.78

Sievennä lauseke $8^{\frac{2}{3}}$.

Ratkaisu. $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

Tehtäviä

Opi perusteet Muuta lausekkeet murtopotenssimuotoon.

183. a) $\sqrt[3]{a}$

b) $\sqrt[6]{a}$

c) $\sqrt[n]{a}$

184. a) $(\sqrt[3]{z})^6$

b) $(\sqrt[6]{y^3})$

c) $(\sqrt[5]{b})^2$

d) $(\sqrt[16]{ö^4})$

Sievennä.

185. a) $x^{\frac{1}{5}}$

b) $x^{\frac{4}{3}}$

c) $x^{\frac{8}{4}}$

d) $x^{\frac{25}{100}}$

186. a) $9^{\frac{1}{2}}$

b) $8^{\frac{1}{3}}$

c) $4^{\frac{3}{2}}$

d) $81^{\frac{3}{4}}$

Hallitse kokonaisuus

187. (YO S00/1) Sievennä seuraavat lausekkeet.

a) $(x^{(n-1)})^{(n-1)} \cdot (x^n)^{2-n}$

b) $\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a^5})$

188. Sievennä

a) $x^{-\frac{1}{3}}$

b) $x^{\frac{5}{-2}}$

c) $x^{3\frac{1}{2}}$

d) $x^{2\frac{4}{7}}$

189. Laske

a) $4^{\frac{3}{4}}$

b) $2^{\frac{5}{1}}$

c) $16^{\frac{2}{3}}$

d) $5^{\frac{5}{3}}$

190. Muuta murtopotenssimuotoon.

a) $\sqrt{\sqrt{k}}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{k}}$

c) $\sqrt{m\sqrt{m}}$

d) $\sqrt[5]{m\sqrt[7]{m}}$

191. Laske $x^{\frac{4}{3}}$, kun tiedetään, että

a) $x = 27$

b) $x^{\frac{3}{4}} = 27$

c) $x^{-\frac{3}{4}} = 27$

d) $x^{-\frac{4}{3}} = 27$

192. Sievennä $4 \cdot \sqrt[xy]{\frac{2x^2}{(2x)^2}}$

193. Sievennä $(\frac{2^{\frac{x}{y}}}{2^{\frac{y}{x}}})^{xy}$

194. Sievennä. $\sqrt[3]{x^{\frac{1}{x}} \cdot x^{\frac{2}{x}}}$

Lisää tehtäviä

195. Sievennä.

a) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^2}}$

b) $\sqrt[5]{q^2 \sqrt{q}}$

c) $\left(\sqrt{P^4 \sqrt{P}}\right)^3$

196. ★ Oletetaan, että $a \leq 0$. Sievennä

a) $\frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}}$

b) $\sqrt{\frac{\sqrt{a^2} \sqrt[3]{a^6}}{4a}}$

c) $\sqrt[7]{\frac{a - \sqrt{a^2}}{a^0}}$

d) $\sqrt{\sqrt{a^3} \left(\frac{a^7}{\sqrt[5]{a^3}}\right)^0 \sqrt{\frac{a^5}{a^2}}}$

197. ★ Tutki laskimella, miten laskutoimitukset

$$x^x, \quad x^{x^x}, \quad x^{x^{x^x}}, \quad \dots$$

käyttäytyvät, kun eksponenttien määrää kasvatetaan mielivaltaisen suureksi.

a) Tutki, mitä tapahtuu tapauksissa $x = 1,3$, $x = 1,7$ ja $x = 0,05$.

b) Millä luvun x positiivisilla arvoilla potenssitornien arvot vakiintuvat tiettyyn lukuun?

198. ★ Potenssitornissa $x^{x^{x^{x^{\dots}}}}$ on äärettömän monta päällekkäistä eksponenttia.

Yhtälöllä $x^{x^{x^{x^{\dots}}}} = 2$ on yksi ratkaisu. Etsi se.

1.12 Reaaliluvut lukusuoralla

Juurten ja murtopotenssien kohdalla on huomattava, että ainoastaan joidenkin juurten ja murtopotenssien arvot ovat rationaalilukuja. Itse asiassa juurilla on seuraava mielenkiintoinen ominaisuus, jota ei tällä kurssilla todisteta:

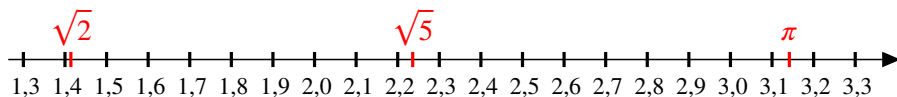
Ehto juurien irrationaalisuudelle

Jos $m, n \in \mathbb{Z}$ ja $\sqrt[m]{n} \notin \mathbb{Z}$, niin $\sqrt[m]{n} \notin \mathbb{Q}$.

Toisin sanottuna, jos kokonaisluvusta otettu kokonaislukujuuri ei ole kokonaisluku, niin se on aina irrationaaliluku.

Tämä tarkoittaa esimerkiksi sitä, että koska mikään kokonaisluku toiseen potenssiin korotettuna ei ole 2, niin $\sqrt{2}$ on väistämättä irrationaaliluku. Irrationaalilukuja tulee siis matematiikassa vastaan varsin usein.

Irrationaalilukujen hahmottamista helpottaa se, että ne voidaan sijoittaa lukusuoralle rationaalilukujen tapaan.



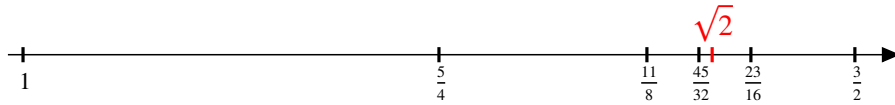
Reaalilukujen joukko muodostuu rationaalilukujen ja irrationaalilukujen joukoista. Havainnollisesti voidaan sanoa, että reaalilukujen joukko sisältää kaikki lukusuoran luvut.

Rationaaliluvut eivät täytä koko koko reaalilukusuoraa, mutta niitä on niin tiheässä, että jokaisen kahden eri reaaliluvun välissä on rationaalilukuja. Jokaiselle irrationaaliluvulle voidaan löytää mielivaltaisen lähellä olevia rationaalilukuarvioita. Tätä kutsutaan irrationaalilukujen approksimoinniksi rationaaliluvuilla. Esimerkiksi lukua π voidaan halutusta tarkkuudesta riippuen approksimoida rationaaliluvuilla

3; 3,1; 3,14; 3,142; 3,1416; 3,14159; 3,141593; ...

tai lukua $\sqrt{2}$ rationaaliluvuilla

$$1; \quad \frac{3}{2}; \quad \frac{5}{4}; \quad \frac{11}{8}; \quad \frac{23}{16}; \quad \frac{45}{32}; \quad \dots$$



Reaalilukuja koskevat laskusäännöt

Kaikki rationaalilukuja koskevat laskusäännöt pätevät myös reaaliluvuille.

Väite on uskottava, sillä reaalilukuja voi aina approksimoida mielivaltaisen tarkasti rationaaliluvuilla. Väitteen tarkempi perusteleminen ei tämän kurssin työkaluilla vielä onnistu.

Siinä missä rationaalilukujen desimaaliesitykset ovat päättyviä tai jaksollisia, ovat irrationaalilukujen desimaaliesitykset päättymättömiä ja jaksottomia. Monissa tapauksissa on hyvin vaikeaa osoittaa luku irrationaaliseksi. Tällöin vaaditaan keinoja, jotka eivät kuulu tämän kurssin laajuuteen.

Luvun

$$\sqrt{2} \approx 1,414213562373095048801688724209 \dots$$

desimaaliesityksessä on kyllä toistuvia kohtia, esimerkiksi numeropari 88 esiintyy kahdesti. Siinä ei kuitenkaan ole jaksoa, jonka luvut toistuisivat yhä uudestaan samassa järjestyksessä, kuten luvussa 3,80612312312312 ... (Muista, että kolmen pisteen merkintää käytettäessä tulee olla yleisesti selvillä, miten desimaalikehitelmä jatkuu.)

Tehtäviä

199. Sijoita lukusuoralle luvut

$$-3, 1, 4, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi \text{ ja } \sqrt{\pi}.$$

200. Piirrä samankokoiset kuvat lukusuoran väleistä, joiden päätepisteet ovat

- a) 0 ja 1
- b) 0 ja 0,1
- c) 0 ja 0,01.

Miten b-kohdan väli sijoittuu a-kohdan välille? Entä c-kohdan väli b-kohdan välille? Mikä olisi samaa logiikkaa käyttäen seuraava väli ja miten se sijoittuisi c-kohdan välille? Havainnollista piirtämällä.

201. Mihin joukoista $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ seuraavat luvut kuuluvat?

- a) -5
- b) $\frac{8}{2}$
- c) π
- d) 0,888 ...
- e) 2,995
- f) $\sqrt{2}$

202. Ovatko seuraavat luvut rationaalilukuja vai irrationaalilukuja? Kunkin desimaalit noudattavat yksinkertaista sääntöä.

- a) 0,123456789101112131415 ...
- b) 2,415115115115115115115 ...
- c) 1,010010001000010000010 ...

203. a) Luku 144 on luonnollinen luku ja siten reaaliluku. Onko sen vastaluku luonnollinen luku?

b) Luku 144 on kokonaisluku ja siten reaaliluku. Onko sen käänteisluku kokonaisluku?

c) Luku 144 on rationaaliluku ja siten reaaliluku. Onko sen käänteisluku rationaaliluku?

204. Mikä on pienin lukua -3 suurempi luku

- a) kokonaislukujen
- b) luonnollisten lukujen
- c) reaalilukujen joukossa?

205. Kuinka monta

- a) luonnollista lukua
- b) kokonaislukua
- c) reaalilukua

on reaalilukujen $-\pi$ ja π välillä?

206. ★ Osoita, että

- a) jokaisen kahden rationaaliluvun välissä on rationaaliluku
- b) jokaisen kahden rationaaliluvun välillä on irrationaaliluku
- c) jokaisen kahden irrationaaliluvun välissä on rationaaliluku
- d) jokaisen kahden irrationaaliluvun välissä on irrationaaliluku.
- e) Perustele edellisten kohtien avulla, että minkä tahansa kahden luvun välissä on äärettömän monta rationaali- ja irrationaalilukua.

LUKU 2

Yhtälöt

2.1 Yhtälö

Yhtälö on väite kahden lausekkeen yhtäsuuruudesta.

ESIMERKKI 2.79

a) $x + 3 = \frac{5}{7} + 2$ on yhtälö, joka väittää lausekkeiden $x + 3$ ja $\frac{5}{7} + 2$ olevan lukuarvoltaan yhtä suuret.

b) $2 = \frac{4}{2}$ on yhtälö, joka väittää, että luku 2 voidaan esittää myös muodossa $\frac{4}{2}$.

Yhtälön päteminen

Jos yhtälön kummankin puolen lausekkeen arvo on sama, sanotaan, että **yhtälö pätee** tai että yhtälö on tosi.

ESIMERKKI 2.80

a) Yhtälö $5 = 3$ ei päde.

b) Yhtälö $t = t$ on tosi kaikilla muuttujan t lukuarvoilla, sillä jokainen luku on varmasti yhtä suuri itsensä kanssa.

c) Yhtälö $x = x + 1$ on epätosi kaikilla x :n arvoilla, koska mikään luku ei voi olla yhtä suuri kuin sitä yhtä suurempi luku.

d) Yhtälö $x + 2 = 0$ pätee vain siinä tapauksessa, että $x = -2$.

Yhtälöiden luokittelu

Aina tosi yhtälö Esimerkiksi yhtälöt $8 = 8$ ja $x = x$. Tilanteesta kytetään myös

termiä **identtisesti tosi**.

Joskus tosi yhtälö Esimerkiksi yhtälö $x + 4 = 7$ on tosi, kun $x = 3$, ja epätosi muulloin.

Ei koskaan tosi yhtälö Esimerkiksi yhtälö $0 = 1$

Matematiikan sovelluksissa näistä tärkeimpiä ovat joskus (eli ehdollisesti) todet yhtälöt.

Yhtälöihin liittyviä käsitteitä

Tuntematon Luku, jonka arvoa ei tiedetä. Tuntemattomia merkitään vaihtelevilla symboleilla. Jos tuntemattomia on vain yksi, sitä merkitään yleensä kirjaimella x (alunperin kreikkalainen χ , *khi*).

Yhtälön ratkaisu(t) Muuttujan arvo(t), jolla yhtälö pätee. Kutsutaan myös yhtälön juuriksi. (Nimityksellä ei ole mitään tekemistä juurenottolaskutoimituksen kanssa.)

Yhtälön ratkaiseminen Kaikkien yhtälön ratkaisujen selvittäminen.

Huomioi, että yhtälössä voi olla useitakin eri tuntemattomia. Kaikki kirjaimet eivät myöskään ole välttämättä tuntemattomia, vaan niillä voidaan tarkoittaa myös vakioita eli muuttumattomia lukuarvoja. Esimerkiksi fysiikassa käytetään usein eri kirjaimia merkitsemään eri luonnonvakioita.

ESIMERKKI 2.81

Tarkastellaan legendaarista fysiikan yhtälöä $E = mc^2$. Tässä yhtälössä on vakio c eli valonnopeus, joka on luonnonvakio eikä siis (nykytiedon mukaan) muutu. Lisäksi yhtälössä on muuttujat E eli energia ja m eli massa. Riippuu käsiteltävästä tilanteesta, ovatko energia ja massa vakioita vai muuttujia, ja ratkaistavana tuntemattomana voi eri tilanteessa toimia mikä tahansa: E , m tai c .

Yhtälön muokkaaminen

Koska yhtälön puolet ovat yhtä suuret, eli tarkoittavat täsmälleen samaa asiaa, niin jonkin yhtälön molemmille puolille tehdyn laskutoimituksen jälkeen ne ovat edelleen yhtä suuret.

ESIMERKKI 2.82

- Yhtälö $3x - 12 = \frac{6}{2x-2}$ on yhtäpitävä yhtälön $0 = 0$ kanssa, sillä se saadaan tähän muotoon tekemällä yhtäpitävyyden molemmille puolille aina samat laskutoimitukset. Yhtälön yksinkertaisemmasta esityksestä $0 = 0$ nähdään, että muuttujan x arvo ei vaikuta yhtälön ratkaisuihin. Toisin sanoen puolet ovat aina samat, olipa muuttuja x mikä tahansa luku. Yhtälö on siis aina tosi.
- Yhtälö $3x - 11 = \frac{6}{2x-2}$ on yhtäpitävä yhtälön $0 = 1$ kanssa. Jälkimmäisestä muodosta nähdään, ettei yhtälö voi olla tosi millään muuttujan x arvolla, sillä yhtälön muodossa $0 = 1$ ei esiinny muuttujaa x . Täten x ei vaikuta yhtälön ratkaisuihin. Yhtälö on siis aina epätosi.
- Yhtälö $3x - 11 = 6(x - 2)$ on yhtäpitävä yhtälön $x = \frac{1}{3}$ kanssa. Yhtälö on siis joskus tosi: täsmälleen silloin kun $x = \frac{1}{3}$. Tämä voidaan tarkistaa sijoittamalla yhtälöön x :n paikalle arvo $\frac{1}{3}$, jolloin yhtälön vasen ja oikea puoli ovat yhtä suuret.

Yhtälöitä käyttämällä voidaan mallintaa monia käytännön tilanteita.

ESIMERKKI 2.83

Yksinkertainen esimerkki yhtälön käyttämisestä on matkaan kuluvan ajan ratkaiseminen matkan pituuden ja nopeuden avulla, mitä teimme jo yksikköluvussa perustuen siihen, että saamme tulokseksi sopivan yksikön. Kuljettu matka on nopeus kerrottuna kuljetulla ajalla. Jos matka on 15 kilometriä ja nopeus 5 km/h, voimme merkitä $5 \cdot t = 15$, jossa t on matkaan kuluvaa aikaa kuvaava **muuttuja**.

Toisaalta yhtälöjä voidaan käyttää myös abstraktimpien pulmien ratkaisuun.

ESIMERKKI 2.84

Halutaan tietää, onko olemassa lukua, jonka kolmas potenssi jaettuna kolmella on yhtä suuri kuin sen toinen potenssi jaettuna kahdella. Tällöin merkitään $\frac{x^3}{3} = \frac{x^2}{2}$.

ESIMERKKI 2.85

Tarkastellaan yhtälöä $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$. Yhtälössä on yksi muuttuja x ja neljä termiä: x^3 , $-2x^2$, $-x$ ja $+2$. Yhtälön *eräs* ratkaisu on $x = 1$, sillä $1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 0$. Myös $x = 2$ on kyseisen yhtälön ratkaisu, sillä

$2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 0$. Tuntemattomalle x voidaan siis joissain tapauksissa löytää useita arvoja, jotka toteuttavat yhtälön.

YHTÄLÖN RATKAISEMINEN

Tyypillinen tapa ratkaista yhtälöitä on kirjoittaa ne ilmaistuna toisella tavalla. Käytännössä tämä tarkoittaa niiden muokkaamista siten, ettei alkuperäisen yhtälön paikkansapitävyys muutu. Tällä tavalla saadaan eri yhtälö, jolla on kuitenkin samat ratkaisut. Yleensä tavoitteena on saada yhtälö muotoon, jossa yhtäpitävyyden toisella puolella on vain haluttu muuttuja ilman kertoimia ja toisella puolella kaikki muu. Yhtälön ratkaisemiseksi näitä muunnoksia toistetaan, kunnes yhtälön ratkaisu on helposti luettavissa.

ESIMERKKI 2.86

Ratkaistaan aiemman esimerkin matkan kesto. Yhtälö on siis $5t = 15$, jossa t on aika, nopeus on 5 km/h ja matkan pituus 15 km. Jakamalla laskusääntöjen mukaan yhtälön molemmat puolet viidellä, saadaan yhtälö muotoon $t = 3$, joka on samalla kyseisen yhtälön ratkaisu.

ESIMERKKI 2.87

Ratkaistaan yhtälö $\frac{4\sqrt{x}a}{3} = 8a$, jossa a on vakio π eli yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $\frac{4\pi\sqrt{x}}{3} = 8\pi$.

$\frac{4\pi\sqrt{x}}{3} = 8\pi$	Jaetaan molemmat puolet luvulla $\frac{4}{3}$.
$\pi\sqrt{x} = \frac{8 \cdot 3 \cdot \pi}{4}$	Jaetaan molemmat puolet luvulla π .
$\sqrt{x} = \frac{24}{4}$	Sievennellen.
$\sqrt{x} = 6$	Tässä huomataan, että $\sqrt{36} = 6$.

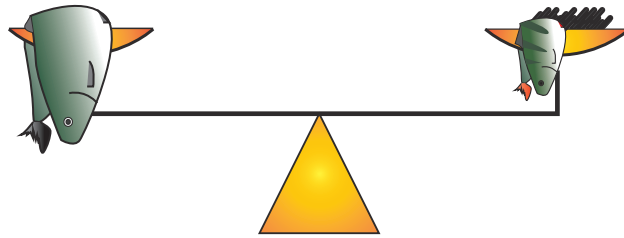
Joten yhtälöllä on ratkaisu $x = 36$.

Yhtälön ratkaisemista voidaan ajatella havainnollisemmin kuvittelemalla orsivaaka, joka on tasapainossa. Vasemmalla ja oikealla puolella on eripainoisia esineitä, mutta ne painavat yhteensä yhtä paljon. Jos molemmille puolille lisätään nyt saman verran

painoa, vaaka on yhä tasapainossa. Samalla tavalla yhtälön molemmille puolille on sallittua lisätä sama luku.

ESIMERKKI 2.88

Kuvassa oleva vaaka on tasapainossa. Toisessa vaakakupissa on kahden kilon siika ja toisessa puolen kilon ahven sekä tuntematon määrä lakritsia. Kuinka paljon vaakakupissa on lakritsia?



Ratkaisu. Merkitään lakritsin määrää tuntemattomalla x . Tilannetta kuvaa yhtälö $2 = 0,5 + x$, joka muodostetaan vaa'an toiminnan ymmäryksen avulla: tasapainossa molemmissa vaakakupeissa tulee olla massaltaan yhtä paljon ainetta, eli massat (määrät) voidaan merkitä yhtä suuriksi.

Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} 2 &= 0,5 + x && | -0,5 \\ 2 - 0,5 &= x \\ 1,5 &= x \\ x &= 1,5 \end{aligned}$$

Vastaus. Lakritsia on 1,5 kg.

Mitään varsinaista ei virhettä yhtälönratkaisussa ei ole tehty niin kauan kuin sama operaatio tehdään aina yhtälön molemmille puolille, mutta vaatii rutiinia, jotta oppii, mitä laskutoimituksia kannattaa tehdä ja missä järjestyksessä. Seuraavassa joitakin yleisiä toimenpiteitä yhtälöiden ratkaisuun, joita voi soveltaa päästäkseen eteenpäin. Kyseessä ei ole mikään aina toimiva ratkaisuohe, vaan yleisiä vinkkejä.

Yleisiä yhtälönratkaisuperiaatteita

- 1) Kerro tuntematonta sisältävät lausekkeet pois nimittäjistä.
- 2) Yhdistä useat murtolausekkeet yhdeksi laventamalla ne samannimisiksi.
- 3) Siirrä tuntemattomia sisältävät yhtälön osat samalle puolelle ja ota tuntematon yhteiseksi tekijäksi.
- 4) Kumoa juuret ja murtopotenssit korottamalla yhtälö puolittain sopivaan potenssiin.
- 5) Sulkuja ei välttämättä aina kannata kertoa auki.
- 6) Yhtälö on ratkaistu vasta, kun jäljellä on enää vain yksi kappale tuntematonta suuretta, ja se sijaitsee yksin omalla puolellaan yhtälöä.

Usein on myös perusteltua yksinkertaisesti kokeilla tai arvata jokin yhtälön ratkaisu.

Tehtäviä

207. Ovatko seuraavat yhtälöt tosia, epätosia vai mahdollisesti tosia?

a) $1 = 1$

b) $\pi = 3,14$

c) $\sqrt[3]{27} = 3$

d) $t = t$

e) $t = t - 1$

f) $x = \frac{x}{2}$

g) $3 = \frac{6}{2}$

h) $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

i) $1^{9001} = 1$

j) $(-1)^{42} = -1$

k) $2y + 1 = 5$

208. Mainitse jokin

a) aina tosi yhtälö

b) joskus tosi yhtälö (ja milloin se on tosi)

c) aina epätosi yhtälö.

209. Onko -2 yhtälön $3x - 4 = 7 - 2x$ ratkaisu?

210. Tarkista, voivatko seuraavat tuntemattoman y arvot olla yhtälön $-y^3 + y = 0$ juuria.

a) $y = 0$

b) $y = 2$

c) $y = -1$

d) $y = 1$

e) $y = \sqrt[3]{2}$

211. Onko $x = \frac{1}{3}$ seuraavien yhtälöiden (eräs) ratkaisu?

a) $\frac{1}{3} - x = 0$

b) $x^2 = \frac{1}{9}$

c) $\frac{x}{x+1} = \frac{9}{2}$

d) $(-x)^3 = \frac{1}{27}$

e) $-x^3 = -\frac{1}{27}$

f) $125^x = 5$

212. Päteekö yhtälö, kun $a = 7$?

a) $a^5 - 13a^2 = a - 3 + 16166$

b) $\sqrt{a} = \frac{529}{200}$

c) $\sqrt[7]{ax} = 0$

213. a) Onko $x = 4$ yhtälön $x^3 = 64$ ratkaisu?

b) Onko $x = 2$ yhtälön $x^5 = 30$ ratkaisu?

c) Onko $x = -1$ yhtälön $x^4 - 3x + 2 = 0$ ratkaisu?

214. Kirjoita tilanne yhtälönä.

a) Kun lukuun kolme lisätään luku yksi, summaksi tulee luku neljä.

b) Massa m kaksinkertaistuu, minkä jälkeen uusi massa on 42 kilogrammaa.

c) Tuntemattoman x arvo on rationaalilukujen $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{3}$ summa.

d) Ympyrän kehän pituus p on $\pi:n$ ja ympyrän halkaisijan d tulo.

e) Luvun a ja sen käänteisluvun tulo on 1.

f) Kun lukuun k lisätään sen vastaluku, summaksi saadaan nolla.

g) Kun lukuun k lisätään sen vastaluku, summaksi saadaan yksi.

215. ★ Ratkaise yhtälö $x^2 = 16$.

2.2 Ensimmäisen asteen yhtälö

Siirrymme nyt tarkastelemaan tärkeää yhtälöiden erikoistapausta, ensimmäisen asteen yhtälöitä.

Ensimmäisen asteen yhtälö

Ensimmäisen asteen yhtälöksi kutsutaan yhtälöä, joka on esitettävissä muodossa $ax + b = 0$, jossa $a \neq 0$.

Yhtälötyypin nimi tulee siitä, että korkein potenssi, johon tuntematon x yhtälössä korotetaan, on 1. ($x^1 = x$)

ESIMERKKI 2.89

Seuraavat yhtälöt ovat kaikki ensimmäisen asteen yhtälöitä:

a) $2x = 4$

b) $5x + 3 = 0$

c) $x + 2 = 3x - 4$

Kaikki muotoa $ax + b = cx + d$ olevat yhtälöt, joissa $a \neq c$, ovat ensimmäisen asteen yhtälöitä. Tämä voidaan todistaa seuraavasti:

$$\begin{array}{ll} ax + b = cx + d & | \text{ Vähennetään molemmilta puolilta } cx + d. \\ ax + b - (cx + d) = 0 & | \text{ Avataan sulut ja järjestellään termejä uudelleen.} \\ ax - cx + b - d = 0 & | \text{ Otetaan yhteinen tekijä.} \\ (a - c)x + (b - d) = 0 \end{array}$$

Tämä on määritelmän mukainen ensimmäisen asteen yhtälö, koska $a \neq c$, eli $a - c \neq 0$.

Ensimmäisen asteen yhtälöt ratkaistaan kuten edellisessä kappaleessa esitettiin, eli tekemällä yhtälön molemmille puolille samoja toimenpiteitä, kunnes x saadaan selvitettyä.

ESIMERKKI 2.90

Yhtälön $7x + 4 = 4x + 7$ ratkaisu saadaan seuraavasti:

$$\begin{array}{ll} 7x + 4 = 4x + 7 & | \text{ Vähennetään molemmilta puolilta } 4x. \\ 3x + 4 = 7 & | \text{ Vähennetään molemmilta puolilta } 4. \\ 3x = 3 & | \text{ Jaetaan molemmat puolet luvulla } 3. \\ x = 1 \end{array}$$

Vastaus. $x = 1$

Ratkaisujen lukumäärä

Ensimmäisen asteen yhtälöllä on aina täsmälleen yksi ratkaisu.

ESIMERKKI 2.91

Yleinen lähestymistapa muotoa $ax + b = cx + d$ olevien yhtälöiden ratkaisuun:

- a) Vähennetään molemmilta puolilta cx ja otetaan x yhteiseksi tekijäksi. Saadaan yhtälö $(a - c)x + b = d$.
- b) Vähennetään molemmilta puolilta b . Saadaan yhtälö $(a - c)x = d - b$.
- c) Jaetaan molemmat puolet lausekkeella $(a - c)$. Saadaan yhtälö ratkaistuun muotoon $x = \frac{d-b}{a-c}$.

Vaikka yhtälössä olisi nimittäjiä, saattaa kyseessä silti olla ensimmäisen asteen yhtälö. Kerro aina yhtälön molemmat puolet nimittäjillä, jolloin niistä päästää eroon, ja yhtälö sievenee lopulta usein yksinkertaisemmaksi.

ESIMERKKI 2.92

- a) Yhtälössä $2/x = 4$ ainoana nimittäjänä on x . Kun sillä kerrotaan yhtälön molemmat puolet, x supistuu pois vasemmalta ja saadaan muoto $2 = 4x$, josta on helppo todeta, että kyseessä on ensimmäisen asteen yhtälö.

b) Yhtälössä $\frac{0,9}{x+1} = 3$ ainoana nimittäjä on lauseke $x + 1$. Kun sillä kerrotaan yhtälön molemmat puolet, $x + 1$ supistuu vasemmalta pois ja saadaan muoto $0,9 = 3(x + 1)$ eli $0,9 = 3x + 3$, joka selvästi on ensimmäisen asteen yhtälö.

c) Yhtälössä $(2x + 1)/(x^2 + 3) = 0$ ainoana nimittäjänä lauseke $x^2 + 3$. Kun yhtälö kerrotaan puolittain sillä, $x^2 + 3$ supistuu pois vasemmalta puolelta, ja oikealle puolelle jää edelleen nolla (koska mikä tahansa luku kertaa nolla on nolla). Saadaan yhtälö muotoon $2x + 1 = 0$, mikä on selvästi ensimmäisen asteen yhtälö.

ESIMERKKI 2.93

Myös kaikki seuraavat ovat ensimmäisen asteen yhtälöitä. (Huomaa kuitenkin, että nimittäjä ei voi olla nolla.)

a) $\frac{2}{x} = 5$

b) $v = \frac{s}{t}$

c) tiheys = $\frac{\text{massa}}{\text{tilavuus}}$

Ensimmäisen asteen yhtälöllä voidaan mallintaa monia yksinkertaisia käytännön tilanteita, ja kyseiset yhtälöt tulevat vastaan ihan vain matemaattisina työkaluina, joiden hallitseminen on välttämätön taito.

ESIMERKKI 2.94

Matti ja Teppo ovat veljeksiä. Teppo on 525 päivää vanhempi kuin Matti. Muodostetaan ensimmäisen asteen yhtälö, josta voidaan ratkaista Matin ikä sijoittamalla x :n paikalle Tepon ikä. Lasketaan saadulla yhtälöllä Matin ikä sinä päivänä, kun Teppo täyttää 50 vuotta. Oletetaan nyt, että vuodessa on 365 päivää.

Merkitään Tepon ikää päivissä x :llä ja Matin ikää päivissä y :llä. Tiedetään, että koska Teppo on 525 päivää vanhempi kuin Matti, niin $x = y + 525$. Koska tehtävässä pyydettiin yhtälöä, josta voidaan ratkaista Matin ikä, muokataan saatua ensimmäisen asteen yhtälöä hieman:

$$\begin{array}{ll}
 x = y + 525 & | \text{ Vähennetään puolittain 525.} \\
 x - 525 = y & | \text{ Tiedetään, että jos } a = b, \text{ niin } b = a. \\
 y = x - 525 &
 \end{array}$$

Nyt on saatu ensimmäisen asteen yhtälö, josta saadaan ratkaistua Matin ikä, kunhan vain tiedetään Tepon ikä. Koska x ja y ovat veljesten iät päivinä, muunnetaan hieman yksiköitä. 50 vuotta päivissä on $50 \cdot 365 = 18\,250$. Nyt saadaan

$$\begin{array}{ll}
 y = x - 525 & | \text{ Sijoitetaan } x\text{:n paikalle Tepon ikä } 18\,250 \text{ päivää.} \\
 y = 18\,250 - 525 & \\
 y = 17\,725 & | \text{ Muokataan vastausta informatiivisempaan muotoon.} \\
 y = 17\,520 + 205 & \\
 y = 48 \cdot 365 + 205 &
 \end{array}$$

Siis kysytty Matin ikä on 48 vuotta ja 205 päivää.

ESIMERKKI 2.95

Juna Helsingistä Jyväskylään kulkee 342 kilometrin matkan kolmessa tunnissa ja 23 minuutissa tasaista vauhtia. 10 minuuttia junan lähdön jälkeen auto lähtee Helsingistä Jyväskylään kulkien tasaista 100 kilometrin tuntivauhtia. Jyväskylään on Helsingistä maanteitse 272 kilometriä. Kuinka kauan auton lähdöstä on kulunut, kun juna ja auto ovat kulkeneet yhtä suuren osan omista matkoistaan?

Ratkaisu. Lasketaan aluksi junan nopeus

$$3 \text{ h } 23 \text{ min} = 12\,180 \text{ s}$$

$$\frac{342\,000 \text{ m}}{12\,180 \text{ s}} \approx 28,0788 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Muunnetaan lisäksi auton nopeus yksikköön $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (muuntokerroin 3,6).

$$100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 27,7778 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

10 minuuttia on 600 sekuntia.

Voidaan nyt muotoilla yhtälö käyttäen yksiköitä metri ja sekunti.

Tuntemattomaksi valitaan t , joka kuvaa aikaa sekunteina auton lähdöstä.

$$\frac{28,0788(t + 600)}{342\,000} = \frac{27,7778t}{272\,000}$$

Ratkaistaan yhtälö

$$\frac{27,7778t}{272\,000} = \frac{28,0788(t + 600)}{342\,000} \quad | \cdot 272\,000 \quad | \cdot 342\,000$$

$$342\,000 \cdot 27,7778t = 272\,000 \cdot 28,0788(t + 600)$$

$$9\,500\,007,6t = 7\,637\,433,6(t + 600)$$

$$9\,500\,007,6t = 7\,637\,433,6t + 4\,582\,460\,160 \quad | -7\,637\,433,6t$$

$$1\,862\,574t = 4\,582\,460\,160 \quad | : 1\,862\,574$$

$$t \approx 2\,460,28 \approx 2\,460$$

Muutetaan yksiköksi minuutit:

$$2\,460 \text{ s} = 41 \text{ min.}$$

Vastaus. 41 minuuttia

ESIMERKKI 2.96

Huvipuiston aluemaksu on neljä euroa, ja laitelippu maksaa myös viisi euroa. Ranneke, jolla pääsee rajatta laitteisiin ja joka sisältää aluemaksun, maksaa 34 euroa. Kuinka monessa laitteessa olisi käytävä, jotta ranneke olisi edullisempi ostos kuin yksittäiset laiteliput ja aluemaksu erikseen? Oletetaan, että jokaiseen laitteeseen tarvitaan vain yksi laitelippu.

Ratkaisu. Kyseessä on kaksi toisistaan poikkeavaa maksusuunnitelmaa. Selvitämme yhtälön avulla, millä laitekäyntien lukumäärällä (merkitään tätä esimerkiksi kirjaimella n) molemmat tavat ovat yhtä kalliita. Mallinamme sopivalla lausekkeella molempia: Jos käytetään vain yksittäisiä laitelippuja, jolloin täytyy maksaa myös aluemaksu, kokonaishinnaksi tulee $4 + 5n$, missä n on ostettujen laitelippujen määrä. Jos ostaa rannekkeen, kävijän maksama rahamäärä ei riipu laitekäyntien määrästä, vaan se on aina mainittu 34 euroa. Merkitään nämä maksusuunnitelmat yhtäsuuriksi, jolloin saadaan ensimmäisen asteen yhtälö $4 + 5n = 34$.

Ratkaistaan tästä n :

$$\begin{aligned} 4 + 5n &= 34 && | - 4 \\ 4 + 5n - 4 &= 34 - 4 \\ 5n &= 30 && | : 5 \\ \frac{5n}{5} &= \frac{30}{5} \\ n &= 6 \end{aligned}$$

Jos siis käydään kuudessa laitteessa (eli ostetaan kuusi laitelippua), on samantekevää, ostetaanko ranneke vai yksittäisiä lippuja (ja maksetaan aluemaksu). Jos käytäisiin laitteissa enemmän kuin kuusi kertaa, rannekkeen hinta ei kasva, mutta lippujen yhteishinta kasvaa. Kävijän tulisi siis käydä laitteissa vähintään seitseän kertaa, jotta ranneke olisi edullisempi.

Vastaus. Vähintään seitsemän kertaa

★ Yhtälöpari

Joissakin tilanteissa ratkaistavana on useampi tuntematon. Kuitenkin yhdestä yhtälöstä voi ratkaista korkeintaan yhden tuntemattoman kerrallaan, joten ratkaistaessa kahta tuntematonta tarvitaan kaksi yhtälöä. Yleisesti:

Useita tuntemattomia ja yhtälöitä

Jos ratkaistaan n tuntematonta, tähän tarvitaan vähintään n toisistaan riippumatonta yhtälöä.

Jos halutaan esimerkiksi selvittää, mitkä luvut x ja y toteuttavat sekä yhtälön $2x = y + 5$ ja toisaalta myös yhtälön $x - 10 = 4y + 2$, ratkaistaan nämä molemmat niin sanottuna **yhtälöparina**. Yleensä samanaikaisesti ratkottavat yhtälöt merkitään allekain seuraavasti:

$$\begin{cases} 2x = y + 5 \\ x - 10 = 4y + 2 \end{cases}$$

Yleinen, aina toimiva ratkaisumenetelmä yhtälöpareille on ratkaista jommasta kummasta yhtälöstä erikseen toinen tuntematon ja sijoitetaan saatu ratkaisu toiseen yhtälöön, jolloin yksi **tuntematon eliminoiduu** eli poistuu, jolloin ongelma yksinkertaistuu yhden tuntemattoman ratkaisuksi.

ESIMERKKI 2.97

Ratkaise yhtälöpari $2x = y + 5$; $x - 10 = 4y + 2$. Ratkaistaan molemmista yhtälöistä muuttuja x .

$$2x = y + 5$$

$$x = \frac{y + 5}{2}$$

$$x - 10 = 4y + 2$$

$$x = 4y + 12$$

Nyt yhtäsuuruusrelaation transitiivisuuden perusteella, koska $\frac{y+5}{2} = x$ ja toisaalta $x = 4y + 12$, saadaan yhtälö $\frac{y+5}{2} = 4y + 12$, joka osataan ratkaista.

$$\frac{y+5}{2} = 4y + 12$$

$$y + 5 = 2(4y + 12)$$

$$y + 5 = 8y + 24$$

$$y - 8y = 24 - 5$$

$$-7y = 19$$

$$y = -\frac{19}{7}$$

Nyt saatu y :n arvo voidaan sijoittaa jompaan kumpaan alkuperäiseen yhtälöön, esimerkiksi yhtälöön $2x = y + 5$, ja tästä saadaan ratkaistua myös x .

$$2x = -\frac{19}{7} + 5$$

$$2x = \frac{16}{7}$$

$$x = -\frac{8}{7}$$

Siis yhtälöparin ratkaisu on $x = \frac{8}{7}$ ja $y = -\frac{19}{7}$. Sijoittamalla voidaan tarkistaa, että luvut todellakin toteuttavat molemmat alkuperäiset yhtälöt..

Yhtälöparien ja yhtälöryhmien ratkaisuun ja geometriseen merkitykseen tutustutaan tarkemmin MAA4-kurssilla.

Tehtäviä

Opi perusteet

216. Mitä yhtälölle $ax + b = 0$ tapahtuu, jos kerroin a saa arvon nolla? Onko yhtälöllä ratkaisuja?

217. Ratkaise yhtälöistä tuntematon x .

a) $x + 4 = 5$

b) $1 - x = -3$

c) $7x = 35$

d) $-2x = 4$

e) $10 - 2x = x$

f) $9x + 4 = 6 - x$

g) $\frac{2x}{5} = 4$

h) $\frac{x}{3} + 1 = \frac{5}{6} - x$

218. a) $4x + 3 = -3x + 4$

b) $100x = 101x - 2$

c) $\frac{5}{6}x + \frac{4}{5} = x - 1$

d) $2 \cdot (x + 4) - x = x + 4$

e) $5 \cdot (x - 8) + \frac{3}{2} \cdot (x - 7) = 3x$

219. Ratkaise yhtälöt ja tarkista sijoittamalla.

a) $-2x + 5 = 2(5 + x)$

b) $4(x - 1) - 3x = 15 - 4x$

c) $6 - (2x + 3) = 3 - 2x$

d) $x - 100\,000 = -0,25x$

e) $10^6x - 3 \cdot 10^9 = 0$

f) $5(1 - x) = -5x + 3$

220. Huvipuistossa yksittäinen laitelippu maksaa 7 euroa, ja sillä pääsee yhteen laitteeseen. Rannekkeella pääsee käymään päivän aikana niin monessa laitteessa kuin haluaa, ja se maksaa 37 euroa. Kuinka monessa laitteessa on käytävä, jotta rannekkeen ostaminen kannattaa?

Hallitse kokonaisuus

221. Ratkaise yhtälöt ja tarkista sijoittamalla.

a) $\frac{8x}{3} = 12$

b) $3 - \frac{x}{4} = x$

c) $-\frac{7x}{8} = x + 2$

d) $x + 7 = 1 - \frac{x-1}{2}$

e) $\frac{2x-1}{3} - 1 = \frac{4x}{9}$

f) $\frac{x+5}{3} = x + 3 - \frac{2x+1}{4}$

222. Kaisa, Jonas, Aada ja Tomi menevät elokuviin. Elokuvalippu 3D-näytökseen maksaa 12 euroa. Viiden lipun sarjalippu maksaa 38 euroa.

a) Kannattaako heidän ostaa sarjalippu ja maksaa sillä elokuva vai ostaa liput suoraan tiskiltä?

b) Jos sarjalipun hinta jaetaan tasan kaikille niin, että Kaisa pitää ylijäävän lipun, paljonko Kaisa joutuu maksamaan sarjalipusta?

223. Ratkaise

a) $\frac{3x+6}{9-4x} = -5$

b) $\frac{9x^2-6}{16-3x} = -3x$.

224. Kännykkäliittymän kuukausittainen perusmaksu on 2,90 euroa. Lisäksi jokainen puheminuutti ja tekstiviesti maksaa 6,9 senttiä. Pekan kännykkälasku kuukauden ajalta oli 27,05 euroa.

a) Kuinka monta puheminuuttia tai tekstiviestiä Pekka käytti kuukauden aikana yhteensä?

b) Pekka lähetti kaksi tekstiviestiä jokaisesta viittä puheminuuttia kohden. Kuinka monta tekstiviestiä Pekka lähetti?

225. Määritä luvulle a sellainen arvo, että

a) yhtälön $5x - 8 - 3ax = 4 - x$ ratkaisu on -1 .

b) yhtälön $5x + a = \frac{6x}{3} + \frac{7}{2}$ ratkaisu on 2 .

226. Kylpyhuoneessa on kolme hanaa. Hana A täyttää kylpyammeen 60 minuutissa, hana B 30 minuutissa ja hana C 15 minuutissa. Kuinka kauan kylpyammeen täyttymisessä kestää, jos kaikki hanat ovat yhtäaikaan auki?

Lisää tehtäviä

227. Määritä ne neljä peräkkäistä paritonta kokonaislukua, joiden summa on 72.

228. Fysiikassa ja geometriassa kaavoissa esiintyy muitakin muuttujia kuin x . Esimerkiksi kuljettu matka on nopeus kertaa aika eli $s = vt$. (s = spatium latinaksi ja englanniksi v = velocity ja t = time) Ratkaise kysytty tuntematon yhtälöstä.

a) $F = ma$, $m = ?$ (Voima on massa kerrottuna kiihtyvyydellä.)

b) $p = \frac{F}{A}$, $F = ?$ (Paine on voima jaettuna alalla.)

c) $A = \pi r^2$, $r = ?$ (Ympyrän pinta-ala on pii kerrottuna säteen neliöllä.)

d) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $h = ?$ (Kartion tilavuus on piin kolmasosa kerrottuna säteen neliöllä ja kartion korkeudella.)

229. Taksimatkan perusmaksu on arkisin 5,90 euroa. Taksimatkan hinta oli 28,00 euroa. Mikä oli taksimatkan pituus, kun

a) Petteri matkusti yksin, jolloin taksa oli 1,52 euroa kilometriltä?

b) Arttu otti taksin kuuden ystävänsä kanssa, jolloin taksa oli 2,13 euroa kilometriltä?

230. Sadevesikeräin näyttää vesipatsaan korkeuden millimetreinä. Eräänä aamuna keräimessä oli 5 mm vettä. Seuraavana aamuna samaan aikaan keräimessä oli 23 mm vettä. Muodosta yhtälö ja selvitä, kuinka paljon vettä oli keskimäärin sata-nut kuluneen vuorokauden aikana tunnissa.

231. London and Manchester are 200 miles apart. Jem travels from London to Manchester at an average speed of 70 mph. Robbie travels in the opposite direction, from Manchester to London, at an average speed of 30 mph. Knowing that they leave at the same time, in how much time will their paths cross each other?

2.3 Prosenttilaskenta

Sana **prosentti** tulee latinan kielen ilmaisusta **pro centum**, joka tarkoittaa kirjaimellisesti sataa kohden tai sadasta. Prosentit ovat siis sadasosia, ja kyseessä on rationaalilukujen sovellus – prosentteja käytetään ilmaisemaan suhteellista osuutta. Prosentin symboli on $\%$. Prosentin sukulaiskäsité on **promille**, joka tulee vastaavasta latinan ilmaisusta **pro mille**. Promillen symboli on ‰ .

Prosentti ja promille

$$1\text{prosentti} = 1\% = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$1\text{promille} = 1\text{‰} = \frac{1}{1\,000} = 0,001$$

ESIMERKKI 2.98

- a) $0,03 = 3\% = 30\text{‰}$
- b) $0,00478 = 0,478\% = 4,78\text{‰}$
- c) $0,76 = 76\% = 760\text{‰}$
- d) $1,23 = 123\% = 1\,230\text{‰}$
- e) $2,10 = 210\% = 2\,100\text{‰}$

Erityisesti kannattaa huomata, että $100\% = 1$.

Prosenttilaskennan käytännön kysymyksenasettelut jakaantuvat karkeasti neljään ryhmään:

Prosenttilaskennan tehtävätyypit

1. ”Kuinka monta prosenttia a on b :stä?”
2. ”Kuinka paljon on $p\%$ luvusta a ?”

3. ” a kasvaa/vähenee p prosenttia.”

4. ”Kuinka monta prosenttia a on suurempi/pienempi kuin b ?”

Tehtävät saattavat vaatia edellä mainittujen tilanteiden yhdistelemistä ja tuntemattoman ratkaisemista yhtälöstä. Erilaisten suhteiden prosentuaalisille ilmaisuille on vakiintunut omat nimensä, jotka kannattaa opetella.

Vertailuprosentti

Vertailuprosentilla tarkoitetaan sitä, kuinka paljon jokin on jostakin, mihin verrataan.

Vertailuprosentilla vastataan siis kysymykseen ”kuinka monta prosenttia luku a on luvusta b ?”, ja vertailuprosentti saadaan laskutoimituksesta $\frac{a}{b}$, joka tulkitaan lopullista vastausta varten prosentteina eli sadaosina. Jos sadaosien lukeminen suoraan desimaaleista on haastavaa, saadaan prosentit ”näkyviin” kertomalla desimaaliluku sadalla $100 \cdot \frac{a}{b} = p\%$. Tämä on kuitenkin vain matemaattinen kikka vastauksen ulkoasun muuttamiseksi – ei välttämätöntä tehtävän ratkaisun kannalta.

ESIMERKKI 2.99

Tarmo leikkaa pizzan neljään osaan ja syö näistä kolme.

a) Kuinka monta prosenttia pizzasta Tarmo syö?

b) Kuinka monta prosenttia pizzasta jää jäljelle?

Ratkaisu. a) Tarmo syö 3 palaa neljästä eli $\frac{3}{4} = 0,75$. Tämä voidaan muuttaa prosenttiluvuksi ilmaisemalla luku sadasosina. $0,75 \cdot 100 = 75$. Siis $0,75 = 75\%$, ja Tarmo söi 75% pizzasta.

b) Koko pizzasta otetaan pois Tarmon syömä osa jolloin jäljelle jää $100\% - 75\% = 25\%$. Samaan vastaukseen olisi päädytty, jos olisi muunnettu jäljellä olevien pitsapalojen määrän suhdetta koko pitsaan esittävä rationaaliluku $\frac{1}{4}$ prosenteiksi.

Vastaus. a) 75% 25%

Koska jakolasku ei ole vaihdannainen, on tärkeää varmistaa, että tehtävässä suhde muodostetaan oikein päin. Suhdetta muodostettaessa se, mihin verrataan, toimii jakajana.

Perusarvo

Lukua, johon verrataan tai jota muutetaan, kutsutaan **perusarvoksi**.

ESIMERKKI 2.100

Alex ansaitsee kuukaudessa 3 200 euroa ja Antero 2 300 euroa.

a.a) Kuinka monta prosenttia Anteron tulot ovat Alexin tuloista?

b) Kuinka monta prosenttia Alexin tulot ovat Anteron tuloista?

Ratkaisu. a) Lasketaan vertailuprosentti. Perusarvo on tehtävänannon mukaisesti Alexin palkka eli 3 200 euroa.

$$\frac{2\,300}{3\,200} = 0,71875 \approx 0,72 = 72 \%$$

§ Lasketaan vertailuprosentti, mutta nyt perusarvona toimiikin Anteron palkka:

$$\frac{3\,200}{2\,300} \approx 1,39 = 139 \%$$

Vastaus. a) Anteron tulot ovat 72 % Alexin tuloista.

b) Alexin tulot ovat 139 % Anteron tuloista.

Usein perusarvoa ei tunneta, vaan se joudutaan ratkaisemaan yhtälöstä.

ESIMERKKI 2.101

Arvonlisävero on on valtiolle perittävä vero, jota maksetaan tuotteista ja palveluista. Arvonlisäverokanta määräytyy tuotteen tyypin mukaan, ja itse veron suuruus (euroina) lasketaan osuutena tuotteen verottomasta hinnasta. Vuonna 2012 yleinen arvonlisävero oli 23 % tuotteen verottomasta hinnasta.

a) Kuinka suuri arvonlisävero (euroina) maksetaan tuotteesta, jonka veroton hinta on 8,45 euroa?

b) Kuinka suuri on tällöin verollinen eli lopullinen kuluttajahinta?

c) Kuinka monta prosenttia arvonlisä on tuotteen verollisesta hinnasta?

Ratkaisu. a) Merkitään arvonlisäveron määrää (euroina) x :llä. Tällöin tehtävänannon ja arvonlisäveron määritelmän perusteella pätee yhtälö

$\frac{x}{8,45 \text{ €}} = 23 \%$. Muuttamalla prosenttiluku desimaalimuotoon (laskimen käytön helpottamiseksi) ja kertomalla yhtälön molemmat puolet nimittäjällä saadaan ratkaisuksi $x = 0,23 \cdot 8,45 \text{ €} = 1,9435 \text{ €} \approx 1,90 \text{ €}$.

b) Koskaveroton hinta on 8,45 euroa, ja tämän lisäksi maksetaan arvonlisäveroa 1,90 euroa, saadaan lopulliseksi myyntihinnaksi $8,45 \text{ €} + 1,90 \text{ €} = 10,35 \text{ €}$.

c) Verrataan arvonlisäveroa lopulliseen hintaan: $\frac{1,90 \text{ €}}{10,35 \text{ €}} \approx 0,184 = 18,4 \%$.
(Huomaa, että kyseinen 23 %:n arvonlisävero *ei* siis tarkoita, että 23 % tuotteen myyntihinnasta on veroa!)

Vastaus. a) 1,90 €

b) 10,35 €

c) 18,4 €

Tapaus ”kuinka paljon on $p\%$ luvusta a ” lasketaan kertolaskuna aivan niin kuin aiemmin on tehty kaikilla rationaaliluvuilla muutenkin. [ESIMERKKI 2.102](#)

a) Jos luku a halutaan kaksinkertaistaa, kerrotaan se kahdella: $2a$.

b) Jos käsitellään luvusta x vain kolmasosaa, kerrotaan se $\frac{1}{3}$:lla: $\frac{1}{3}x$.

c) Jos halutaan tietää, mitä on kymmenen prosenttia luvusta 120, kerrotaan se 10 %:lla: $10\% \cdot 120 = 0,10 \cdot 120 = 12$.

d) Mitä on 2 ‰ luvusta h ? Se on $2\text{‰}h = 0,002h$.

Kun jokin luku a kasvaa $p\%$, täytyy laskea ensin, kuinka paljon on $p\%$ kyseisestä luvusta a ja sitten lisätä saatu luku alkuperäiseen a :han. Kyseinen lauseke sievenee merkittävästi:

$$a + p\% \cdot a = a + \frac{p}{100} \cdot a = \left(1 + \frac{p}{100}\right)a$$

Perusarvon a edessä olevaa kerrointa $1 + \frac{p}{100}$ sanotaan **prosenttikertoimeksi**.

Jonkin suureen tai luvun vähentyessä tietyllä prosenttimäärällä toimitaan samoin, mutta suoritetaan vähennyslasku:

$$a \mapsto \left(1 - \frac{p}{100}\right)a$$

ESIMERKKI 2.103

Tuotteen hintaa korotettiin 15 %, jolloin hinnaksi muodostui 175 euroa. Kuinka suuri oli alkuperäinen korottamaton hinta?

Ratkaisu. Olkoon alkuperäinen hinta x euroa. Koska hintaa on korotettu 15 %, on uusi hinta 115 % alkuperäisestä eli alkuperäinen hinta x on kerrottu 1,15:llä:

$$\begin{aligned} 1,15x &= 175 && | \text{Jaetaan } 1,15\text{:llä.} \\ x &= \frac{175}{1,15} \approx 152,17 \end{aligned}$$

Vastaus. Tuotteen alkuperäinen hinta oli 152,17 euroa.

Huomaa, että edellisessä esimerkissä saatuun kertoimeen $1,15 = 115\%$ oltaisiin päädytty myös laskemalla $x + 0,15x = (1 + 0,15)x = 1,15x$.

ESIMERKKI 2.104

Eräs kauppa myy tuotteensa 5 prosentin alennuksella. Tämä tarkoittaa, että jokaisesta hinnasta vähennetään $\frac{5}{100}$ kertaa tuotteen hinta. Jos tuotteen alkuperäinen hinta on esimerkiksi 100 euroa, saadaan 5 % alennus laskettua 100 eurosta kertomalla 100 euroa 5 %:lla eli viidellä sadasosalla

$$\frac{5}{100} \cdot 100 \text{ euroa} = 5 \text{ euroa}$$

Alennettu hinta saadaan vähentämällä alkuperäisestä hinnasta alennus eli $100 \text{ euroa} - 5 \text{ euroa} = 95 \text{ euroa}$.

Jos tuotteen alkuperäinen hinta on 14,50 euroa, on alennuksen määrä

$$\frac{5}{100} \cdot 14,50 \text{ euroa} = 0,725 \text{ euroa.}$$

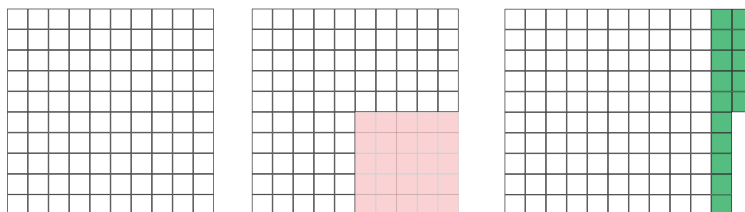
Alennettu hinta on tällöin $(14,50 - 0,725) \text{ euroa} \approx 13,78 \text{ euroa}$.

Samaan tulokseen pääsee vielä kätevämmän, kun ajattelee alennuksen määrän sijaan sitä, kuinka suuri osa hinnasta jää jäljelle. Jos alennus on 5 %, jää hinnasta jäljelle $100\% - 5\% = 95\%$. Jos alkuperäinen hinta on 14,50 euroa, on alennettu hinta

$$\frac{95}{100} \cdot 14,50 \text{ euroa} \approx 13,78 \text{ euroa.}$$

ESIMERKKI 2.105

Jos sadan euron hintaisen tuotteen hintaa on alennettu 25 prosenttia, niin alennettu hinta on 75 euroa. Jos sen sijaan alkuperäinen hinta nousee 15 prosenttia, niin tuotteen uusi hinta on 115 euroa. Perusarvo on molemmissa tapauksissa 100 euroa.



Muutosprosentti

Prosentteja käytetään usein ilmaisemaan suureiden muutoksia, esimerkiksi luku a kasvaa luvuksi b . **Muutosprosenttia** laskettaessa muutoksen suuruutta verrataan alkuperäiseen lukuun. Perusarvona on siis alkuperäinen arvo, johon nähden muutos on tapahtunut. Muutosta merkitään yleensä symbolilla Δ (kreikan kielen suuri *delta*).

Absoluuttinen muutos luvusta a lukuun b on $b - a$. **Suhteellinen muutos** saadaan suhteuttamalla absoluuttinen muutos alkuperäiseen lukuun a eli laskemalla

$$\Delta_{\text{suhteellinen}} = \frac{\Delta_{\text{absoluuttinen}}}{a} = \frac{b - a}{a}$$

Muutosprosentti saadaan suhteellisesta muutoksesta muuttamalla se prosenttiluvuksi

$$\Delta_{\text{prosentti}} = \Delta_{\text{suhteellinen}} = \frac{b - a}{a}$$

tulkittuna prosenteissa.

ESIMERKKI 2.106

Vesan paino on tammikuussa 68 kg ja kesäkuussa 64 kg.

- Mikä on Vesan painon *absoluuttinen muutos*?
- Mikä on Vesan painon *muutosprosentti*?

Ratkaisu. a) Halutaan tietää Vesan painon *absoluuttinen muutos* eli muutos kiloina tammikuusta kesäkuuhun.

$$\Delta_{\text{absoluuttinen}} = b - a = 64 \text{ kg} - 68 \text{ kg} = -4 \text{ kg}$$

Vesan paino on muuttunut -4 kiloa, eli Vesa on laihtunut 4 kiloa.

b) Halutaan tietää Vesan painon muutos *prosentteina* tammikuusta kesäkuuhun.

$$\Delta_{\text{prosentti}} = \frac{\Delta_{\text{absoluuttinen}}}{a} = \frac{-4}{68} \approx -0,06 = -6 \%$$

Vesan paino on muuttunut kuudella prosentilla negatiiviseen suuntaan, eli Vesa on laihtunut kuusi prosenttia.

Vastaus. a) Vesa on laihtunut 4 kiloa.

b) Vesa on laihtunut 6 %.

Erotusprosentti

Muutosprosentille läheinen käsite on **erotusprosentti**. Erotusprosentti ilmaisee kuinka monta prosenttia jokin on suurempi tai pienempi kuin joku toinen. Suhteellinen erotus saadaan laskemalla lukujen absoluuttinen erotus $|b - a|$ ja vertaamalla sitä perusarvoon, joka on aina "kuin"-sanana jälkeinen arvo.

Jos luku a on p % pienempi tai suurempi kuin luku b , pätee

$$p = \frac{|b - a|}{b}.$$

ESIMERKKI 2.107

Miniluumutomaatit maksavat normaalisti 4,80 euroa kilolta. Nyt ne ovat kuitenkin alennuksessa ja maksavat 2,50 euroa kilolta.

a) Kuinka monta prosenttia enemmän miniluumutomaatit maksavat normaalisti kuin alennuksessa?

b) Kuinka monta prosenttia vähemmän miniluumutomaatit maksavat alennuksessa kuin normaalisti?

Ratkaisu. a) Verrataan absoluuttista erotusta alennettuihin miniluumutomaatteihin:

$$\frac{|b - a|}{b} = \frac{|2,50 - 4,80|}{2,50} = \frac{|-2,30|}{2,50} \\ = \frac{2,30}{2,50} = 0,92 = 92,0 \, \%.$$

b) Verrataan absoluuttista erotusta normaalihintaisiin miniluumutomaatteihin:

$$\frac{|b - a|}{a} = \frac{|2,50 - 4,80|}{4,80} = \frac{|-2,30|}{4,80} \\ = \frac{2,30}{4,80} \approx 0,479 = 47,9 \, \%.$$

Vastaus. a) Miniluumutomaatit maksavat normaalisti 92,0 % enemmän kuin alennuksessa.

b) Miniluumutomaatit maksavat alennuksessa 47,9 % vähemmän kuin normaalisti.

Huomataan, että se mihin verrataan, on merkittävää ja vaikuttaa tulokseen.

Lauseella ”kaksi kertaa enemmän” tarkoitetaan usein yleiskielessä kaksinkertaista. Matemaattisesti nämä ovat kuitenkin eri asioita. Sekaannuksen vuoksi on syytä olla käyttämättä tällaista ilmaisua.

ESIMERKKI 2.108

Psykoosilääke olantsapiinin yleinen haittavaikutus on painonnousu: yhdellä kolmasosalla käyttäjistä paino nousee kuuden ensimmäisen viikon aikana noin seitsemän prosenttia, keskimäärin 5,5 kilogrammaa. Mikä on tällaisen kolmannekseen kuuluvan keskimääräisen henkilön massa painonnousun jälkeen?

Ratkaisu. Voimme merkata alkuperäistä painoa (massaa) kilogrammoissa x :llä. Tehtävänannon perusteella 5,5 kilogramman absoluuttinen kasvu vastaa 7 %:n suhteellista kasvua. Tästä saadaan yhtälö $5,5 \text{ kg} = 0,07x$, jonka ratkaisuna saadaan $x = \frac{5,5 \text{ kg}}{0,07} \approx 78,57 \text{ kg}$. Lopullinen vastaus saadaan, kun tähän alkuperäiseen massaamme lisätään tuo mainittu 5,5 kilogrammaa: $\frac{5,5 \text{ kg}}{0,07} + 5,5 \text{ kg} \approx 84,1$. (Huomaa, että tehtävänannon tietoa ”yhdellä kolmasosalla” ei tarvittu ratkaisuun.)

Vastaus. Keskimääräisen henkilön massa painonnousun jälkeen on 84,1 kilogrammaa.

Prosenttiyksikkö

Prosenttiyksikköä käytetään mittaamaan prosenttilukujen absoluuttista muutosta. Esimerkiksi 3 % on yhden prosenttiyksikön suurempi kuin 2 %, mutta 50 % suurempi kuin 2 %. Jos prosenttiluku muuttuu, muutos voidaan ilmaista joko prosentteina (suhteellinen muutos) tai prosenttiyksikköinä (absoluuttinen muutos).

Prosentin ja prosenttiyksikön merkitysero on keskeinen esimerkiksi talousuutisten tulkinnassa.

ESIMERKKI 2.109

Tuotteen markkinaosuus on vuoden tammikuussa 10 % ja kesäkuussa 15 %.

- a) Kuinka monta prosenttia tuotteen markkinaosuus on noussut tammikuusta kesäkuuhun?
- b) Kuinka monta prosenttiyksikköä tuotteen markkinaosuus on noussut tammikuusta kesäkuuhun?

Ratkaisu. a) Tuotteen markkinaosuuden muutos prosentteina:

$$\frac{15 - 10}{10} = \frac{5}{10} = 0,5 = 50 \%.$$

- b) Tuotteen markkinaosuuden muutos prosenttiyksikköinä $15 \% - 10 \% = 5 \%$

Vastaus. a) 50 prosenttia

b) 5 prosenttiyksikköä

Tehtäviä

Opi perusteet

232. Täydennä taulukko.

desimaaliluku	murtoluku	%	‰
0,1		10	
	$-\frac{4}{5}$		
		99,9	
			0,42
		125	
-7,5			

233. Täydennä taulukko.

perusarvo	$\pm p$ %	lauseke
a	+10 %	$1,10a$
b	-24 %	
5 000 €	-1 %	
		$0,42x$
3 m		$26 \cdot 3 \text{ m}$
		$0,003 \cdot (-7,5)$

234. Laske

- a) 4,5 % luvusta 1 500
- b) 4,5 % luvusta b
- c) 15,3 % luvusta b
- d) 152 % luvusta b
- e) 3 550 % luvusta b .

235. Kuinka monta prosenttia

- a) 15 on luvusta 75
- b) 120 on luvusta 80
- c) 400 on luvusta 3,5
- d) luku 50 on lukua 170 pienempi
- e) luku 170 on lukua 50 suurempi
- f) 400 on lukua 3,5 suurempi?

236. Oppikirjamaraton-tiimi kävi lounastamassa. Osoita oheisen kuitin tiedoilla vääräksi yleinen virhekesitys, että 13 % suuruisen arvonlisäveron osuus olisi 13 % lopullisesta myyntihinnasta.



237. Laukun normaalihinta on 225 euroa, ja se on 25 prosentin alennuksessa. Mikä on alennettu hinta?

238. Jaakon kuukausipalkka on 1 623,52 euroa. Hän saa 1,3 % palkankorotuksen. Mikä on Jaakon kuukausipalkka korotuksen jälkeen?

239. Vuosien 2008 ja 2012 kunnallisvaaleissa ehdokkaita asettaneiden eduskunnan ulkopuolisten puolueiden saamat äänet koko maassa on esitetty seuraavassa taulukossa. Mukana ovat vain ne puolueet, jotka olivat mukana molemmissa vaaleissa.

Puolue / Äänet	2008	2012
Itsenäisyyspuolue	1 482	1 303
Kommunistinen Työväenpuolue	1 065	704
Köyhien Asialla	1 059	572
Suomen Kommunistinen Puolue	13 986	11 174
Suomen Työväenpuolue	703	538

a) Minkä puolueen kannatus laski eniten äänissä laskettuna ja kuinka paljon?

b) Minkä puolueen äänisaalis laski eniten prosentuaalisesti ja kuinka paljon?

240. Piraattipuolueen kannatus oli vuoden 2011 eduskuntavaaleissa 0,5 % ja vuoden 2014 europarlamenttivaaleissa 0,7 %.

a) Kuinka monta prosenttiyksikköä kannatus kasvoi? (Tiedotusvälineissä kannatusmuutokset ilmoitetaan yleensä prosenttiyksiköissä.)

b) Kuinka monta prosenttia kannatus kasvoi?

241. Samulin pituus on 165 cm ja Joonaksen 173 cm.

a) Kuinka monta prosenttia Samulin pituus on Joonaksen pituudesta?

b) Kuinka monta prosenttia Joonaksen pituus on Samulin pituudesta?

c) Kuinka monta prosenttia Samuli on lyhyempi kuin Joonas?

d) Kuinka monta prosenttia Joonas on pidempi kuin Samuli?

242. Jalkapalloilija Georgios Samaras teki ensimmäisellä kaudellaan Skotlannin valioliigassa (2007–2008) 5 maalia Celtic F. C.:n paidassa. Seuraavalla kaudella Samaras teki Celticille liigassa 15 maalia. Kuinka monta prosenttia Samaraksen maalimäärä nousi?

243. Erään pankin myöntämä opintolainaa kasvaa korkoa 2 % vuodessa. Kuinka monta prosenttia laina on kasvanut korkoa alkuperäiseen verrattuna kymmenen vuoden kuluttua?

244. Kirjan myyntihinta, joka sisältää arvonlisäveron, on 9 % suurempi kuin kirjan veroton hinta. Laske kirjan veroton hinta, kun myyntihinta on 27 euroa.

245. Sokerijuurikkaassa on 18 % soke-ria. Kuinka paljon sokerijuurikkaita (tonneissa) tarvitaan valmistettaessa 8 tonnia sokeriliuosta, jonka sokeripitoisuus on 4,5 %?

246. Iidan ja Matin duo saa julkisuutta, ja he alkavat myydä CD-levyään keikkojen yhteydessä 10 euron kappalehinnalla. Jonkin ajan päästä he päättävät nostaa CD-levyn hintaa 20 prosenttia. Matti alkaa kuitenkin katua päätöstä, ja ehdottaa tämän korotetun hinnan alentamista 20 prosentilla, jotta useampi levy saataisiin myytyä.

a) Mikä olisi tämän toimenpiteen jälkeen CD:n uusi hinta?

b) Montako prosenttia olisi alennuksen oltava, jotta oikeasti päästäisiin takaisin alkuperäiseen 10 euron hintaan?

Hallitse kokonaisuus

247. Paranoidi perheenäiti ei ole opiskellut suuruusluokkia, ja hänellä menee mililit ja mikrot sekaisin. Kuinka monta prosenttia liian suuren annoksen hän saa, kun hän syö ravintolisänä eräänä päivänä D-vitamiinia 50 mikrogramman sijasta 50 milligrammaa? (Vihje: älä yritä tätä kotona.)

248. Hedelmissä on vettä aluksi 60 % niiden painosta. Kuinka monta prosenttia vedestä on haihdutettava, jotta hedelmistä tämän jälkeen olisi vain 20 % vettä?

249. (YO 2000K/4) Tuoreissa omenissa on vettä 80 % ja sokeria 4 %. Kuinka monta prosenttia sokeria on samoissa omenissa, kun ne on kuivattu siten, että kosteusprosentti on 20?

250. Eräällä kuvitteellisella saarella on vain kaksi valtiota X ja Y. Valtioissa oli saman verran asukkaita, kunnes niiden välille syttyi sota. Tuhoisan ja hyvin yksipuolisen sodan seurauksena valtion Y asukasmäärä putosi sadasosaan entisestä, ja valtion X asukasmäärä putosi viisi prosenttia.

a) Esitä kokonaislukujen suhteena valtioiden sodan jälkeiset asukasmäärät.

b) Kuinka monta prosenttia saaren asukasmäärä väheni sodan seurauksena?

251. Askartelukaupassa on alennusviikot ja kaikki tavarat myydään 60 %:n alennuksella. Viimeisenä päivänä kaikista hinnoista annetaan vielä lisäalennus, joka lasketaan aiemmin alennetusta hinnasta. Minkä suuruinen lisäalennus tulee antaa, jos lopullisen kokonaisalennuksen halutaan olevan 80 %?

252. Avoin kierros laserhippaa (laser tag) maksaa yhdeltä pelaajalta 9 euroa. Pelialueen voi kuitenkin varata seurueelle hintaan 260 euroa. Mette on menossa pelaamaan viiden kaverinsa kanssa.

a) Kuinka monta prosenttia kalliimpaa on varata joukolle yksityispeli kuin liput avoimeen peliin?

b) Kuinka suuri seurueen on vähintään oltava, jotta yksityispeli tulisi halvemmaksi?

253. Vuonna 2012 yleinen arvonlisäveroprosentti Suomessa oli 23 % tuotteen verottomasta hinnasta. Tuotteen hinta koostuu sen verottomasta hinnasta ja tuotteesta maksettavasta arvonlisäverosta. Kuinka monta prosenttia arvonlisävero on tuotteen myyntihinnasta?

254. Kun matkalipun hintaa korotettiin 10,0 %, matkustajien määrä väheni 10,0 %. Kuinka monella prosentilla tällöin kasvoivat tai vähenivät liikennöitsijän lipputulot?

255. Jos geenitekniikan laboratoriossa käsitellään tai tutkitaan RNA:ta, täytyy kyseistä DNA:n sukulaismolekyyliä tuhoavat entsyymit deaktivoida. Diettylipyrokarbonaatti (DEPC) on voimakas proteiineja denaturoiva ja sakkaava yhdiste, ja sopii tähän tarkoitukseen hyvin. Tavallinen ohje tarvittavan puhdistusliuoksen valmistamiseen on, että valmista 100 prosentin DEPC-liuosta laimennetaan 94-prosenttisella etanolilla 10-prosenttiseksi. Etanoli on laimennettu puhtaalla vedellä. Kuinka paljon vettä on 500 millilitrassa valmista käyttöliuosta? Jokainen ilmoitettu prosentuaalinen arvo on **tilavuusprosentti** eli kunkin komponentin tilavuuden suhde koko liuoksen tilavuuteen.

Lisää tehtäviä

256. (YO 1991K/5a) Luvun $\sqrt{r^2 - a^2}$ likiarvona voidaan käyttää lukua $r - \frac{1}{2}a^2/r$.

Laske tämän nojalla $\sqrt{3}$ likiarvo sopivia kokonaislukuja r ja a käyttäen. Kuinka monta prosenttia tämä likiarvo poikkeaa tarkasta arvosta?

257. (YO 1877/4) Kaupungissa tuli joko kaisen talonomistajan suorittaa kaupungin kassaan 5 % saadusta hyyrymäärästä (vuokrasta, ruotsin sanasta *hyra*). Sittemmin määrättiin, että mainittu prosentti oli oleva 10. Monellako prosentilla talonomistajien täytyi korottaa hyyryjä saadakseen saman puhtaan säästön kuin ennen?

258. Miksi ei kannata mennä ostoksille kauppaan, joka mainostaa liikkeessä olevan ”–40 %:n alennus”?

259. ★ Luolassa asuu 99 ihmistä. Aikuisia on 50 % vähemmän kuin lapsia. Montako aikuista luolassa asuu?

2.4 Potenssiyhtälöt

Eräs tärkeä yhtälöiden tyyppi on **potenssiyhtälöt**.

Potenssiyhtälö

Potenssiyhtälö on muotoa $x^n = a$ oleva yhtälö, jossa n on jokin rationaaliluku. (n voi ilman ongelmia olla mikä tahansa reaalilukukin, mutta rationaalitarkastelu riittää tälle kurssille.)

Huomaa miinus- ja murtopotenssiyhtälöissä tarkistaa, millä kantaluvuilla x potenssit on määritelty. Murtopotenssia määriteltäessä vaadittiin, että kantaluku $x \geq 0$ ja negatiivisen potenssin tapauksessa on huomioitava, että kantaluku $x \neq 0$, sillä $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$, eikä nimittäjässä sallita olevan lukua 0.

Eksponentin n ollessa kokonaisluku sen arvoa kutsutaan potenssiyhtälön **asteeksi**.

ESIMERKKI 2.110

- a) Potenssiyhtälön $x^2 = 0$ aste on 2.
- b) Potenssiyhtälön $x^9 = -34,5$ aste on 9.
- c) Yhtälö $27x^3 = 7$ on potenssiyhtälö, sillä jakamalla se puolittain luvulla 27 saadaan $x^3 = \frac{7}{27}$. Tämän potenssiyhtälön aste on 3.
- d) Yhtälö $2x^4 - 7 = 3$ on potenssiyhtälö, sillä se voidaan muokata muotoon $x^n = a$, ja sen aste on 4.
- e) Yhtälö $\frac{1}{x^2} = 3$ on potenssiyhtälö, sillä se voidaan kirjoittaa muodossa $x^n = a$, ja sen aste on -1 .

Potenssiyhtälöitä tarvitaan esimerkiksi tilanteissa, joissa lasketaan korolle korkoa. Myös pinta-ala- ja tilavuuslaskuissa esiintyy potenssiyhtälöitä.

Potenssiyhtälön ratkaiseminen

- Jos potenssiyhtälön aste n on parillinen ja $a \geq 0$, yhtälöllä on kaksi ratkaisua:

$$x = \pm \sqrt[n]{a}.$$

- Jos aste on parillinen, sillä on yksi ratkaisu vain kun $a = 0$, sillä $x = \pm \sqrt[n]{0} = \pm 0 = 0$
- Jos aste on parillinen ja $a < 0$, potenssiyhtälöllä ei ole yhtään ratkaisua.
- Siis parillisen asteen potenssifunktiolla voi olla yksi, kaksi tai ei yhtään ratkaisua.
- Jos aste on pariton, ja $a \neq 0$ yhtälöllä on aina täsmälleen yksi ratkaisu, $x = \sqrt[n]{a}$.

ESIMERKKI 2.111

Ratkaise yhtälöt a) $x^2 = 0$, b) $x^2 - 9 = 0$ ja c) $x^2 + 9 = 0$

Ratkaisu. a)

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

b)

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

c)

$$x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 = -9$$

$$x = \sqrt{-9}$$

Vastaus. a) Yhtälöllä on yksi ratkaisu: $x = 0$.

b) Yhtälöllä on kaksi ratkaisua: $x = 3$ ja $x = -3$.

c) Yhtälöllä ei ole reaalista ratkaisua (koska minkään reaaliluvun neliö ei ole negatiivinen).

Paritonasteisen potenssiyhtälön ratkaisut

Mikäli potenssiyhtälön asteluku n on pariton, yhtälöllä on aina tasan yksi reaalilukuratkaisu (kun $a \neq 0$).

ESIMERKKI 2.112

Ratkaise yhtälö

a) $2x^3 + 16 = 0$

b) $2x^4 - 7 = 3$

Ratkaisu. a)

$$2x^3 + 16 = 0$$

$$2x^3 = -16$$

$$x^3 = -8$$

$$x = \sqrt[3]{-8} = -2$$

b)

$$2x^4 - 7 = 3$$

$$2x^4 = 3 + 7$$

$$x^4 = \frac{10}{2}$$

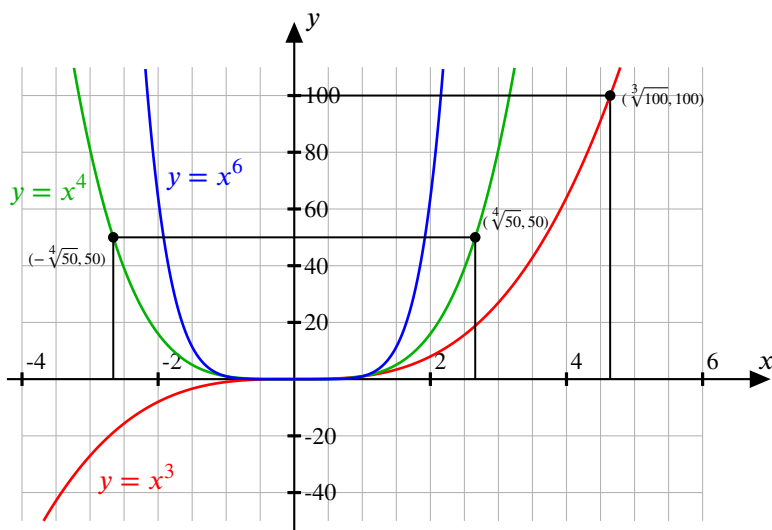
$$x^4 = 5$$

ESIMERKKI 2.113

a) Potenssiyhtälön $x^3 = 100$ ratkaisu on $x = \sqrt[3]{100}$.

b) Potenssiyhtälöllä $x^6 = -1$ ei ole ratkaisua, sillä $x^6 = (x^3)^2 \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

c) Potenssiyhtälöllä $x^4 = 50$ on kaksi ratkaisua $x = \sqrt[4]{50} = 2,6591 \dots$ ja $x = -\sqrt[4]{50} = -2,6591 \dots$



ESIMERKKI 2.114

Etsitään luku x , joka toteuttaa yhtälön $\frac{x^3}{3} = \frac{x^2}{2}$. Tehdään tämä kahdella tapaa vaiheittain

$$\frac{x^3}{3} = \frac{x^2}{2} \quad | \text{ Kerrotaan molemmat puolet kolmella. }$$

$$x^3 = \frac{3x^2}{2} \quad | \text{ Kerrotaan molemmat puolet kahdella. }$$

$$2x^3 = 3x^2 \quad | \text{ Vähennetään puolittain oikean puolen termillä. }$$

$$2x^3 - 3x^2 = 0 \quad | \text{ Jaetaan } x^2. \text{ Huomataan ja merkitään, että } x \neq 0.$$

$$2x - 3 = 0 \quad | \text{ Lisätään molemmille puolille 3 ja jaetaan kahdella. }$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Tutkitaan vielä erikseen tilanne $x = 0$, joka ei ole määritelty yllä olevassa osamäärässä. Sijoitetaan $x = 0$ yhtälöön $\frac{x^3}{3} = \frac{x^2}{2}$ ja saadaan $\frac{0^3}{3} = \frac{0^2}{2}$, joka pätee sillä $0 = 0$. Näin ollen siis myös $x = 0$ on ratkaisu.

Toinen tapa

$$\begin{aligned}\frac{x^3}{3} &= \frac{x^2}{2} & | \text{ Jaetaan molemmat puolet oikean puolen termillä.} \\ \frac{x^3}{3} : \frac{x^2}{2} &= 1 & | \text{ Kerrotaan jakajan käänteisluvulla.} \\ \frac{x^3 \cdot 2}{3 \cdot x^2} &= 1 & | \text{ Sievennetään. Huomataan ja merkitään, että nyt } x \neq 0. \\ \frac{x \cdot 2}{3} &= 1 & | \text{ Jaetaan puolet kahdella ja kerrotaan kolmella.} \\ x &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Tutkitaan vielä erikseen tilanne $x = 0$, joka ei ole määritelty yllä olevassa osamäärässä. Sijoitetaan $x = 0$ yhtälöön $\frac{x^3}{3} = \frac{x^2}{2}$ ja saadaan $\frac{0^3}{3} = \frac{0^2}{2}$, joka pätee, sillä $0 = 0$. Näin ollen siis myös $x = 0$ on ratkaisu.

Eli molemmiin tavoin saatiin sama tulos, vaikka yhtälöä muokattiin eri keinoin.

Joskus potenssiyhtälössä potenssiin on korotettu jokin laajempi lauseke kuin pelkästään ratkaistava tuntematon. Tällöin sulkeita ei välttämättä kannata avata kertomalla potenssi auki, vaan potenssiin korotus kumotaan suoraan sopivalla juurenotolla.

ESIMERKKI 2.115

Ratkaistaan yhtälö $(2x + 1)^3 = 27$:

$$\begin{aligned}(2x + 1)^3 &= 27 & | \sqrt[3]{} \\ \sqrt[3]{(2x + 1)^3} &= \sqrt[3]{27} \\ 2x + 1 &= 3\end{aligned}$$

Nyt alkuperäinen yhtälö on palautunut (eli ns. redusoitu) aivan tavalliseksi ensimmäisen asteen yhtälöksi, joka on helppo ratkaista.

ESIMERKKI 2.116

Ratkaistaan yhtälö $1 + x = \frac{1}{1+x}$, missä nolalla jakamisen välttämiseksi $x \neq -1$:

$$\begin{aligned}1 + x &= \frac{1}{1+x} && | \cdot (1+x) \\(1+x) \cdot (1+x) &= \frac{1}{1+x} \cdot (1+x) \\(1+x)^2 &= 1 && | \sqrt{} \\\sqrt{(1+x)^2} &= \sqrt{1} \\\pm(1+x) &= 1 \\1+x &= \pm 1 && | -1 \\x &= \pm 1 - 1\end{aligned}$$

Eli $x = -2$ tai $x = 0$.

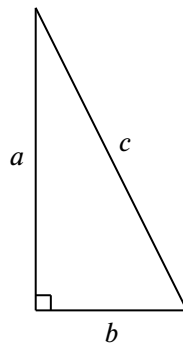
Pythagoraan lause

Yksi tärkeimmistä potenssiyhtälöistä on geometrian kolmioihin liittyvissä perustehtävissä tarvittava **Pythagoraan lause**. Suorakulmaisen kolmion kahta toisiinsa nähden kohtisuorassa olevaa lyhyttä sivua kutsutaan kateeteiksi ja pisintä sivua hypotenuusaksi.

Pythagoraan lause

Suorakulmaiselle kolmiolle pätee: kateettien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan neliö:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

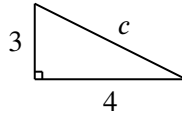


Sama pätee myös kääntäen: jos kateettien neliöiden summa on hypotenuusan neliö, kolmio on varmasti suorakulmainen.

Tavallisesti kahta lyhyempää sivua, kateettia (niiden pituutta) merkataan a :lla ja b :llä, ja hypotenuusan pituutta c :llä kuten kuvassa. Yhtälön ratkaisun kannalta olennaista on, että geometrian sovelluksissa emme hyväksy yhtälön negatiivisia juuria, koska pituudet, pinta-alat ja tilavuudet ovat positiivisia.

ESIMERKKI 2.117

Määritä oheisen suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus.



Ratkaisu. Kateettien pituudet ovat $a = 3$ ja $b = 4$, ja tuntematonta hypotenuusaa on merkitty c :llä. (Sinänsä ei ole väliä, kumpaa kateettia merkataan milläkin kirjaimella.) Pythagoraan lauseesta saadaan:

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= c^2 && || \text{sijoitetaan tehtävänannon arvot kaavaan} \\3^2 + 4^2 &= c^2 && || \text{sievennetään yhtälön vasenta puolta} \\9 + 16 &= c^2 \\25 &= c^2 && || \sqrt{} \\5 &= c\end{aligned}$$

Hyväksymme vain positiivisen juuren.

Vastaus. Kolmion hypotenuusan pituus on 5 (pituusyksikköä).

ESIMERKKI 2.118

Taulutelevision kooksi (lävistäjäksi) on ilmoitettu mainoksessa 46,0 tuumaa (116,8 cm) ja kuvasuhteeksi 16 : 9. Kuinka leveä televisio on senttimetreinä?

Ratkaisu. Taulutelevision halkaisija, alareuna ja toinen sivu muodostavat suorakulmaisen kolmion. Kolmion hypotenuusa (c) on television halkaisija ja kateetit (a ja b) alareuna ja toinen sivu. Kuvasuhteen perusteella kateettien pituuksia voidaan merkitä $16x$ ja $9x$, missä x esittää pienintä sivujen yhteistä mitta. Sivuja ei voida merkitä suoraan 16 ja 9, koska nämä eivät ole oikeita pituuksia vaan vain suhteita. Pythagoraan lauseesta ($c^2 = a^2 + b^2$) saadaan

$$116,8^2 = (16x)^2 + (9x)^2$$

$$13\,642,24 = (256 + 81)x^2.$$

$$x^2 = \frac{13\,642,24}{337}$$

$$x = \sqrt{\frac{13\,642,24}{337}} \approx 6,36.$$

Television leveys on noin $16x = 16 \cdot 6,36 \approx 102$ cm.

Vastaus. Noin 102 cm.

Korkolaskuja

ESIMERKKI 2.119

Juudas tallettaa 30 hopearahaa pankkiin. Rahamäärä kasvaa vuodessa 1 prosentin korkoa. Kuinka paljon rahaa on tilillä 2 000 vuoden kuluttua?

Ratkaisu. Tutkitaan, miten Juudaksen talletuksen suuruus lähtee kasvamaan.

Pääoma vuoden alussa / hopearahaa	Korko / hopearahaa	Pääoma / vuoden lopussa / hopearahaa
30	$0,01 \cdot 30 = 0,3$	$30 + 0,3 = 30,3$
30,3	$0,01 \cdot 30,3 = 0,303$	$30,3 + 0,303 = 30,603$
30,603	$0,01 \cdot 30,603 = 0,30603$	$30,603 + 0,30603 = 30,90903$
30,90903	$0,01 \cdot 30,90903 = 0,3090903$	$30,90903 + 0,3090903 = 31,2181203$

Huomataan, että pääoma kertaautuu aina vakiolla. Nimittäin, jos pääoma on alussa P_0 , se kasvaa $\frac{p}{100}P_0$, missä p on korkoprosentti. Nyt vuoden lopussa talletettuna on $P_1 = P_0 + \frac{p}{100}P_0 = (1 + \frac{p}{100})P_0$, eli uusi pääoma saadaan kertomalla vanha luvulla $1 + \frac{p}{100}$. Lisäksi toisen vuoden jälkeen tilillä on siis

$$P_2 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) P_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{100}\right) P_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 P_0,$$

ja siis yleisesti n :n vuoden jälkeen

$$P_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n P_0.$$

Tämä on ns. **korkoa korolle** -kaava. Nyt voidaan laskea, että Juudaksen lopullinen pääoma on 2 000 vuoden jälkeen hopearahoissa

$$P_{2\,000} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{2\,000} \cdot 30 \approx 13\,178\,586\,151.5 \approx 13\,000\,000\,000.$$

■ Tilille kertyi siis kutakuinkin 13 miljardia hopearahaa.

Korkoa korolle -periaate

Kun korkoprosentti on p , pääoma P_0 kasvaa n :n vuoden aikana arvoon

$$P_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n P_0.$$

ESIMERKKI 2.120

Suursijoittaja Nalle Mursulla on 5 000 euroa ylimääräistä rahaa, jonka hän aikoo sijoittaa 30 vuodeksi. Nalle Mursu haluaa sijoittamansa pääoman kasvavan 100 000 euroksi 30 vuodessa. Kuinka suuren vuotuisen korkokannan Nalle Mursu tarvitsee sijoitukselleen?

Ratkaisu. Olkoon vuotuinen korkokanta r . Korkoa korolle -periaatteen nojalla 5 000 euron sijoitus kasvaa 30 vuodessa summaksi $5\,000 \cdot (1 + r)^{30}$. Merkitsemällä $x = 1 + r$ saamme yhtälön $5\,000 \cdot x^{30} = 100\,000$. Jakamalla yhtälö puolittain luvulla 5 000 päädymme potenssiyhtälöön

$$x^{30} = 20,$$

jonka ratkaisuksi saadaan $x = 20^{\frac{1}{30}} \approx 1,105$. Näin ollen suursijoittaja Nalle Mursun vaatima korkokanta sijoitukselleen on noin

$$r = 1 - x = 1 - 1,105 = 0,105 = 10,5\%.$$

Tehtäviä

Opi perusteet

Ratkaise yhtälöt.

260. a) $x^2 = 4$

b) $x^3 = 27$

c) $x^5 = -1$

d) $x^2 - 3 = 0$

e) $x^3 + 125 = 0$

f) $x^3 = 81$

g) $x^5 = 10$

h) $x^4 = 1$

261. a) $5x^2 = 25$

b) $(2x)^3 = 8$

c) $x^4 = \frac{1}{4}$

d) $(3x)^2 = 36$

e) $(4x)^2 + 16 = 0$

262. a) $x^4 - 8 = 0$

b) $2x^3 + 7 = 0$

c) $\frac{x^2}{4} - \frac{5}{2} = 1$

d) $1,51x^4 - 1,2 = 7,5$

263. a) $2,3x^{-1} = 7,9$

b) $\pi x^{-3} + 4 = -23$

c) $5x^{-4} = -16$

264. Ratkaise yhtälö $7(x - 3) + 1 = x^2 - 1 - (x^2 - 1)$.

265. Viivi sijoitti 3 100 euroa pääomatilille. Yhdeksän vuoden kuluttua tilillä oli 5 000 euroa. Mikä oli tilin vuotuinen korkokanta prosentin sadaosien tarkkuudella, kun se oli pysynyt samana vuodesta toiseen?

266. Viivi haluaa sijoittamansa pääoman kaksinkertaistuvan seuraavassa kymmenessä vuodessa. Kuinka suurta korkoprosenttia hän esittää pankinjohtajalle?

267. Torimyyjä tarvitsee kappoja eli kuution muotoisia mitta-astioita. Pienen kapin vetoisuus on 2 litraa ja ison kapin vetoisuus 5 litraa. Määritä astioiden mitat senttimetrin kymmenesosan tarkkuudella.

268. Suomi sitoutui vähentämään kasvihuonepäästöjään vuoden 2005 alusta 20 % vuoteen 2020 mennessä. Kuinka paljon päästöjä oli tarkoitus vähentää vuosittain? Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

Hallitse kokonaisuus

269. Syksyllä 2012 maapallon väkiluvun arveltiin olevan noin 7 miljardia. Väkiluku oli kaksinkertaistunut arviolta 38 vuodessa. Tutki laskimella, milloin seuraava miljardi saavutettaisiin väestönkasvun jatkuessa samalla tavalla..

270. Ihmisen punasolun keskimääräinen tilavuus on noin 90 femtolitraa. Jos punasolu oletetaan pallon muotoiseksi (oikeasti punasolu on kaksoiskupera), sen tilavuudella pätee kaava $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, missä r on pallon säde (eli puolet läpimitasta). Laske ja esitä mikrometreinä punasolun läpimitta.

271. Kun pelaajahahmo kuolee *Diablo 3*-pelissä, hänen varusteidensa kuntoluokitus pienenee 10 %.

a) Kuinka monta kertaa pelaajahahmo voi kuolla peräjälkeen ennen kuin hänen varusteidensa kunto on pudonnut alle puoleen?

b) Pelaajan taikamiekan kuntoluokitus on 90 pistettä, ja kunto voi saada vain kokonaislukuarvoja. Jokaisen kuoleman jälkeen kuntoluokitus pyöristetään lähimpään kokonaislukuun. Vaikuttaako pyöristäminen tehtävän a-kohdan tulokseen?

272. Muinainen hallitsija Tauno Alpakka rakennuttaa itselleen kuution muotoista palatsia. Palatsin tilavuuden tulee olla $5\,000\text{ m}^3$.

a) Kuinka korkea palatsista tulee?

b) Palatsin ulkopuoli päällystetään 10 cm:n paksuisella kultakerroksella. Kuinka monta kiloa kultaa tarvitaan? (Kullan tiheys on $19,23 \cdot 10^3\text{ kg/m}^3$.)

c) Kuinka monta kiloa kultaa tarvitaan, jos myös palatsin sisäpuoli päällystetään?

273. Kuvaruudun pituuksien suhde on 16 : 9. Määritä ruudun mitat sentin tarkkuudella, kun sen pinta-ala on $0,40\text{ m}^2$. Suorakulmion pinta-ala on sen erisuuntaisten sivujen pituuksien tulo.

274. Suorakulmion muotoisen levyn mitat ovat $230\text{ cm} \times 250\text{ cm}$. Mahtuuko se sisään oviaukosta, joka on 90 cm leveä ja 205 cm korkea?

275. Ajatellaan suorakulmaista hiekkakenttää, jonka pinta-ala on 1 aari (100 m^2). Lyhyemmän ja pidemmän sivujen pituuksien suhde on 4 : 3. Laske Pythagoraan lauseen avulla matka hiekkakentän kulmasta kauimmaisena olevaan kulmaan.

276. (YO S1978/2) Laske $k^{\frac{5}{3}}$, kun $k^{\frac{-1}{3}} = 2$.

Lisää tehtäviä

277. Tilan eläimille rakennetaan uutta aitausta. Käytettävissä on 100 metriä sähköaitaan tarvittavaa metallijohtoa. Kuinka suuri pinta-ala kotieläimillä on käytettävissään, jos aitaus on muodoltaan

a) neliö?

b) ympyrä?

Neliön pinta-ala on sen sivun pituuden toinen potenssi, ja ympyrän pinta-ala on πr^2 , missä r on ympyrän säde. Saman ympyrän kehän pituus on $2\pi r$.

278. Millä muuttujan x arvoilla funktio $f(x) = x^5$ saa saman arvon kuin funktio $g(x) = x^4$?

279. Kuution tilavuus särmen pituuden funktiona on $f(x) = x^3$. Jos kuution tilavuus on 64, mikä on särmen pituus?

280. Tietokonepelissä *Tyrmiä ja Traakkeja* pelaajalla on käytettävissä useita eri hahmoja, kuten Santeri-soturi tai Valtteri-velho. Peli alkaa tasolta 1 ja tason noustessa hahmoista tulee vahvempia. Pelin suunnittelija määrittää kaikille vihollisille voimaluvun ja arvioi, että tasolla t Santeri-soturille keskimääräisen haastavan vihollisen on oltava voimaluvultaan $5t^{\frac{3}{2}}$ ja Valtteri-velholle $t^{\frac{5}{2}}$. Millä tasolla vihollinen on keskimääräisen haastava kullekin hahmolle, jos sen voimaluku on

- a) 30
- b) 56
- c) 100?

2.5 Suoraan ja kääntäen verrannollisuus

Kaksi muuttujaa voivat riippua toisistaan monin eri tavoin. Monissa käytännön tilanteissa ja erityisesti luonnontieteissä tavallisia riippuvuuden tyyppejä ovat suoraan ja kääntäen verrannollisuus. Suoraan verrannollisuudessa muuttujat muuttuvat samassa suhteessa, ja kääntäen verrannollisuudessa käänteisessä suhteessa.

Kaksi muuttujaa x ja y ovat suoraan verrannolliset, jos niiden suhde on aina vakio, eli pätee $\frac{x}{y} = k$, missä vakiota k kutsutaan **verrannollisuuskertoimeksi**. Yhteys kirjoitetaan yleensä muodossa $y = kx$. Jos suureet x ja y ovat suoraan verrannolliset, niin tätä merkitään $x \propto y$.

Suoraan verrannollisuus voidaan tunnistaa esimerkiksi laskemalla muuttujien suhde ja toteamalla, että se on muuttujista riippumaton vakio.

ESIMERKKI 2.121

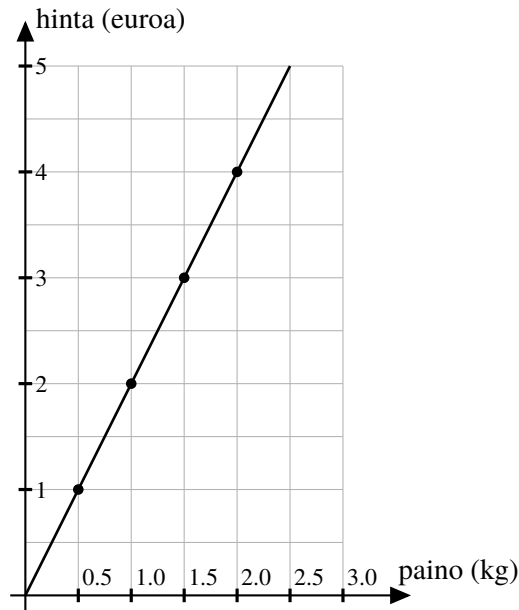
Banaanien kilohinta on 2,00 euroa. Seuraavassa taulukossa on niiden banaanien paino, jotka saa ostettua tietyllä rahamäärällä:

Paino (kg)	Hinta (euroa)	Hinta/paino (euroa/kg)
0,50	1,00	2,00
1,00	2,00	2,00
1,50	3,00	2,00
2,00	4,00	2,00

Hinnan ja painon suhde on vakio, 2,00 €/kg, joten ostettujen banaanien paino ja niihin käytetty rahamäärä ovat suoraan verrannolliset.

Suoraan verrannollisuutta voidaan kuvata myös niin, että jos toinen muuttujista kaksinkertaistuu, niin toinenkin kaksinkertaistuu. Samoin jos toisen muuttujan arvo puolittuu, toisenkin arvo puolittuu.

Jos suoraan verrannollisista muuttujista piirretään kuvaaja, pisteet asettuvat suoralle:



Suoraan verrannollisia muuttujia ovat myös esimerkiksi

- a) aika ja kuljettu matka, kun liikutaan vakionopeudella, tai
- b) kappaleen massa ja painovoiman kappaleeseen aiheuttama voima.

Jos suoraan verrannolliset muuttujat x ja y saavat toisiaan vastaavat arvot x_1 ja y_1 , x_2 ja y_2 , niin voidaan muodostaa **verrantoyhtälö**:

$$k = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

Suoraan verrannollisuutta monimutkaisempi riippuvuus on kääntäen verrannollisuus.

Muuttujat x ja y ovat kääntäen verrannolliset, jos toinen saadaan toisella jakamalla jokin vakio sillä, eli $y = \frac{a}{x}$.

Kääntäen verrannollisuus

Kääntäen verrannollisuus voidaan tunnistaa esimerkiksi kertomalla muuttujien arvoja keskenään ja huomaamalla, että tulo on muuttujista riippumaton vakio. Jos kääntäen

verrannolliset muuttujat x ja y saavat toisiaan vastaavat arvot x_1 ja y_1 , x_2 ja y_2 , niin voidaan muodostaa verranto

$$k = x_1 y_1 = x_2 y_2$$

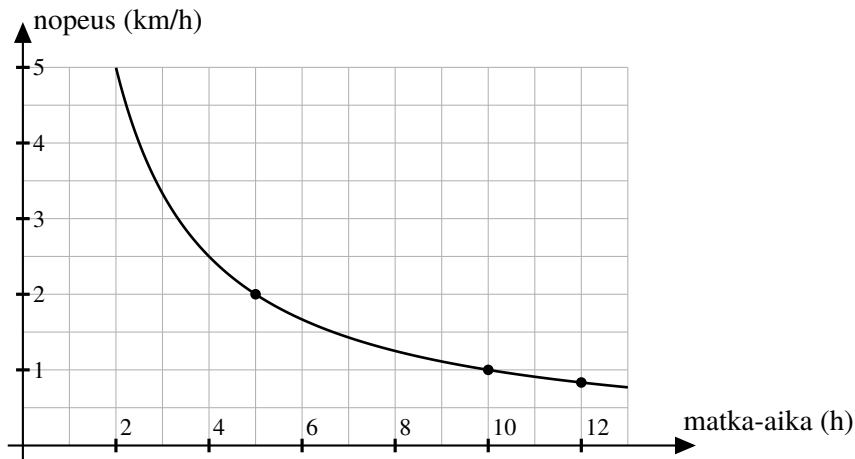
ESIMERKKI 2.122

Nopeus ja matkaan tarvittava aika ovat kääntäen verrannolliset. Jos kuljettavana matkana on 10 km, voidaan nopeudet ja matka-ajat kirjoittaa taulukoksi:

Nopeus (km/h)	Matka-aika (h)	Nopeus·matka-aika (km)
5	2	10
10	1	10
12	0,8333	10

Tulo on aina 10 km, joten nopeus ja matka-aika ovat kääntäen verrannolliset.

Kääntäen verrannollisuutta voidaan kuvata myös niin, että jos toinen muuttujista kaksinkertaistuu, toinen puolittuu. Jos kääntäen verrannollisista muuttujista piirretään kuvaaja, pisteet muodostavat laskevan käyrän:



Kääntäen verrannollisia muuttujia ovat myös esimerkiksi

- Kaivamistyön suorittamiseen kuluva aika ja työntekijöiden lukumäärä
- Äänenpaine ja äänilähteen etäisyys
- Kappaleiden välinen vetovoima ja niiden etäisyys
- Irtomakeisten kilohinta ja viiden euron irtokarkkipussin massa

Tehtäviä

Opi perusteet

281. Ratkaise

a) $\frac{x}{3} = 1$

b) $\frac{8}{x} = 2$

c) $\frac{7}{x} = \frac{16}{8}$

d) $\frac{x}{3} = \frac{1}{7}$.

282. Tarkastele seuraavia muuttujapareja

a) neliön sivun pituus ja neliön pinta-ala

b) neliön, jonka pinta-ala on 5, sivujen pituudet

c) kuljettu matka ja kulunut aika, kun nopeus on vakio

d) dieselin hinta ja 50 eurolla saatavan dieselin määrä

e) irtomyyntistä ostetun suolakurkkueuran paino ja hinta

Tutki, miten toinen muuttuja muuttuu ensimmäisen kaksinkertaistuessa tai puolittuessa. Ovatko muuttujat suoraan tai kääntäen verrannolliset vai eivät kumpakaan?

283. Isä ja lapset ovat ajamassa mökille Sotkamoon. On ajettu jo neljä viidesosaa matkasta, ja aikaa on kulunut kaksi tuntia. ”Joko ollaan perillä?” lapset kysyvät takapenkiltä. Kuinka pitkään vielä arviolta kuluu, ennen kuin ollaan mökillä?

284. Muodosta seuraavia tilanteita kuvaavat yhtälöt. Voit käyttää vakion merkkinä esimerkiksi kirjainta c .

a) Kultakimpaleen arvo x on suoraan verrannollinen sen massaan m , eli mitä painavampi kimpale, sitä arvokkaampi.

b) Aidan maalaamiseen osallistuvien ihmisten määrä x on kääntäen verrannollinen maalaamiseen kuluvaan aikaan t . Toisin sanoen, mitä enemmän maalaajia, sitä nopeammin työ on valmis.

c) Planeettojen toisiinsa aiheuttama vetovoima F on suoraan verrannollinen planeettojen massojen summaan $m_1 + m_2$ ja kääntäen verrannollinen niiden välisen etäisyyden r neliöön.

285. Hiusten pituuskasvu on suoraan verrannollinen kuluneeseen aikaan. Iinan hiukset kasvavat noin 1,5 senttimetriä kuukaudessa. Iina päättää kasvattaa hiuksia vuoden ajan. Kuinka paljon Iinan hiukset tänä aikana kasvavat?

286. Rento pyöräilyvauhti kaupunkiolosuhteissa on noin 20 km/h. Lukiolta urheiluhallille on matkaa 7 km. Kuinka monta minuuttia kestää arviolta pyöräillä lukiolta urheiluhallille?

287. Kun muuttujan x arvo on 6, muuttuja y saa arvon 12. Minkä arvon muuttuja y saa silloin, kun $x = 18$ ja

a) muuttujat x ja y ovat suoraan verrannollisia?

b) muuttujat x ja y ovat kääntäen verrannollisia?

288. Yhteen sokerikakkuun tarvitaan neljä kananmunaa, 1,5 desilitraa sokeria ja kaksi desilitraa vehnä jauhoja. Timolla on keittiössään 20 kananmunaa, litra sokeria ja 1,5 litraa jauhoja. Kuinka monta sokerikakkua Timo voi leipoa?

289. Ovatko muuttujat x ja y suoraan tai kääntäen verrannolliset vai eivät kumpakaan, jos niiden

- a) osamäärä on aina 2
- b) summa on aina 5
- c) tulo on aina 4
- d) osamäärä on aina 1?

Hallitse kokonaisuus

290. Sotkamossa isä lämmittää savusaunaa, jonka käyttöaika on suoraan verrannollinen lämmitysaikaan. Jos saunaa lämmittää kolme tuntia, pysyy se kuumana kaksi tuntia. Perhe haluaa saunoa kolme tuntia kello kahdeksasta eteenpäin. Milloin saunaa pitää alkaa lämmittää?

291. Äidinkielen kurssilla annettiin tehtäväksi lukea 300-sivuinen romaani. Eräs opiskelija otti aikaa ja selvitti lukevansa vartissa seitsemän sivua. Kuinka monta tuntia häneltä kuluu koko romaanin lukemiseen, jos taukoja ei lasketa?

292. Kun $x = 5$, $y = 8$. Mikä on y :n arvo silloin kun $x = 4$, ja muuttujat x ja y ovat

- a) suoraan verrannollisia?
- b) kääntäen verrannollisia?

293. Alkuperäiskansojen perinteitä tutkiva etnologi kerää saamelaisten kansantärinoita. Kierrettyään viikkojen ajan saamelaisperheiden vieraana palaa etnologi yliopistolle mukanaan äänitiedostoiksi tallennettuja haastatteluja. Jotta etnologi voi ryhtyä kirjoittamaan tutkimusraporttia, pitää haastattelutiedostot ensin purkaa tekstiksi eli *litteroida*. Tähän etnologi pyytää apua laitoksen opiskelijoilta. Neljä opiskelijaa litteroi tiedostot 25 tunnissa. Kuinka kauan aikaa kuluu, jos työhön saadaan vielä kolme opiskelijaa lisää? Kuinka monta opiskelijaa tarvitaan, jotta työ saataisiin tehdyksi 9 tunnissa? Oletetaan, että kaikkien opiskelijoiden työteho on sama.

294. Kappaleen liike-energia on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Kun kappale liikkui nopeudella 9,0 m/s, sillä oli 150 joulea liike-energiaa. Laske kappaleen liike-energia, kun sen nopeus on 5,0 m/s.

295. Venematka Nauvoon kestää tyynellä säällä 75 minuuttia. Kuinka monta prosenttia aika lyhenee, jos ostetaan uusi vene, jonka nopeus on

- a) 30 % suurempi kuin vanhan veneen nopeus 35 km/h?
- b) 45 % suurempi kuin vanhan veneen nopeus v ?

296. Puun rungon tilavuutta voidaan arvioida suoran ympyräkartion tilavuuden kaavalla, $V = 1/3 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$, missä h kuvaa puun korkeutta ja r puun sädettä.

a) Vuosien 2012–2013 aikana puun korkeus kasvoi 20 % ja säde 10 %. Kuinka monta prosenttia puun tilavuus kasvoi?

b) Samalla aikavälillä puun kuutiohintaa (€/m³) laski 35 %. Kuinka paljon puun arvo muuttui (prosentteina)?

297. Pullareseptin (<http://kotiliesi.fi/ruoka/reseptit/pullataikina>) mukaan taikinaan tarvitaan 5 dl maitoa, 2 dl sokeria ja 1,5 l vehnäjauhoja. Tällöin saadaan 40 pikkupullaa.

a) Jesse haluaa leipoa 16 pullaa. Kuinka paljon hän tarvitsee maitoa, sokeria ja vehnäjauhoja?

b) Jos Jesse on käytössä 3 dl maitoa, kuinka monta pikkupullaa hän voi enintään tehdä?

Lisää tehtäviä

298. Metsäpalon pinta-ala on suoraan verrannollinen palamisajan neliöön. Kahdessa päivässä metsää on palanut neliökilometrin verran.

a) Kuinka monta neliökilometriä metsää on palanut, kun metsäpalo on kestänyt kuusi päivää?

b) Kuinka monen päivän päästä metsää on palanut yli 30 neliökilometriä?

299. Pallon muotoisen lankakerän halkaisija on suoraan verrannollinen langan pituuden kuutioon. Kun lankakerässä on 500 metriä lankaa, on sen halkaisija 4 cm. Jättimäisen lankakerän halkaisija on kaksi metriä. Riittäisikö siinä oleva lanka levitettäväksi maapallon ympäri? Maapallon ympärysmitta on noin 40 000 km.

300. Kymmenen miestä kaivaa viisitoista kuoppaa kymmenessä tunnissa. Kuinka kauan viidellä miehellä kestää kaivaa 30 kuoppaa?

301. Karkkikulhon tyhjentymisaika on kääntäen verrannollinen syöjien määrään. Kun syöjiä on 20, kulho syödään tyhjäksi kahdessa tunnissa. Juhliin kutsuttiin sata ihmistä, mutta kulhon tyhjäksi syömiseen kului puoli tuntia. Kuinka moni vierasta ei syönyt karkkeja?

302. Kenkätehtaalla sata työntekijää valmistaa yhdeksässä tunnissa 500 paria kenkiä. Tehtaan omistaja päättää siirtää tuotannon halvemman työvoiman maahan, jossa hänellä on varaa palkata 300 työntekijää.

a) Jos uudet työntekijät ovat yhtä tehokkaita kuin vanhat, kuinka kauan heillä kestää tehdä 500 paria kenkiä?

b) Uudet työntekijät suostuvat tekemään 15 tunnin työpäivää. Kuinka monta paria kenkiä yhden työpäivän aikana valmistuu?

303. Kuution tilavuus on suoraan verrannollinen sen pinta-alan neliöjuuren kolmanteen potenssiin. Kun kuution tilavuus on 64 m³, ja sen pinta-ala on 96 m². Jos kuution pinta-ala on 100 m², mikä on sen tilavuus?

304. ★ Kappaleen putoamisen kesto maahan korkeudelta x on kääntäen verrannollinen putoamiskiihtyvyyden g neliöjuureen. Vakio g on kullekin taivaankappaleelle ominainen ja eri puolilla taivaankappaletta likimain sama. Empire State Buildingin katolta (korkeus 381 metriä) pudotetulla kuulalla kestää noin 6,2 sekuntia osua maahan. Marsin putoamiskiihtyvyys on 37,6 % Maan putoamiskiihtyvyydestä. Jos Empire State Building sijaitsisi Marsissa, kuinka kauan kuluisi kuulan maahan osumiseen?

LUKU 3

Funktiot

3.1 Funktio ja sen esitystavat

Usein ollaan kiinnostuneita siitä, millainen yhteys on kahden asian välillä. Funktio on matemaattinen työkalu näiden yhteyksien tarkastelemiseen.

Funktio

Funktio eli **kuvaus** f joukosta A joukkoon B liittää jokaiseen joukon A alkioon täsmälleen yhden joukon B alkion. Funktion f alkioon x liittämää arvoa merkitään $f(x)$.

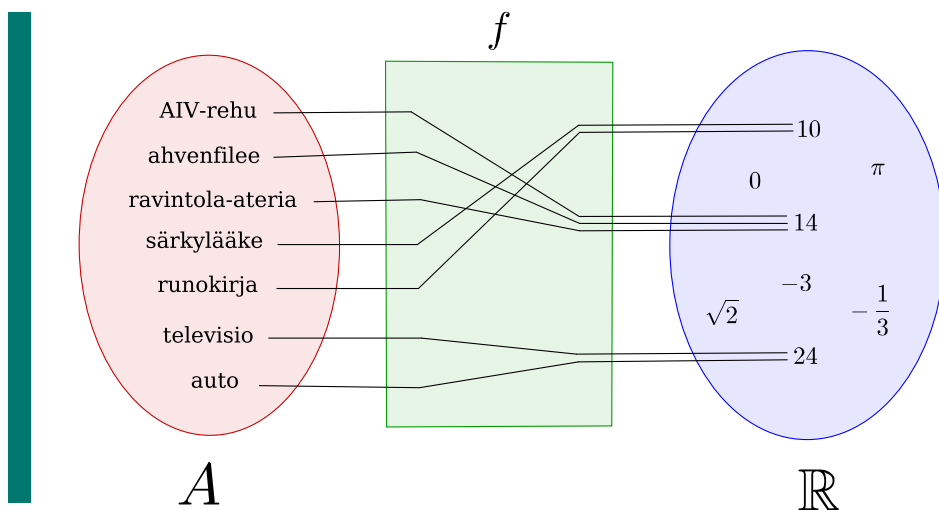
Joukkoa A sanotaan tässä f :n **määrittelyjoukoksi** ja joukkoa B puolestaan f :n **maailijoukoksi**. Tällöin voidaan merkitä lyhyesti $f : A \rightarrow B$. Funktion f **arvojoukon** muodostavat f :n kaikki maailijoukkoon B kuuluvat arvot $f(x)$.

ESIMERKKI 3.123

Hyödykkeen ja siitä maksettavan arvonlisäveron välistä yhteyttä voidaan kuvata funktiolla. Valitaan funktion määrittelyjoukoksi tiettyjen hyödykkeiden joukko

$$A = \{\text{ahvenfilee, AIV-rehu, auto, runokirja, ravintola-ateria, särkylääke, televisio}\},$$

ja arvojoukoksi reaalityluvut. Merkitään tätä funktiota kirjaimella f , jolloin $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Funktio voi liittää kuhunkin hyödykkeeseen esimerkiksi siitä maksettavan arvonlisäveroprosentin: $f(\text{särkylääke}) = 10$ ja $f(\text{televisio}) = 24$.



ESIMERKKI 3.124

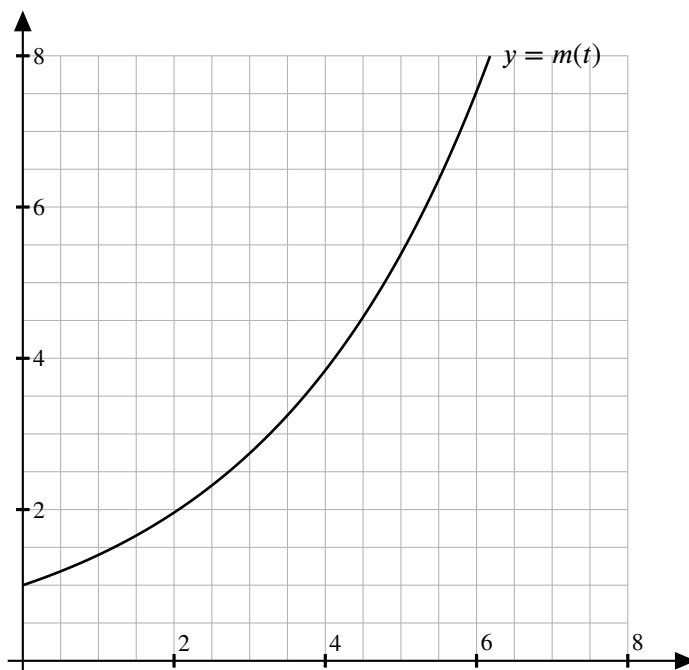
Seuraavaan taulukkoon on koottu kuukausittaiset keskilämpötilat Sodankylässä vuonna 2012.

tam	hel	maa	huh	tou	kes	hei	elo	syys	loka	mar	jou
-12	-16	-6	-3	6	11	13	12	7	0	-4	-15

Taulukon perusteella voidaan määritellä funktio f , joka kuvaa kuukaudet keskilämpötiloiksi. Määrittelyjoukko ovat vuoden kaikki kuukaudet, maalijoukkoon kuuluvat kaikki mahdolliset lämpötilat, ja arvojoukko koostuu funktion kaikista arvoista, siis eri kuukausien keskilämpötiloista. Nyt esimerkiksi $f(\text{tam}) = -12$ ja $f(\text{tou}) = 6$.

ESIMERKKI 3.125

Seuraava kuva esittää erään suotuisissa oloissa kehittyvän bakteerikannan massaa ajan t funktiona m .



Alkutilanteessa eli ajanhetkellä $t = 0$ bakteerikannan massa $m(t)$ on $m(0) = 1$ gramma. Kahden tunnin kuluttua bakteerikannan massa on $m(2) \approx 2,0$ grammaa ja kuuden tunnin kuluttua vastaavasti $m(6) \approx 7,5$ grammaa.

Funktioiden merkitsemiseen liittyy joitakin vakiintuneita tapoja:

- 1) Merkintä $f(x) = y$ luetaan esimerkiksi: ”funktio f saa arvon y pisteessä x ” tai lyhyemmin: ” f arvolla x on y .”
- 2) Funktion määrittely- ja maalijoukot jätetään usein merkitsemättä, jos ne voidaan päätellä asiayhteydestä. Tällä kurssilla funktiot ovat yleensä reaaliluvuilta reaaliluvuille.
- 3) Usein kirjoitetaan esimerkiksi ”funktio $f(x) = x^2 + 3x$ ”, vaikka tarkkaan ottaen funktio on f ja $f(x)$ on sen saama arvo pisteessä x .
- 4) Toisinaan funktiolle ja funktion kuvaajalle ei tehdä selkeää eroa: $y = f(x)$ samaistetaan koordinaatistoon piirretyn funktion kuvaajan kanssa. Oikeastaan funktio ja sen kuvaaja ovat kuitenkin eri asioita.
- 5) Niitä x :n arvoja, joilla funktio saa arvon 0, sanotaan funktion **nollakohdiksi**.

Huomaa seuraavien käsitteiden erot:

Käsitteitä

Määritellään funktio f seuraavasti: $f(x) = 3x - 2$ § f on funktion nimi § merkintä $f(x)$ tarkoittaa funktion f arvoa kohdassa x § $3x - 2$ on lauseke, jolla $f(x)$ on määritelty § *Yhtälö* $f(x) = 3x - 2$ kertoo, että funktion f arvo kohdassa x on yhtäsuuri lausekkeen $3x - 2$ kanssa § x on funktion muuttuja

REAALIFUNKTIOT

Funktioita, jotka määritellään reaaliluvuilla, ja jotka saavat arvokseen reaalilukuja, kutsutaan reaalifunktioiksi. Funktiolla, erityisesti reaalifunktioilla, on usein jokin selkeä sääntö, joka voidaan kirjoittaa matemaattisena lausekkeena.

ESIMERKKI 3.126

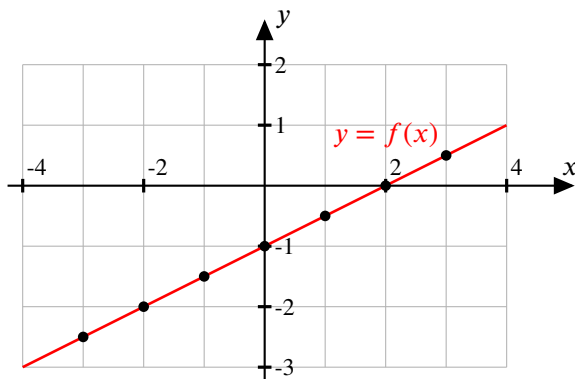
Jos neliön sivun pituutta merkitään muuttujalla x , voidaan pinta-alaa kuvata funktiolla $A : A(x) = x^2$.

Reaalifunktioita voidaan havainnollistaa koordinaatistossa *kuvaajien* avulla. Funktion f kuvaajassa koordinaatistoon piirretään ne pisteet (x, y) , joiden y -koordinaatti on f :n arvo x -koordinaatissa. Reaalifunktioilla ei kuitenkaan voida laskea $y = f(x)$ kaikilla f :n määrittelyjoukon luvuilla x , joten esimerkiksi graafiset laskimet laskevat $y = f(x)$ ”riittävän monella” luvulla ja sovittavat kuvaajan niiden perusteella. Funktioiden kuvaajia voi piirtää helposti paitsi graafisilla laskimilla, myös tietokoneohjelmilla sekä esimerkiksi verkossa Wolfram Alphalla (<http://www.wolframalpha.com/>).

ESIMERKKI 3.127

Funktion $f : f(x) = \frac{x}{2} - 1$ kuvaaja sisältää kaikki pisteet (x, y) , joilla pätee $y = \frac{x}{2} - 1$. Funktion kuvaaja leikkaa x akselin kun $x = 2$, tämä pistettä sanotaan funktion nollakohdaksi. (Huomaa, että funktioilla voi olla myös useampia nollakohtia, tai ei yhtään nollakohtaa.)

x	$y = f(x)$
-3	-2,5
-2	-2
-1	-1,5
0	-1
1	-0,5
2	0
3	0,5

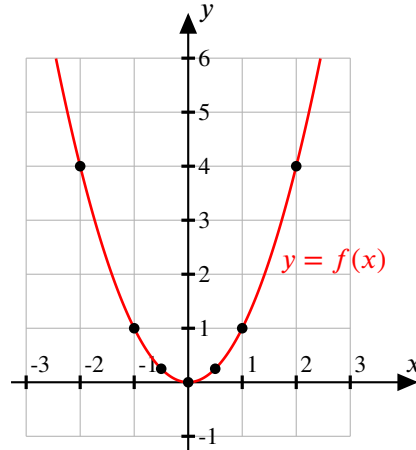


ESIMERKKI 3.128

Funktion $f(x) = x^2$ kuvaaja sisältää kaikki pisteet (x, y) , joilla pätee $y = x^2$.

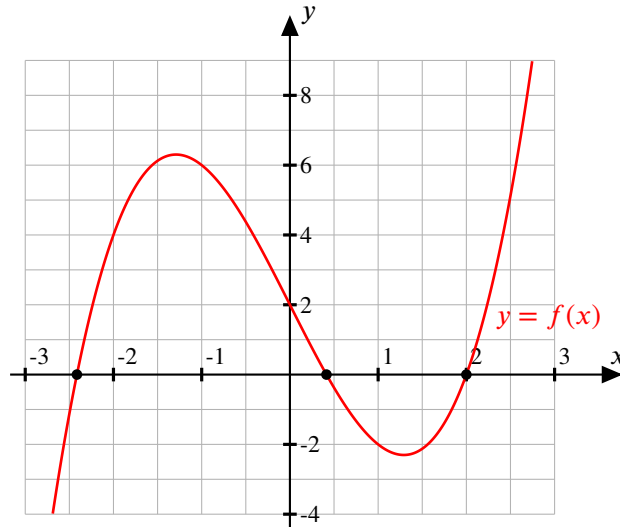
Kuvaajan nollakohta on tässä tapauksessa, kun x saa arvon 0, koska $y = 0^2 = 0$.

x	$y = f(x)$
-2	4
-1	1
-0,5	0.25
0	0
0,5	0.25
1	1
2	4



ESIMERKKI 3.129

Funktion $f(x) = x^3 - 5x + 2$ kuvaaja sisältää kaikki pisteet (x, y) , joilla pätee $y = x^3 - 5x + 2$. Funktiolla on tässä tapauksessa kolme nollakohtaa:



MÄÄRITTELYJOUKKO JA ARVOJOUKKO

Funktion **määrittelyjoukko** on niiden arvojen joukko, joille funktion arvo on olemassa. Jos määrittelyjoukkoa ei ole mainittu erikseen, määrittelyjoukon tarkoitetaan

tavallisesti olevan *mahdollisimman laaja reaalilukujen osajoukko* johon kuuluville arvoille funktion arvon voi laskea.

ESIMERKKI 3.130

Määritellään funktio g lausekkeella

$$g(x) = \sqrt{x}.$$

Mikä on funktion g määrittelyjoukko?

Ratkaisu. Neliöjuuri $\sqrt{x}$ on määritelty, kun $x \geq 0$. Funktion g määrittelyehto on siis $x \geq 0$ ja määrittelyjoukko koostuu nolasta ja sitä suuremmista reaaliluvuista.

Vastaus. $x \geq 0$.

Käytännössä määrittelyjoukon rajoituksia tarvitaan yllä esitetyn parillisen juuren lisäksi esimerkiksi silloin kun funktiossa esiintyy muuttuja nimittäjässä. Tällöin on huomioitava, ettei nimittäjässä saa olla nollaa millään muuttujan x arvolla. Soveltavissa tehtävissä saatetaan myös rajoittaa määrittelyjoukkoa vaikkapa siksi, että pituus ei voi olla negatiivinen.

ESIMERKKI 3.131

Määritellään funktio f lausekkeella

$$f(x) = \frac{1}{x-1}.$$

Mikä on funktion määrittelyjoukko?

Ratkaisu. Funktio f on määritelty, kun nimittäjä $x-1$ on erisuuri kuin 0. Tämä toteutuu kaikilla x :n arvoilla lukuun ottamatta arvoa $x=1$. Funktion määrittelyjoukkoon kuuluvat siis kaikki reaaliluvut paitsi luku 1.

Vastaus. Funktion f määrittelyjoukko on reaalilukujen joukko poislukien luku 1.

Funktion **arvojoukko** sisältää täsmälleen ne maalijoukon alkiot, jotka funktio saa arvokseen ainakin yhdessä pisteessä.

ESIMERKKI 3.132

Mikä on edellä määritellyn funktion f arvojoukko?

Ratkaisu. Arvojoukon selvittämiseksi tutkitaan, millä luvun a arvoilla yhtälöllä $f(x) = a$ on ratkaisu. Oletetaan, että $x \neq 1$ (ks. edellinen esimerkki).

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{x-1} & | \cdot (x-1), \text{ sillä } x \neq 1 \\ a(x-1) &= 1 \end{aligned}$$

Havaitaan, että jos $a = 0$, yhtälöllä ei voi olla ratkaisua, koska $0 \cdot (x-1) = 0 \neq 1$. Oletetaan jatkossa, että $a \neq 0$.

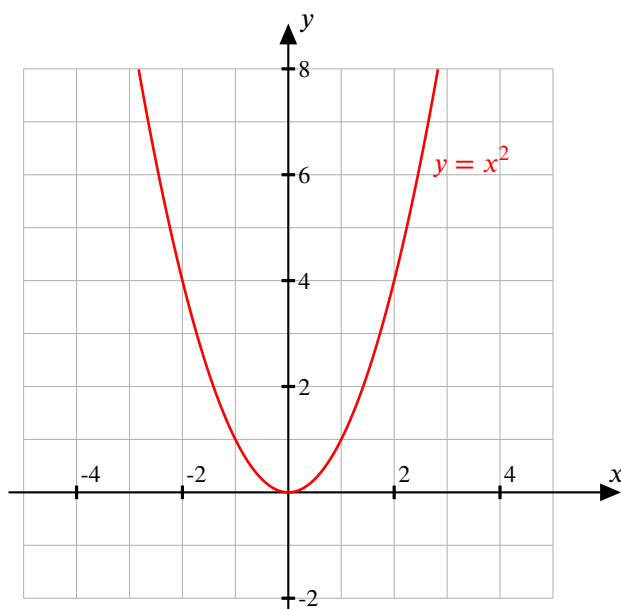
$$\begin{aligned} a(x-1) &= 1 & | : a, \text{ sillä } a \neq 0 \\ x-1 &= \frac{1}{a} \\ x &= 1 + \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Havaitaan, että yhtälöllä on ratkaisu kaikilla $a \neq 0$.

Vastaus. Funktion f arvojoukko on reaalilukujen joukko pois lukien luku 0.

ESIMERKKI 3.133

Tarkastellaan reaalifunktiota $f(x) = x^2$. Funktion f *määrittelyjoukko* on selkeästi koko reaalilukujen joukko, sillä toinen potenssi x^2 on määritelty, olipa muuttuja x mikä reaaliluku tahansa. Funktio f on reaalifunktio, joten sen arvot ovat reaalilukuja. Sen *maalijoukko* on siis koko reaalilukujen joukko. Kuitenkin, koska parillisena potenssina $x^2 \geq 0$, olipa x mikä luku hyvänsä, funktion f *arvojoukko* on kaikki positiiviset reaaliluvut.



PALOITTAIN MÄÄRITELTY FUNKTIO

Kappaleessa 1.10 sivuttiin itseisarvon määritelmää. Itseisarvofunktio $f : f(x) = |x|$ voidaan määritellä seuraavasti.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, |x| = \begin{cases} x & \text{jos } x \geq 0 \\ -x & \text{jos } x < 0 \end{cases}$$

Funktio siis jättää ei-negatiiviset luvut ennalleen, mutta vaihtaa negatiivisen luvun vastaluvukseen, ja arvojoukko koostuu pelkästään ei-negatiivisista luvuista. Funktio on määritelty kahdessa eri osassa: lähtöjoukon alkion arvosta riippuen valitaan sille sovellettava lauseke.

ESIMERKKI 3.134

Määritellään funktio $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lausekkeilla

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} & \text{jos } x \neq 0 \\ 1 & \text{jos } x = 0 \end{cases}$$

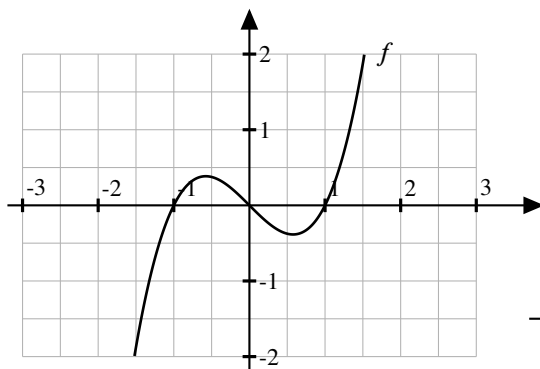
Mikä on funktion arvojoukko? Miksi määrittelemme kohdan $x = 0$ erikseen?

Ratkaisu. Kun $x \neq 0$, osamäärästä $\frac{x}{x}$ saadaan aina 1. Kohdassa $x = 0$ funktion arvoksi on puolestaan määritelty 1. Näin ollen funktion g arvojoukko koostuu yhdestä ainoasta luvusta, ykkösestä. Koska lauseke $\frac{0}{0}$ ei ole määritelty, määrittelemme kohdan $x = 0$ erikseen. Funktio on siis vakioarvoinen ja voisimme kirjoittaa sen yksinkertaisesti $g : g(x) = 1$.

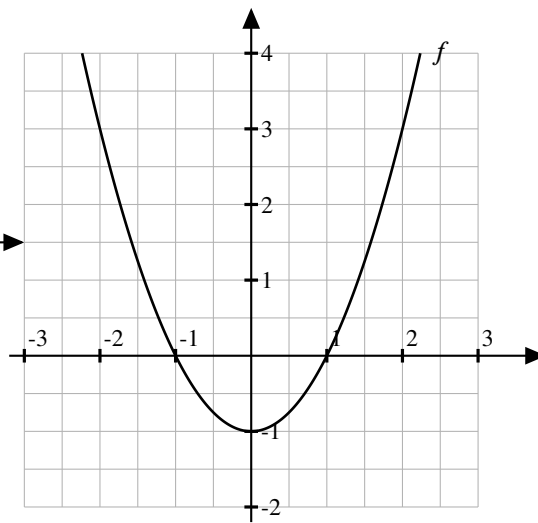
Tehtäviä

Opi perusteet

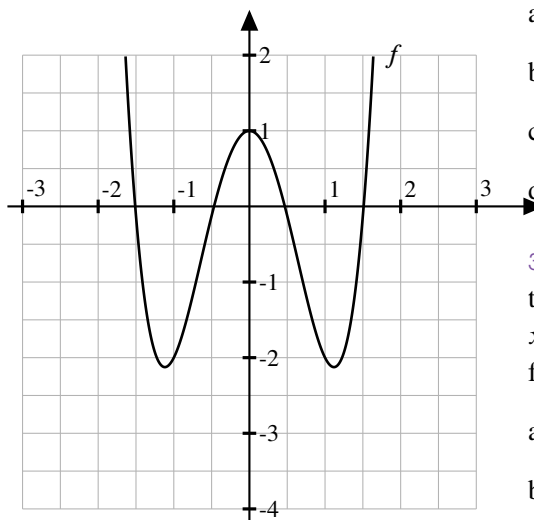
305. Määritä kuvaajasta katsomalla funktion f nollakohdat. Saako funktio f negatiivisia ja positiivisia arvoja?



307. Määritä kuvaajasta funktion f arvot muuttujan arvoilla 0 ja 1. Millä muuttujan arvoilla f saa arvon 3? Entä arvon 0?



306. Määritä kuvaajasta katsomalla funktion f nollakohdat. Saako funktio f sekä negatiivisia ja positiivisia arvoja?



308. Hahmottele funktion kuvaaja koordinaatistoon. Voit myös käyttää tietokonetta.

a) $f(x) = 2$

b) $f(x) = 3x + 2$

c) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = \frac{2}{x}$

309. Laske taulukkoon funktion arvo pisteissä $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ ja $x = 2$. Hahmottele näiden tietojen avulla funktion kuvaaja.

a) $f(x) = x^2 + x + 1$

b) $f(x) = 3x^2$

c) $f(x) = x^3 + 2x + 2$

310. Mikä on funktion $f(x) = \frac{x+1}{2x+5}$ määrittelyjoukko?

311. Olkoon $f(x) = 2x - 1$ ja $g(x) = 2 - x$. Millä muuttujan x arvolla $f(x) = g(x)$? Piirrä funktioiden kuvaajat ja tarkista vastauksesi kuvasta.

312. Missä pisteessä funktio $P(t) = -2t + 4$ saa arvon

- a) 4
- b) -2
- c) 8?

Mikä on funktion P nollakohta?

313. Tuuli ostaa joka viikko pussin vadelmaveneitä. Yksi pussi maksaa 2,5 euroa. Tuulin rahatilannetta euroina havainnollistaa funktio $f(x) = -2,5x + 20$, jossa muuttuja x kuvaa aikaa viikkoina.

- a) Kuinka paljon rahaa Tuulilla on aluksi?
- b) Kuinka paljon rahaa Tuulilla on viiden viikon jälkeen?
- c) Milloin Tuulilla on jäljellä enää 5 euroa?
- d) Milloin rahat loppuvat?

Hallitse kokonaisuus

314. Olkoon $f(x) = \frac{x}{3} - 4$ ja $g(x) = 3x - 7$. Millä x :n arvolla pätee $f(x) = g(x)$?

315. Mikä on funktion määrittelyehto?

- a) $f(x) = \sqrt{x+6}$
- b) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}}$
- c) $f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{2}}$

316. Määritä funktion g arvojoukko, kun

- a) $g(x) = x - \sqrt{2}$
- b) $g(x) = \frac{3}{x-2}$
- c) $g(x) = \sqrt[4]{x}$
- d) $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

317. Lääketieteen valintakoneessa on monivalintatehtävä, jossa kustakin oikeasta vastauksesta saa 0,25 pistettä ja kustakin väärästä vastauksesta pistemäärästä vähennetään 0,5 pistettä. Monivalintakohtia on 28. Olettaen kokelaan vastaavan jokaiseen tehtävään, esitä kokonaispistemäärä p väärin vastauksien määrän v funktiona. Kuinka moneen kohtaan kokelas on korkeintaan vastannut väärin, jos hän saa positiivisen kokonaispistemäärän?

318. Suorakaiteen muotoisen aitauksen toinen sivu on 2 m pidempi kuin toinen. Muodosta aitauksen pinta-alan funktio $A(x)$. Mikä on aitauksen pinta-ala, kun lyhyemmän sivun pituus on

- a) 0 m
- b) 5 m
- c) 20 m?

d) Mikä on funktion $A(x)$ määrittelyehto?

319. Olkoon $f(x) = \frac{7s+5x}{6} + 2s - 1$ ja $g(x) = -2x + \frac{1}{2}$. Määritä vakio s , kun

- a) $f(0) = g(0)$
- b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right)$.

Määritä vielä $f(6)$ ja $g(f(6))$, kun $s = 1$.

320. Olkoon $f(x) = -2x$. Mitä on

- a) $f(x + 3)$
- b) $f(x) + 3$
- c) $f(3x)$
- d) $3f(x)$?

321. Olkoon $z(x) = \frac{x^2 + \frac{1}{2}x}{x} - x + 5$. Määritä

- a) $z\left(\frac{1}{2}\right)$
- b) $z(-1)$
- c) $z(2013)$.

Osoita, ettei funktion z arvo riipu muuttujan arvosta.

322. Millä vakion a arvolla funktio $g(x) = \frac{2x+1+a}{5x}$ saa arvon 5 kohdassa $x = 3$?

Lisää tehtäviä

323. Olkoon $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2-x}$. Laske, mikäli mahdollista:

- a) $f(2)$
- b) $f(1)$
- c) $f(0)$
- d) $f(-1)$

324. Olkoon $f(x) = \frac{2^x+4}{x}$. Laske, mikäli mahdollista:

- a) $f(2)$
- b) $f\left(\frac{1}{3}\right)$
- c) $f(0)$
- d) $f(-1)$

325. Olkoon $f(x) = \frac{x^2+3}{x}$. Laske

- a) $f(2)$
- b) $f(a)$
- c) $f(2a)$
- d) $2f(x^2)$
- e) $f(\sqrt{x+1})^2$.

326. ★ Millä muuttujan x arvoilla yhtälö $f(f(x)) = x$ pätee, kun

- a) $f(x) = 1$
- b) $f(x) = x$
- c) $f(x) = x + 1$
- d) $f(x) = 2x + 1$?

327. ★ Olkoon $f(x) = \frac{x}{5}$ ja $g(x) = 2x - 3$. Laske

- a) $f(f(4))$
- b) $f(g(4))$
- c) $g(f(4))$
- d) $g(f(x))$
- e) $f(g(x))$.

328. ★ Olkoon $f(x) = \sqrt{x}$ ja

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Laske

- a) $g(f(2))$
- b) $g(f(0))$.

329. Määritellään funktio f lausekkeella

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1.$$

Funktion f kuvaaja löytyy alta. Oletetaan lisäksi, että $a > 1$. Päätele lukujen suuruusjärjestys.

a) $f(a)$ ja $f(a+2)$

b) $f(-a)$ ja $f(a)$

330. Etsi jokin sellainen funktio, joka toteuttaa annetun ehdon. Jonkinlaisen kuvan hahmottelusta on apua.

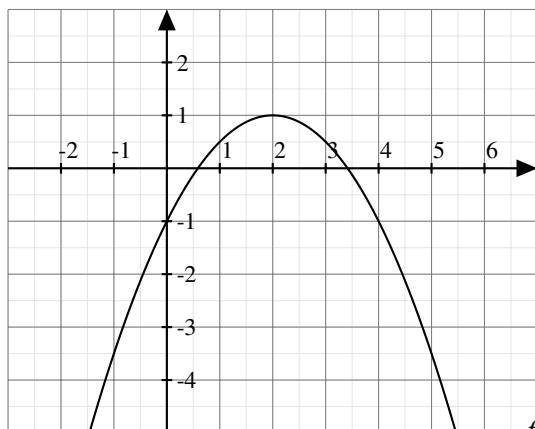
a) $f(3) = 2$ ja $f(24) = 16$

b) Jos $f(a) = b$, niin $f(a+1) = b+1$

c) Jos $f(a) = b$, niin $f(a+1) = b-1$

d) Jos $f(0) = 0$ ja $z > 0$, niin $f(\pm z) = z$.

(Vinkki: $|\pm a| = a$)



$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$$

3.2 Potenssifunktio

Kahden muuttujan välinen riippuvuus ei monesti ole suoraan tai kääntäen verrannollista. Potenssifunktion käyttäminen on eräs keino kuvata tällaisia yleisempiä riippuvuuksia.

Potenssifunktio

Potenssifunktiot ovat muotoa $f(x) = ax^n$ olevat funktiot, jossa $a \neq 0$.

Eksponenttia n kutsutaan potenssifunktion **asteluvuksi** tai **asteeksi**. Potenssifunktion eksponentti voi olla mikä tahansa reaaliluku, mutta rajoitumme ensin käsittelemään tapauksia, jossa $n = 1, 2, 3, \dots$

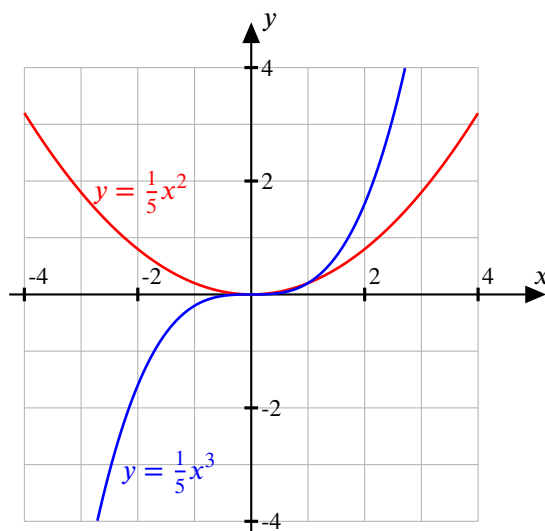
ESIMERKKI 3.135

Jos neliön sivun pituus on x , neliön pinta-ala voidaan laskea funktiolla $A(x) = x^2$. Esimerkiksi jos $x = 3$ cm, saadaan neliön pinta-alaksi $A(x) = 9$ cm². Vastaavasti kuutiolle: jos x kuvaa kuution särmän pituutta, funktiolla $V(x) = x^3$ voidaan laskea kuution tilavuus. Sekä $A(x)$ että $V(x)$ ovat esimerkkejä potenssifunktioista.

Potenssifunktion aste vaikuttaa funktion kuvaajan muotoon:

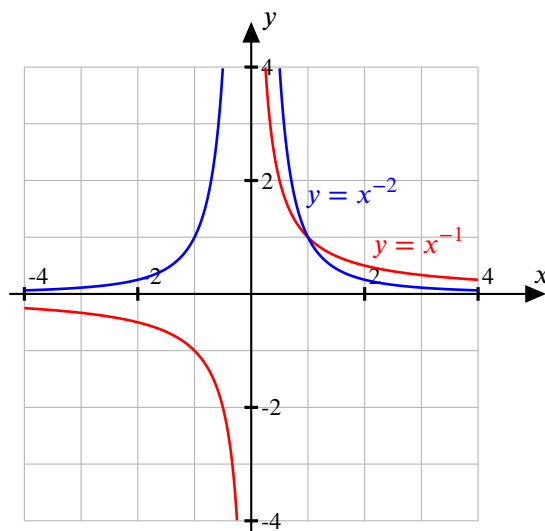
Kuvaajan muoto

- Jos aste on parillinen, kuvaaja on U-kirjaimen muotoinen ja funktio saa a :n merkistä riippuen joko pelkästään positiivisia tai pelkästään negatiivisia arvoja.
- Jos aste on pariton, kuvaaja muodostaa ”kaksoismutkan” ja potenssifunktio saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja.



Potenssifunktion tärkeitä erikoistapauksia ovat asteluvut $n = 1$ ja $n = -1$. Kun $n = 1$, saadaan edellisessä luvussa esitelty suoraan verrannollinen riippuvuus $x:n$ ja $f(x):n$ välillä, ja kun $n = -1$, muuttuja x ja funktion arvo $f(x)$ ovat kääntäen verrannolliset.

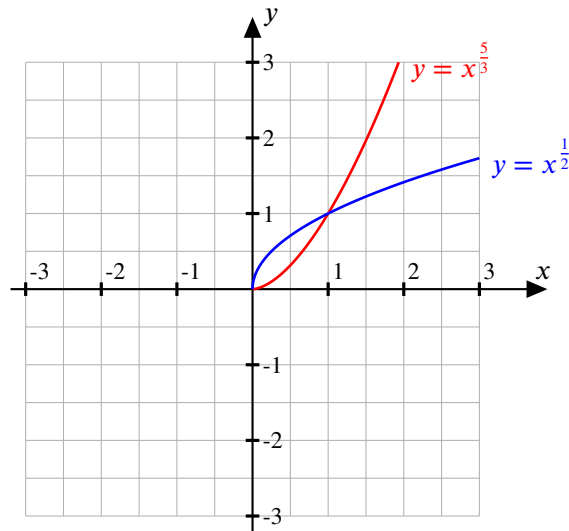
Potenssifunktiota voidaan laajentaa sallimalla eksponentille n myös negatiiviset arvot. Tällöin funktion muoto muuttuu merkittävästi. Funktio ei myöskään ole enää määritelty kohdassa $x = 0$, vaan funktion arvot ”räjähtävät äärettömyyteen”, kun y -akselia lähestytään:



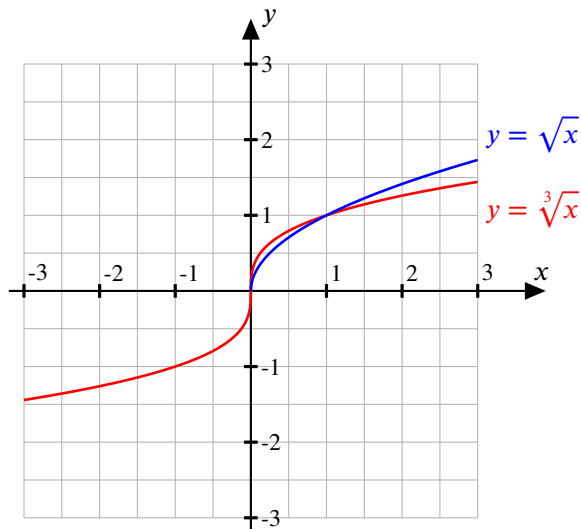
Aiemmin määriteltiin murtopotenssi $x^{\frac{m}{n}}$, missä kantaluku $x \geq 0$. Murtopotenssifunktiota määriteltessä pitää myös muistaa kantaluvun positiivisuus, joten murtopotenssifunktion $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ määrittelyjoukko on positiivisten reaalilukujen joukko,

eli $x \geq 0$.

Huomaa, että koska murtopotensseilla pätee $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, funktio $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ on itse asiassa sama kuin funktio $g(x) = \sqrt{x}$. Kuitenkin, koska murtopotensseja ei määritellä negatiivisilla kantaluvuilla, funktio $h(x) = x^{\frac{1}{3}}$ on määritelty ainoastaan kun $x \geq 0$, mutta funktion $w(x) = \sqrt[3]{x}$ määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko. Alla jotain murtopotenssifunktioita ja juurifunktioita esitettynä koordinaatistossa.



Juurifunktioiden kuvaajissa huomataan määrittelyjoukko ja yhteys murtopotenssifunktioihin. Parillisen juurifunktion kuvaajaa ei voida piirtää negatiivisille muuttujan arvoille:



Kuvaajista voidaan nähdä yhteys potenssin ja kuvaajan tyyppin välillä. Tarkastellaan potenssifunktiota $f(x) = x^a$.

Kuvaajan tyyppi

- Jos potenssi $a > 1$, kuvaajan kasvu kiihtyy kun x kasvaa.
- Jos potenssi $a < 1$, kuvaaja kasvaa aluksi nopeasti, mutta funktioiden arvojen kasvu hidastuu todella vähäiseksi x :n kasvaessa.
- Jos potenssi $a = 1$, funktio f saa muodon $f(x) = x^1 = x$, ja funktion kuvaaja on suora $y = x$.
- Jos potenssi $a < 0$, funktiota $f(x) = x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ ei ole määritelty kun $x = 0$, ja funktio käyttäytyy origon ympäristössä erikoisesti.

Tässä kurssissa on tarkoitus vain sivuta erilaisia funktioita ja niiden kuvaajia, ja tutustua niiden käyttäytymiseen alustavasti. Asiaan palataan useaan otteeseen myöhemmillä kursseilla. Esimerkiksi funktioita kokonaislukupotenssilla tarkastellaan lähemmin kurssilla MAA2 ja juuri- ja murtopotenssifunktioita kurssilla MAA8.

Yleinen verrannollisuus

Suoraan ja kääntäen verrannollisuus ovat tärkeitä erikoistapauksia yleisestä verrannollisuudesta, jossa muuttuja y on verrannollinen muuttujan x johonkin potenssiin:

Yleinen verrannollisuus

$y \propto x$ siten, että $y = kx^r$, missä k ja r ovat reaalityyppisiä lukuja.

ESIMERKKI 3.136

- a) Kokeellisesti on havaittu, että auton jarrutusmatka x on likimain verrannollinen vauhdin v neliöön: $x \propto v^2$.
- b) Newtonin painovoimalain mukaan kahden massan välisen vuorovaikutuksen suuruus on verrannollinen käänteisesti niiden etäisyyden neliöön: $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$,

■ missä γ on universaali painovoimavakio ja r on massojen välinen etäisyys.

Erityisen yleinen verrannollisuus luonnonilmiöissä on kääntäen verrannollisuus muuttujan toiseen potenssiin.

Tehtäviä

Opi perusteet

331. Mikä on seuraavien potenssifunktioiden aste?

- a) $f(x) = x$
- b) $f(x) = 5x^5$
- c) $f(x) = \frac{1}{2x}$
- d) $f(x) = x^{-2}$

332. Olkoon $g(x) = -2x^{-2}$. Laske

- a) $g(4)$
- b) $g(\frac{1}{4})$
- c) $g(-\frac{1}{4})$
- d) $g(-4)$.

333. Olkoon $f(x) = x^{-3}$. Laske

- a) $f(1)$
- b) $f(2)$
- c) $f(-\frac{1}{3})$.

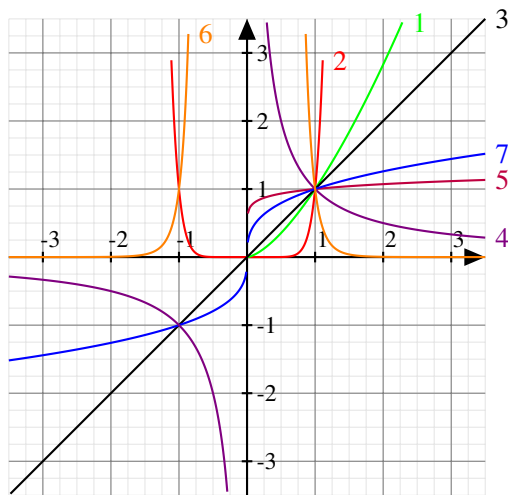
334. Saako potenssifunktio f negatiivisia arvoja, jos

- a) $f(x) = x^2$
- b) $f(x) = -2x^7$
- c) $f(x) = 3x^{-3}$
- d) $f(x) = -6x^{-4}$
- e) $f(x) = x^{-6}$?

335. Saavatko funktiot, jotka määritellään lausekkeilla $f(x) = x^3 - 1$ ja $g(x) = x^3 + 1$, missään kohdassa samaa arvoa?

336. Yhdistä funktioiden kuvaajat oikeaan funktion lausekkeeseen.

- a) $g(x) = x$
- b) $c(x) = x^{10}$
- c) $a(x) = \sqrt[3]{x}$
- d) $b(x) = x^{\frac{1}{10}}$
- e) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$
- f) $d(x) = x^{-1}$
- g) $h(x) = x^{-8}$



Hallitse kokonaisuus

337. Olkoon $f(x) = x^2$. Millä x :n arvoilla

- a) $f(x) = 4$
- b) $f(x) = 25$
- c) $f(x) = 121$?

338. Minkä kahden peräkkäisen kokonaisluvun välissä yhtälön $x^2 = 12$ positiivinen ratkaisu on?

339. Vapaassa pudotuksessa olevan kappaleen etäisyydelle metreinä pudotuskorkeudesta antaa hyvän arvion funktio $s(t) = 4,9t^2$, missä t on putoamisaika sekunteina. Kuinka monen sekunnin päästä pudotettu kappale on pudonnut 100 metriä?

340. Suorakulmaisen kolmion molempien kateettien pituus on x .

a) Muodosta kolmion pinta-alan lauseke.

b) Mikä on kolmion pinta-ala, jos $x = 10$?

c) Kolmion pinta-ala on 72. Mikä on kateettien pituus?

Lisää tehtäviä

341. Tasasivuisen kolmion pinta-ala sivun pituuden funktiona on $A(s) = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$. Jos tasasivuisen kolmion sivun pituus on 10, mikä on sen pinta-ala?

342. Asta kehitti funktion $t(p) = \frac{1}{10}p^{\frac{6}{5}}$, joka ennustaa palapelin kokoamiseen kuluvaa aikaa minuutteina palojen määrän p funktiona. Kuinka kauan mallin mukaan kuluu aikaa

a) 100 palan palapelin kokoamiseen

b) 1 000 palan palapelin kokoamiseen

c) kahden palan palapelin kokoamiseen?

343. Stefanin–Boltzmannin lain mukaan kappaleen säteilyteho tiettyä pinta-alaa kohden on suoraan verrannollinen sen absoluuttisen lämpötilan neljänteen potenssiin. Lakia kuvaa funktio $P(T) = A\epsilon\sigma T^4$, missä A , ϵ ja σ ovat vakioita. Jos absoluuttinen lämpötila kaksinkertaistuu, kuinka moninkertaiseksi säteilyteho kasvaa?

344. Säteilyn intensiteetti säteilylähteen etäisyyden r funktiona on $I(r) = \frac{I_0}{r^2}$, missä I_0 on vakio, joka kuvaa säteilyn intensiteettiä etäisyydellä 0. Arvioi funktion avulla kuinka monta prosenttia Auringon säteilyn intensiteetti Maan pinnalla vähennee, jos Maan ja Auringon välinen etäisyys kasvaa 20 prosenttia?

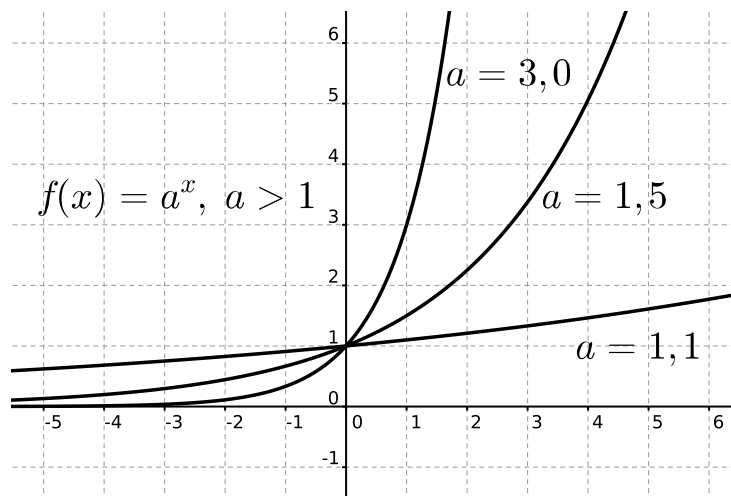
3.3 Eksponenttifunktio

Potenssifunktiossa $f(x) = x^n$ muuttuja x on kantalukuna. Jos muuttuja x on sen sijaan eksponenttina, saadaan joukko funktioita, joita kutsutaan **eksponenttifunktioiksi**.

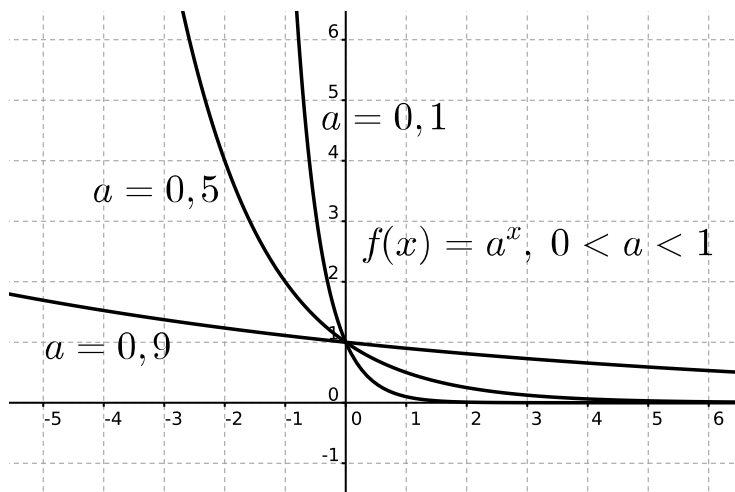
Eksponenttifunktio

Eksponenttifunktiot ovat muotoa $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ olevia funktioita.

Funktio $f(x) = 1^x = 1$ on vakiofunktio, joten sitä ei yleensä ole järkevää tarkastella eksponenttifunktiona. Eksponenttifunktioita on kahta tyyppiä: kasvavia ja väheneviä. Kasvavilla eksponenttifunktioilla $a > 1$, esimerkiksi



Kun a on pieni mutta positiivinen $-0 < a < 1$, eksponenttifunktio on vähenevä:



Huomaa, että eksponenttifunktion kuvaaja kulkee aina pisteen $(0,1)$ kautta. Tämä johtuu potenssin laskusäännöstä, jonka mukaan $a^0 = 1$, kun $a \neq 0$

Negatiiviselle kantaluville ei ole määritelty yleistä reaalilukupotenssia, joten eksponenttifunktiota ei ole määritelty, kun $a < 0$.

Kun $a = 0$ tai $a = 1$, eksponenttifunktio pelkistyy vakiofunktioiksi. Lisäksi 0^0 :a ei ole määritelty, joten vaaditaan, että eksponenttifunktion kantaluville a pätee $a > 0$ ja $a \neq 1$.

Eksponenttiyhtälö muodostuu, kun kysytään, millä x :n arvoilla

ESIMERKKI 3.137

Millä muuttujan x arvoilla eksponenttifunktio $f(x) = 2^x$ saa arvon $f(x) = 64$?

Ratkaisu. Kirjoitetaan tehtävä yhtälöksi: $2^x = 64$. Kokeilemalla luvun 2 potensseja huomataan, että $x = 6$ ratkaisee yhtälön.

Varmistutaan vielä siitä, että yhtälöllä ei ole muita ratkaisuja.

Eksponenttifunktion kantalukuna on 2, joten eksponenttifunktio on kasvava.

Funktio $f(x) = 2^x$ ei siis voi saada uudelleen arvoa 64, kun $x > 6$. Samasta syystä $f(x)$ ei voi olla 64, kun $x < 6$.

Ainoa ratkaisu yhtälölle on siis $x = 6$.

ESIMERKKI 3.138

Millä muuttujan x arvoilla eksponenttifunktio $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ saa arvon $f(x) = 1/5$?

Ratkaisu. Edellisen esimerkin tavoin kokeillaan x :n eri arvoja. Havaitaan, että kun $x = 2$, funktio saa arvon $f(x) = \frac{1}{4}$, ja kun $x = 3$, on $f(x) = \frac{1}{8}$. Ratkaisu on siis välillä $2 < x < 3$.

Ratkaisun etsimistä voidaan jatkaa kokeilemalla esimerkiksi arvoa $x = 2,5$. Näin päästään lähemmäksi ratkaisua, mutta yhtälön ratkaisu on irrationaalinen, joten sen desimaalikehitelmä on äärettömän pitkä ja jaksoton. Tarkkaa ratkaisua ei siis saada tällä menetelmällä.

Yleisen eksponenttiyhtälön tarkkaan ratkaisemiseen niin sanotun logaritmin avulla palataan kurssilla MAA8.

EKSPONENTIAALINEN MALLI

Kun eksponenttifunktiota käytetään kuvaamaan jotakin reaalimaailman ilmiötä, siitä käytetään nimeä **eksponentiaalinen malli**.

Eksponentiaalinen malli on eräs yleisimmin käytetyistä matemaattisista malleista. Sillä kuvataan sellaista kasvua tai vähenemistä, jossa kullakin ajanhetkellä funktion hetkellinen muutos on suoraan verrannollinen funktion sen hetkiseen arvoon. Tämä muotoillaan täsmällisesti myöhemmillä matematiikan kursseilla.

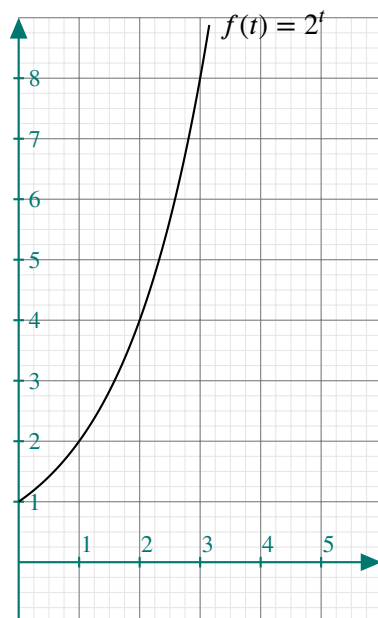
ESIMERKKI 3.139

Soluviljelmässä olevien *Escherichia coli* -bakteerien määrää voidaan kuvata eksponentiaalisella mallilla: ajanhetkellä $t = 0$ bakteerien lukumäärä on 1, ja kullakin aika-askeleella bakteerien lukumäärä tuplaantuu. Malli voidaan kirjoittaa

$$f(t) = 2^t, t \geq 0,$$

jossa $f(t)$ on bakteerien lukumäärä ajanhetkellä t . (Tässä ei oteta kantaa käytettyyn ajan yksikköön – mikä tahansa käy.)

Huomaa, että funktion $f(t)$ arvot voivat olla myös rationaalisia tai irrationaalisia, vaikka bakteerien määrä on kokonaisluku. Yleensä tätä ei pidetä ongelmallisena, vaan funktiota voidaan käsitellä, ikään kuin bakteerien määrä olisi jatkuvasti kasvava suure. Mallit ovat harvoin täydellisiä, eikä virhe ei ole käytännössä merkittävä, koska mallin antamat luvut voidaan helposti pyöristää.



ESIMERKKI 3.140

Radioaktiivisessa hajoamisessa atomydinten lukumäärää kuvataan eksponentiaalisella mallilla. Jos ydinten määrä ajanhetkellä $t = 0$ on $f(t) = k$, malli voidaan kirjoittaa

$$f(t) = k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t, t \geq 0,$$

jossa $f(t)$ on atomydinten lukumäärä ajanhetkellä t . Atomydinten lukumäärä siis puolittuu kullakin aika-askeleella.

ESIMERKKI 3.141

Vuonna 2114 Mars-planeetan ilmasto ja olosuhteet on onnistuttu muuttamaan elämää ylläpitäviksi. Planeetan pintaa peittävät ruohomaat, ja planeetan asuttaminen on kovassa vauhdissa. Eräs riistan mausta nauttiva uudisasukas tuo maatilalleen aitaukseen 24 kaniinia. Hän ei kuitenkaan ole ottanut huomioon planeetalla vallitsevaa pienempää painovoimaa, jossa kaniinit loikkivat helposti aidan yli ja karkaavat. Koska Marssissa ei ole kaniinien luontaisia vihollisia ja ravintoa on riittämiin, kanien lisääntymistä ei rajoita oikeastaan mikään ja kanipopulaatio alkaa kasvaa eksponentiaalisesti. Kaniineista puolet on naaraita. Kukin naaraskaniini voi saada 11 poikasta vuodessa, joista noin puolet on naaraita.

Kuinka paljon kaniineja Marssissa on

a) 1 tai 2 vuoden kuluttua?

b) n vuoden kuluttua?

c) Monenko vuoden kuluttua Marssin kaniinipopulaatio on ylittänyt miljoonan yksilön rajan?

Ratkaisu. a) Lasketaan kanipopulaation kokoa peräkkäisinä vuosina.

Merkitään a = alkuperäinen kaniinien määrä = 24 ja

$f(t)$ = kaniinipopulaation vuoden t lopussa.

Ensimmäisen vuoden kuluttua $\frac{a}{2} = \frac{24}{2} = 12$ naaraskaniinia on kukin saanut 11 poikasta vuodessa. Poikasten lukumäärä vuoden kuluttua on siis $11 \cdot 12 = 132$ ja kaniinien kokonaismäärä muodostuu aikuisten kaniinien ja poikasten lukumäärän summana. Siis vuoden kuluttua kaniinipopulaation koko on $24 + 132 = 156$ yksilöä.

Puolet tästä on naaraita, jotka lisääntyvät jälleen seuraavan vuoden aikana.

Kaniinipopulaatioon syntyvien poikasten määrä 2. vuonna saadaan kertomalla edellisen vuoden kaniinien määrä kertoimella $\frac{11}{2}$. Siis syntyy $156 \cdot \frac{11}{2} = 858$ poikasta. Kanipopulaation koko 2. vuonna on yhteensä $858 + 156 = 1\,014$ poikasta.

b) Taulukoidaan kaniinipopulaation arvoja. Huomaamalla, että $f(t):n$ lausekkeesta voidaan ottaa yhteiseksi tekijäksi a , saadaan lauseketta yksinkertaistettua. Taulukkoa laatiessa huomataan, että pystytään päätelemään sääntö, jolla voidaan laskea kanipopulaation koko $n:n$ vuoden kuluttua.

vuosi t	$f(t):n$ lauseke	kaniinipopulaation koko
1	$\frac{a}{2} \cdot 11 + a = a(1 + \frac{11}{2}) = \frac{13}{2}a$	$f(1) = 24 \cdot \frac{13}{2} = 156$
2	$(\frac{13}{2}a) \cdot \frac{13}{2} = \frac{13^2}{2^2}a$	$f(2) = 24 \cdot \frac{13^2}{2^2} = 1\,014$
...	...	...
n	$(\frac{13^2}{2^2}a) \cdot \frac{13}{2} = \frac{13^n}{2^n}a$	$f(n) = 24 \cdot (\frac{13}{2})^n$

c) Halutaan tietää, millä $t:n$ arvolla kaniinipopulaation kokoa kuvaava funktio saa arvokseen vähintään miljoonan, eli $f(t) \geq 1\,000\,000$. Tämän epäyhtälön täsmällinen, tarkka ratkaiseminen ei onnistu tämän kurssin tiedoilla, mutta tehtävä voidaan ratkaista sijoittamalla erilaisia $t:n$ arvoja $f(t):n$ lausekkeeseen.

Kun $t = 5$, $f(t) = 24 \cdot (\frac{13}{2})^5 \approx 278\,470$.

Kun $t = 6$, $f(t) = 24 \cdot (\frac{13}{2})^6 \approx 1\,810\,053$.

Näyttää siltä, että miljoonan ruohonsyöjän populaatiokoko on ylitetty kuusi vuotta epäonnistuneen kaniinitarhausyrityksen jälkeen.

Vastaus. a) Vuoden kuluttua noin 160 yksilöä, kahden vuoden kuluttua noin 1 010 yksilöä

b) $24 \cdot \left(\frac{13}{2}\right)^n$ yksilöä

c) Kuuden vuoden kuluttua

Tehtäviä

Opi perusteet

345. Olkoon $f(x) = 4^x$. Laske

- a) $f(0)$
- b) $f(3)$
- c) $f(\frac{1}{2})$.

346. Olkoon $g(x) = (\frac{1}{4})^x$. Laske

- a) $f(0)$
- b) $f(4)$
- c) $f(\frac{1}{2})$.

347. Olkoon $f(x) = 10^x$. Millä x :n arvoilla

- a) $f(x) = 1\,000$
- b) $f(x) = \frac{1}{100}$
- c) $f(x) = -1$?

348. Eksponenttifunktio $e(x) = 2^x$ kuvaa ihmisen esivanhempien määrää, kun x on välissä olevien sukupolvien määrä. Kuinka monta esivanhempaa ihmisellä on

- a) kolmen sukupolven päässä
- b) kymmenen sukupolven päässä
- c) kahdenkymmenen sukupolven päässä?

349. Leipuri haluaa tehdä tuulihattuja varten lehtitaikinaa, jossa on yli tuhat kerrosta. Alussa kerroksia on yksi ja yhdellä taikinan taitoksella ja kaulinnalla kerrosten määrä aina kolminkertaistuu. Kuinka monen taitoksen jälkeen lehtitaikinassa on yli tuhat kerrosta?

350. Biologi vei autiosaarelle sata jänistä tutkiakseen, miten hyvin funktio $p(t) = 100 \cdot 1,05^t$, missä t on aika viikkoina, kuvaa populaation kasvua. Jos malli toimii hyvin, miten paljon jäniksiä tulisi saarella olla vuoden kuluttua kokeilun aloittamisesta?

351. Olkoon $f(t) = 20 \cdot 2^t$ bakteerien lukumäärä soluviljelmässä ajanhetkellä t . Millä ajanhetkellä bakteerien lukumäärä on tasan 160?

352. Miten muokkaisit edellisen tehtävän funktiota, jos bakteerien lukumääräksi halutaan alussa 5?

Hallitse kokonaisuus

353. Eräälle eksponenttifunktiolle, joka on muotoa $f(x) = k \cdot a^x$, missä a ja k ovat vakioita, pätee $f(0) = 12$ ja $f(2) = 192$. Määritä vakiot a ja k .

354. Minkä kahden peräkkäisen kokonaisluvun välissä yhtälön $10^x = 500$ ratkaisu on?

355. Eräänä vuonna omenapuuhun tuli 90 omenaa, seuraavana vuonna 108 ja siitä seuraavana vuonna 43 omenaa. Voiko eksponenttifunktiolla kuvata tämän omenapuun omenoiden määrää ajan funktiona? Miksi/Miksei?

356. Funktio $k(t) = 10 \cdot 5^t$, missä t on aika tunteina kuvaa hauskan kissavideon katselukertojen määrää ajan funktiona. Kuinka monen tunnin kuluttua katselukertoja on kertynyt yli miljoona?

357. Villen levykokoelma kasvaa eksponentiaalisesti. Alussa levyjä oli 200, vuoden päästä 300 ja kahden vuoden päästä 450. Muodosta funktio, joka kuvaa levykokoelman kasvamista ajan funktiona ja laske arvio sille, miten monta levyä kokoelmassa on 10 vuoden kuluttua kokoelman keräämisen aloittamisesta.

358. Jos atomiydinten, joiden määrä pienenee radioaktiivisen hajoamisen seurauksena, määrä ajanhetkellä $t = 0$ on $f(t) = k$, atomiydinten määrää hetkellä t kuvaava malli voidaan kirjoittaa

$$f(t) = k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t, t \geq 0,$$

jossa $f(t)$ on atomiydinten lukumäärä ajanhetkellä t . Millä ajanhetkellä atomiydinten määrä on alle $1/200$ alkuperäisestä?

359. Kaino-Vieno saa perinnöksi maatilan. Hän päättää jättää työnsä kirjanpitäjänä, muuttaa maalle ja alkaa viljelemään luomuperunaa. Ensimmäisenä keväänä Kaino-Vieno kylvää maahan 10 siemenperunaa. Kesän aikana kukin siemenperuna työntää esiin perunanversion ja muodostaa keskimäärin 6 uutta perunan mukulaa, samalla kun alun perin istutettu siemenperuna mätänee. Perunan noston jälkeen Kaino-Vieno päättää säästää 40 % perunoista seuraavan kevään siemenperunoiksi. Kuinka pitkään Kaino-Vienon täytyy jatkaa luomuviljelyä, jotta perunasato ylittää 1 000 perunan rajan?

360. Funktion $h(x) = (-2)^x$ maalijoukko ei ole reaalityökalujen joukko. Anna esimerkki muuttujan arvosta, jolla funktion arvo ei ole reaalinen.

3.3.0.1 Lisää tehtäviä

361. Villiintynyt 3D-printteri alkaa tulostamaan uusia 3D-printtejä, jotka taas toimivat vastaavasti. Funktio $d(x) = 4^x$, missä x on aika päivinä, kuvaa printtien määrää ajan funktiona. Kuinka monen päivän kuluttua 3D-printtejä on maapallolla enemmän kuin ihmisiä, kun ihmisiä on noin 7 miljardia?

362. Todennäköisyys nopalla peräkkäin heitetyille kutosille noudattaa funktiota $g(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$, missä x on peräkkäisten kutojen lukumäärä. Mikä on todennäköisyys heittää nopalla kymmenen kutosta peräkkäin?

363. Sukujuhliin on ostettu viiden kilon kääretorttu. Vieraita on 30, joista ensimmäinen leikkaa itselleen kahdeskymmenesosan tortusta ja seuraava aina kahdeskymmenesosan sillä hetkellä jäljellä olevasta tortusta. Muodosta funktio, joka kuvaa jäljellä olevan tortun määrää siitä leikanneiden vieraiden määrän funktiona. Kuinka paljon torttua on jäljellä, kun kaikki vieraat ovat leikanneet yhden palan?

364. Määritä yksi kohta, jossa funktiot $g(x) = 5^x$ ja $h(x) = 4^x$ saavat saman arvon.

365. Missä kohdassa funktiot $g(x) = 5^x$ ja $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ saavat saman arvon?

366. Funktio $k(x) = 29^x$ kuvaa kaikkien mahdollisten kirjainyhdistelmien määrää, kun yhdistelmän pituus on x ja käytössä ovat suomen kielen aakkoset. Jos Suomen kymmenen merkin mittaiset henkilötunnukset korvataan kirjainyhdistelmillä, kuinka lyhyet yhdistelmät riittäisivät, jotta kaikki 5,4 miljoonaa kansalaista saavat muista poikkeavan yhdistelmän?

367. Funktio $e(t) = 15\,000 \cdot 0,80^t$, missä t on aika tunteina kuvaa autiomaalle ek-syneen janoisen ihmisen etäisyyttä lähimmästä keitaasta metreinä. Kuinka kaukana keidas on

a) kolmen tunnin vaelluksen jälkeen?

b) vuorokauden vaelluksen jälkeen?

368. (YO 1877 4) Vuosikymmenen 1860–70 kuluessa lisääntyi Helsingin väkiluku puolella vuoden 1860 väkiluvulla. Jos väkiluvun lisäys tapahtuisi seuraavinakin vuosikymmeninä samassa suhteessa, paljonko väkeä Helsingissä olisi 1890, kun siellä 1860 oli 21 700 asukasta?

Kertaustehtäviä

Testaa tietosi

LUVUT JA LASKUTOIMITUKSET

- 369. Mitä eroa on luvulla ja numerolla?
- 370. Miten vähennyslasku ja jakolasku määritellään?
- 371. Minkälainen ristiriita seuraisi, jos nollalla jakaminen olisi määritelty reaaliluvuille?
- 372. Mitä eroa on kertomisella ja laven-
tamisella?
- 373. Mitä tarkoitetaan alkuluvulla?
- 374. Mitä tarkoitetaan luvun alkulukuke-
hitelmällä (tai alkutekijäkehitelemällä)?
- 375. Miksei reaalilukuja käytettäessä ne-
gatiivisesta luvusta voi ottaa neliöjuurta?
- 376. Miksi mielivaltaisen, nolasta poik-
keavan luvun nollas potenssi on arvoltaan
yksi?
- 377. Mitä tarkoitetaan johdannaissuu-
reella?
- 378. Mikä nyanssiero on saman luvun
esitysmuodoilla $9,1$ ja $9,10$?
- 379. Tutkit luvun desimaalikehitelmää ja
huomaat siinä äärettömästi toistuvan jak-
son 2104. Minkälainen luku on kysees-
sä?
- 380. Mikä yhteys murtopotensseilla ja
juurilla on?

Valitse monivalintatehtävissä yksi paras vastaus.

381. Luvun 180 alkulukukehitelmä on

- a) $2 \cdot 3 \cdot 5$
- b) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
- c) $4 \cdot 3^2 \cdot 5$
- d) $4 \cdot 9 \cdot 5$
- e) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

382. Kun lausekkeeseen $bc - 2ac + 3b - 6a$ sovelletaan osittelulakia, saadaan sille siistimpi esitys, joka on jokin allaolevista. Mikä?

- a) $(b - 3a)(c + 3)$
- b) $(b - 2a)(c + 3)$
- c) $2(b - a)(c + 3)$
- d) $(b - a)(2c + 3)$

383. Sekaluku $7\frac{3}{8}$ ilmaistuna murtolukuna on

- a) $\frac{31}{4}$
- b) $\frac{21}{8}$
- c) $\frac{10}{8}$
- d) $\frac{59}{8}$
- e) $\frac{53}{8}$

384. Potenssi $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ sievennettynä on jokin seuraavista. Mikä?

a) 36

b) $\frac{1}{36}$

c) $\frac{4}{9}$

d) $-\frac{4}{9}$

e) $\frac{9}{4}$

f) $-\frac{9}{4}$

385. Kuinka monta nollaa on biljoonassa?

a) 6

b) 9

c) 12

d) 15

e) ei mikään annetuista vaihtoehdoista

386. Mitä on 0,34 nm esitettyinä metreinä kymmenpotenssimuodossa (oikeaoppisesti)?

a) $0,34 \cdot 10^{-9} \text{ m}$

b) $3,4 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

c) $34 \cdot 10^{-9} \text{ m}$

d) $3,4 \cdot 10^{-9} \text{ m}$

e) $34 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

387. Kuinka monta merkitsevää numeroa on luvussa 1,0240?

- a) ei yhtään
- b) yksi
- c) kolme
- d) neljä
- e) viisi

388. Luku $-78,2449$ pyöristettynä sadasien tarkkuuteen on

- a) $-78,245$
- b) $-78,25$
- c) $-78,24$
- d) $-78,2$

389. Kaksi litraa kuutiosenttimetreinä on...

- a) 2 cm^3
- b) 20 cm^3
- c) 200 cm^3
- d) $2\,000 \text{ cm}^3$.
- e) Ei mikään annetuista vaihtoehdoista.

390. Nopeus 60 km/h ilmaistuna yksiköissä m/s on suunnilleen...

- a) 10
- b) 17
- c) 30
- d) 36
- e) 216.

391. Neliöjuuri luvusta 8 mahdollisimman pitkälle sievennettyä on

- a) $\sqrt{8}$
- b) $2\sqrt{2}$
- c) 4
- d) 16
- e) 64.

YHTÄLÖT

392. Mitä tarkoitetaan yhtälön ratkaisulla?

393. Jos lukua kasvatetaan p :llä prosentilla ja sen jälkeen pienennetään p :llä prosentilla, miksi ei päädytä takaisin alkuperäiseen lukuun?

Valitse monivalintatehtävissä yksi paras vastaus.

394. Yhtälö $x = x - 1$ on

- a) aina tosi
- b) joskus tosi
- c) ei koskaan tosi

395. Yhtälö $x = 4$ on

- a) aina tosi
- b) joskus tosi
- c) ei koskaan tosi

396. Yhtälö $x = x$ on

- a) aina tosi
- b) joskus tosi
- c) ei koskaan tosi

397. Milloin yhtälön molemmat puolet voi kertoa samalla luvulla niin, että tosi yhtälö säilyy totena?

- a) Aina muttei millä tahansa luvulla
- b) Aina ja millä tahansa luvulla
- c) Vain joskus tietyissä tilanteissa
- d) Ei koskaan

398. Milloin yhtälön molemmat puolet voi kertoa samalla luvulla niin, että yhtälö säilyy yhtäpitävänä?

- a) Aina muttei nollalla
- b) Aina ja millä tahansa luvulla
- c) Vain joskus tietyissä tilanteissa
- d) Ei koskaan

399. Jos muuttujat x ja y ovat suoraan verrannolliset, ja muuttuja x kasvaa, mitä tapahtuu muuttujalle y ?

- a) Muuttuja y kasvaa myös mutta suhteessa vähemmän.
- b) Muuttuja y kasvaa myös mutta suhteessa enemmän.
- c) Muuttuja y kasvaa myös – ja samassa suhteessa.
- d) Muuttuja y pienenee – ja samassa suhteessa.
- e) Muuttujan y arvo pysyy vakiona.

400. Jos muuttujat x ja y ovat suoraan verrannolliset, ja muuttujat y ja z ovat kääntäen verrannolliset, millainen on muuttujien x ja z välinen suhde?

- a) x ja z ovat suoraan verrannolliset.
- b) x ja z ovat kääntäen verrannolliset.
- c) x on verrannollinen z :n neliöön.
- d) z on verrannollinen x :n neliöön.
- e) Mikään annetuista vaihtoehdoista ei ole oikein.

401. Yhtälön $a^2 + a^{-2} = 0$ (eräs) juuri on

- a) -1
- b) 0
- c) 1
- d) $\sqrt{2}$
- e) ei mikään mainituista vaihtoehdoista.

402. Kuinka monta eri reaalaratkaisua yhtälöllä $x^{10} = -2$ on?

- a) ei yhtään
- b) yksi
- c) kaksi
- d) kymmenen
- e) ei mikään mainituista vaihtoehdoista

403. Yhtälönratkaisun vaiheessa

$$2x + x = 4$$

$$3x = 4$$

käytettiin avuksi

- a) reaalilukujen vaihdantalakia
- b) reaalilukujen liitântälakia
- c) reaalilukujen osittelulakia
- d) kaikkia edellä mainittuja
- e) ei mitään edellä mainituista.

404. Jos lukua a vähennetään 3 %, laskutoimitusta vastaava lauseke on

- a) $0,03a$
- b) $0,97a$
- c) $a - 0,03$
- d) $a - 0,97$
- e) $\frac{a}{0,03}$
- f) $\frac{a}{1,03}$

FUNKTIOT

405. Mitä eroa on funktion määrittelyjoukolla ja määrittelyehdolla?

406. Mitä eroa on funktion maali- ja arvojoukolla?

407. Funktio f määritellään lausekkeella $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Funktion määrittelyjoukko on tällöin

- a) $\mathbb{R}$
- b) $\mathbb{R}_+$
- c) $\mathbb{R}_-$
- d) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- e) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
- f) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

408. Funktio g määritellään lausekkeella $g(y) = \sqrt{y}$. Funktion määrittelyehto on tällöin

- a) $y < 0$
- b) $y \leq 0$
- c) $y \in \mathbb{R}$
- d) $y \geq 0$
- e) $y > 0$.

Kertaustehtäviä

Luvut ja laskutoimitukset

409. Laske

a) $-8 \cdot 2 \cdot (-3)$

b) $-(-4)/2/4$

c) $(2 + 3 : 6 + 1 : 2) \cdot 2$

d) $-(-2) \cdot 7 - 4 \cdot 3 \cdot 2 + 1$

410. Laske ja jaa alkutekijöihin $(32 + 22 : 2) - 3(5 - 2) \cdot \left(2 - \frac{16 : 4}{1 + 2 \cdot 4}\right) + 1$

411. Laske.

a) $3\frac{2}{15} : 1\frac{7}{3}$

b) $\frac{6}{18} - \frac{4}{3} \cdot \frac{4+2}{2}$

c) $a \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{a} + \frac{a}{2b}$

d) $\frac{de}{a} : \frac{db}{a} - \frac{e^2b^2}{be^2}$

412. Esitä desimaalilukuna.

a) $\frac{23}{50}$

b) $-\frac{7}{11}$

413. Esitä murtolukumuodossa.

a) 73,02

b) 17,12341234 ...

c) 0,85333 ...

d) -7,1232323

414. Muuta sekaluvut murtoluvuiksi.

a) $2\frac{3}{4}$

b) $\frac{4}{13}$

c) $-7\frac{2}{11}$

d) 4

415. Sievennä.

a) $\frac{a^2b^2}{a}, a \neq 0$

b) $ab(a + 2a)$

c) $(a^3b^2c)^2$

d) $\frac{ab+ca}{a} \cdot (b - c)$

e) $\frac{7^{10\,002}}{7^{10\,000}}$

416. a) Muuta 1,25 h minuuteiksi.

b) Laske ja ilmoita vastaus senttimetreinä: $1,23\text{ m} + 320\text{ mm}$.

c) Laske $300 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} : 30 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$.

417. Pyöristä 3 merkitsevän numeron tarkkuudella ja ilmoita kymmenpotenssi-muodossa $a \cdot 10^n$, missä $1 \leq a \leq 10$.

a) 2,0007

b) 0,00003125

c) 79 981 633 851,2

418. Sievennä.

a) $\sqrt{108}$

b) $\sqrt[3]{-64}$

c) $\frac{\sqrt{a^2b}}{a}$

d) $\frac{abc}{\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}}$

419. Laske.

a) $\sqrt{9+16}$

b) $\sqrt{9} + \sqrt{16}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{(9+16)^3}}$

420. Sievennä.

a) $\sqrt{2} + \sqrt{8}$

b) $\sqrt{27} - \sqrt{12}$

c) $\frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{30}}$

d) $a - (ab)^2 + a^2b^2$

e) $(\sqrt[3]{a})^5 \cdot a^{\frac{8}{6}}$

421. Muuta murtopotenssimuotoon.

a) $\sqrt[7]{\frac{1}{a^5}}$

b) $\sqrt{\sqrt{2}}$

Yhtälöt

422. Ratkaise yhtälö.

a) $11x = 77$

b) $8x + 174 = 50x$

c) $3x - 6 = 18$

d) $\frac{3x}{2} + \frac{2x}{3} = 13$

e) $f^3 + 1 = -7$

f) $x^2 + 2(3x + 1) = x^2 + 3(2x + 1)$

g) $\frac{5x+20}{20} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x + x^0$

h) $\frac{5x}{4} - 1 = \frac{4}{5}x$

423. Ympyrän pinta-ala A määritellään $A = \pi r^2$, missä r on ympyrän säde. Tiedetään, että ympyrän pinta-ala on π^2 . Ratkaise ympyrän säde.

424. Kuinka monta prosenttia

a) suurempi 30 euroa on verrattuna 10 euroon?

b) lyhyempi 6 metriä on verrattuna 30 metriin?

c) 1 800 € on 2 400 €:stä?

425. Bändi nostaa musiikkiraitansa hintaa 20 %. Pian heitä alkaa kuitenkin kaduttaa. Monellako prosentilla muutettua hintaa olisi laskettava, jotta hinta olisi ennallaan?

426. Olkoon $f(t) = 35 \cdot 2^t$ bakteerien lukumäärä soluviljelmässä ajanhetkellä t (tuntia). Monenko kokonaisen tunnin kulluttua bakteereita on yli 1 000?

427. Pölysuodatin pidättää 65 % pölyhiukkasista.

a) Kuinka monta hiukkasta miljoonasta pääsee viiden peräkkäisen suodattimen läpi?

b) Kuinka monta hiukkasta jää neljännteen suodattimeen?

428. Pihtiputaan 84-henkinen sinfoniaorkesteri harjoittelee salissa. Puolet orkesterimuusikoista on jousisoittajia, lyömäsoittajia orkesterissa on yhdeksän. Loput orkesterista on puhallinsoittajia. Kaksi kolmasosaa puhallinsoittajista soittaa vaskipuhallinta. Montako puupuhallinsoittajaa orkesterissa on? Kaikki puhallinsoittimet ovat joko puu- tai vaskipuhalltimia.

429. Riippuvainen matemaatikko joutuu vieroitukseen. Tällä hetkellä hän ratkoo 1 000 tehtävää päivässä, mikä on sairaaloista. Vieroituksen aikana hän ratkoo aina $\frac{4}{5}$ edellisenä päivänä ratkotusta tehtävämäärästä. Tavoitteena on, että hän ratkoisi vieroituksen jälkeen vain 10 tehtävää päivässä. Kuinka monta kokonaista päivää vieroitus kestää?

430. Ratkaise yhtälö.

a) $\frac{x+2}{4} = \frac{x-1}{7}$

b) $\frac{3x+1}{4x+2} = 3$

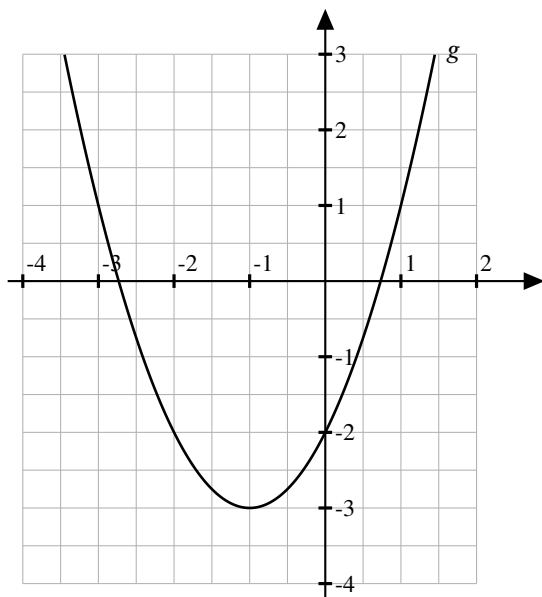
431. Siiri haastaa Oskarin Pokémon-otteluun. Oskarin Charmanderin hännän liekin lämpötila on kääntäen verrannollinen Siirin Hoppipin maksimipomppukorkeuteen. Kun liekin lämpötila on 45 Fahrenheit-astetta, Hoppip hyppää 37 m korkeuteen. Kuinka korkealle Hoppip voi hypätä, kun Charmanderin liekin lämpötila kasvaa 431 Fahrenheit-astetta?

Funktiot

432. Mikä on funktion $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}$ määrittelyjoukko?

433. Olkoon $f(x) = 2x + 9$ ja $g(x) = 12x - 1$. Millä x :n arvolla pätee $f(x) = g(x)$?

434. Arvioi kuvaajasta funktion g nollakohdat. Mikä on funktion g pienin arvo? Millä muuttujan x arvolla $g(x) = -2$? Määritä $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.



435. Olkoon $f(x) = -4x^{-3}$ ja $g(x) = \frac{1}{2}(-x)^2$. Määritä.

- a) $f(2)$
- b) $f(0)$
- c) $g(-4)$
- d) $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot g\left(\frac{1}{2}\right)$
- e) $f(g(2))$

436. Hyvä haltijatar taikoo karkkeja jättikulhoon syntymäpäivälahjaksi Tuhkimolle. Karkkien määrä kasvaa 3,1-kertaiseksi joka tunti. Kun kello 12.15, karkkeja on 3 000. Muodosta funktio, joka ilmaisee karkkien lukumäärän t tunnin kuluttua. Kulhoon mahtuu 1 000 000 karkkia. Laske karkkien määrä

a) 3,5 tunnin kuluttua.

b) 5 tuntia sitten.

c) Tuhkimon syntymäpäivät alkavat kello 18.00. Saako hyvä haltijatar lahjan ajoissa valmiiksi (eli kulhon täyteen)?

Ilmoita vastaukset 10 karkin tarkkuudella.

437. Hiiri syö Erikin juustosta 10 % joka päivä. Nyt juustoa on 509 g. Paljonko juustoa

a) on 3 päivän kuluttua?

b) oli 5 päivää sitten?

Harjoituskokeita

Seuraavissa harjoituskokeissa on kussakin kymmenen tehtävää, jotka on suunniteltu niin, että jokaisesta (alakohtineen) saa korkeintaan kuusi pistettä.

HARJOITUSKOE 1

438. a) Perustele, onko 341 alkuluku.
(2 p.)

b) Mainitse jokin aina epätosi yhtälö.
(0,5 p.)

c) Mainitse jokin reaaliluku, joka ei ole rationaaliluku. (0,5 p.)

d) Esitä jokin laskutoimitus, jota ei ole määritelty reaaliluvuilla, ja perustele, miksi on niin. (2 p.)

e) Kuinka monta eri reaalijuurta on yhtälöllä $x^4 = 9$? (1 p.)

439. Sievennä lausekkeet.

a) $\sqrt[3]{3^4} \cdot \sqrt[4]{3^3}$

b) $\frac{2x-4}{2-x}$

c) $8^{7a+\frac{a}{3}} - 2^{21a+a}$

440. a) Ratkaise yhtälö $x^3 - \frac{14}{27} = \frac{20}{6} + \frac{14}{18}$.
(3 p.)

b) Esitä luku 0,3888... murtolukuna.
(3 p.)

441. a) Eräs bakteerikanta kasvaa päivässä 75 prosentilla. Montako prosenttia bakteerikannan alkuperäinen koko on bakteerikannan määrästä kolmen päivän kuluttua? (3 p.)

b) Mursupuvun hinnasta puolet tulee valmistuskuluista. Valmistuskuluista 75 % on materiaalikuluja. Montako prosenttia materiaalikulujen pitää laskea, jotta mursupuvun hinta tippuu 10 %? (3 p.)

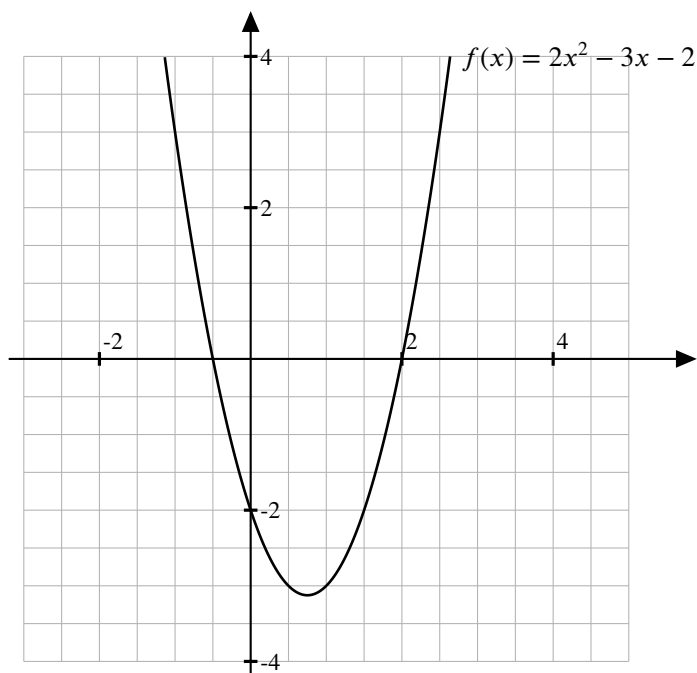
442. a) Lounaspalvelu myy lounasta hintaan 8,00 euroa. Asiakas voi myös ostaa kerralla tarjouspaketin hintaan 170 euroa, johon sisältyy lounas kuukaudeksi (30 päivää). Kuinka monena päivänä kuukaudessa vähintään on käytävä lounaalla, jotta tarjouspaketti tulisi halvemmaksi?

b) Kaupassa myydään kolajuomatölkköjä (à 33 cl) kuuden pakkauksissa litrahinnalla 2,96 €/l. Kanta-asiakkaat voivat ostaa pakkauksen hintaan 4,90 €. Kuinka monen prosentin alennuksen kanta-asiakkaat saavat? Anna vastaus prosentin tarkkuudella.

443. Pullaohjeen mukaan 4 dl maitoa ja 2 dl sokeria riittää 20 pullaan. Jon leipoo niin monta pullaa kuin litralla maitoa on mahdollista. Riittääkö leipomiseen tällöin täysi kilogramman paketti sokeria? Jos riittää, niin kuinka monta grammaa sokeripakkauksesta jää tällöin jäljelle? Tavallisen pöytäsokeerin eli sakkaroosin tiheys on $1,59 \text{ g cm}^{-3}$.

444. a) Laske $f(2)$, kun $f(x) = 5x^3 - 12x^{-2} - 2$.

b) Tutki kuvaajasta, mitkä ovat funktion f nollakohdat. Millä muuttujan arvoilla funktio saa arvon 3? Arvioi funktion pienin arvo.



445. Jaana-Petterillä on suorakulmainen pala kartonkia, jonka pinta-ala on 36 cm^2 , lyhyen sivu pituus on 4 cm ja pitemmän sivun pituus on $x \text{ cm}$. Hän haluaa taivuttaa kartongista putken niin, että lyhyet sivut ovat yhdessä. Laske putken tilavuus, kun putkelle soveltuva tilavuuden kaava on $V = \pi r^2 h$, jossa V on tilavuus, h on kartonkipalan lyhyen sivun pituus, ja $x = 2\pi r$.

446. 50 tuuman Full HD -näytössä on 1920×1080 kuva-alkiota eli pikseliä. Kuinka monta pikseliä näytöllä on neliösenttimetriä kohden? 1 tuuma on $2,54$ senttimetriä.

447. Kaikki funktiot ovat relaatioita, mutta kaikki relaatiot eivät ole funktioita.

a) Anna esimerkki relaatiosta, joka ei ole funktio, ja selitä, miksei se ole funktio. (Muista, että relaation ei tarvitse käsitellä lukuarvoja.)

b) Valitse funktiolle $f, f(x) = |x - 1|$ sopiva määrittelyjoukko niin, että f on relaationa symmetrinen.

HARJOITUSKOE 2

448. a) Mainitse jokin ehdollisesti tosi yhtälö ja milloin se on tosi. (1 p.)

b) Mainitse jokin kokonaisluku, joka ei ole luonnollinen luku. (0,5 p.)

c) Mainitse jokin reaaliluku, joka ei ole irrationaaliluku. (0,5 p.)

d) Perustele, onko 61 alkuluku. (2 p.)

e) Näytä esimerkillä, että vähennyslasku ei ole vaihdannainen. (2 p.)

449. Ellulla meni filosofian toinen kurssi ensimmäistä huonommin, ja nyt filosofian keskiarvo (ei-pyöristettynä) kahden suoritettun kurssin jälkeen on 7,5.

a) Minkä päättöarvosanan Ellu saa filosofiasta (keskiarvo pyöristettynä), kun hän saa viimeisestä eli kolmannelta kurssista ansaitsemansa kympin? (Oletetaan, ettei Ellu korota päättöarvosanaa mahdollisessa erilliskokeessa.)

b) Taulukoi kaikki mahdolliset kurssiarvosanat, jotka Ellu on voinut saada kahdesta ensimmäisestä kurssista.

c) Ellu opiskelee myös kolme kurssia terveystietoa. Hän on on saanut ensimmäisestä kurssista arvosanaksi 7 ja toisesta 8, ja hänen pyöristetty kurssikeskiarvonsa on 8. Minkä arvosanan Ellu sai kolmannelta kurssista?

450. a) Muuta desimaaliluku $-5,\overline{20}$ sekamurtoluvuksi.

b) Ratkaise z yhtälöstä $-\sqrt{az} - \sqrt{a} = -az$. Missä a :n arvoilla yhtälöllä on olemassa reaalityöratkaisu?

451. Tuoreessa ananaksessa veden osuus on 80 % ananaksen massasta ja A-, B- ja C-vitamiinien yhteenlaskettu osuus 0,05 % massasta. Ananas kuivatetaan niin, että veden osuus laskee 8 prosenttiin ananaksen massasta. Kuinka suuri on A-, B- ja C-vitamiinien osuus kuivatun ananaksen massasta? (Luvut eivät ole faktuaalisia.)

452. Isabellan ajaessa nopeudella 60 km/h juuri ennen jarrutusta, jarrutusmatka oli 100 metriä. Kuinka monta metriä pitkä pysähtymismatka on samoissa ajo-olosuhteissa nopeudella 100 km/h, kun otetaan lisäksi huomioon Isabellan yhden sekunnin reaktioaika? Auton jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön, ja pysähtymisaika on reaktioajan ja jarrutusajan summa.

453. Sievennä.

a) $3(a^2 + 1) - 2(a^2 - 1)$

b) $\frac{x^2+1}{x} - x$

c) $\frac{a}{a-1} : (\frac{1}{a} - 1)$

d) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}(2a)^{-\frac{5}{2}}$

454. Suorakulmion muotoisen vanerilevyn mitat ovat 230 cm × 250 cm. Mahtuuko se sisään oviaukosta, joka on 90 cm leveä ja 205 cm korkea?

455. Erään valtion asukasmäärä vuoden 2000 alussa oli 1,52 miljoonaa ja vuoden 2014 alussa 2,23 miljoonaa.

a) Kuinka monella asukkaalla valtion asukasmäärä on kasvanut mainitulla välillä keskimäärin vuodessa? (1 p.)

b) Kuinka monta prosenttia asukasmäärä on kasvanut keskimäärin vuodessa? Anna vastaus prosentin sadaosien tarkkuudella. (3 p.)

c) Muodosta lauseke, jolla voidaan arvioida kyseisen valtion asukasmäärää vuonna n , kun väestönkasvun oletetaan olevan eksponentiaalista. (Mallin ei tarvitse kattaa aikaa ennen ajanlaskun alkua.) (2 p.)

456. Aape Ronkalla on kuution muotoisia kananmunia, joiden tiheys on $4,0 \text{ g cm}^{-3}$. Jos 20 munan yhteismassa on 1,0 kilogrammaa, kuinka monta senttimetriä pitkä on kunkin munan särmä? Kaikki munat ovat saman kokoisia. Kuution tilavuus lasketaan kaavalla $V = a^3$, missä a on kuution särmän pituus.

457. Määritellään funktio f lausekkeella $f(t) = 2t - 3$. Ratkaise

a) $f(t - 1) + f(t) + f(t + 1) = 3$

b) $f(f(t^2)) = 0$.

HARJOITUSKOE 3

458. a) Esitä yhdistetyn luvun 124 alkulukukehitelmä. (1 p.)

b) Osoita esimerkillä, että jakolasku ei ole liitännäinen. (2 p.)

c) Olkoon ihmisten joukossa relaatio ” a on b :n sisar”, jota merkitään $a \bowtie b$. Perustelee, onko relaatio $\bowtie$

c.a) refleksiivinen

c.b) symmetrinen

c.c) transitiivinen. (3 p.)

459. Avaa mahdolliset sulut ja sievennä.

a) $-(-x + y) - (-y)$

b) $(x + 1)^2$

c) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{13}{60}}$

460. a) Kymmenen maalaria maalaa keskimäärin kaksikymmentä aitaa kolmessa tunnissa. Kuinka monta aitaa kolmekymmentä maalaria ehtii maalata tunnissa?

b) Pertsä ajaa kotoansa mummolaan tunnissa, jos ajovauhti on lupsakka 60 km/h. Nyt Pertsalla on kuitenkin kiire, ja hän yrittää keretä mummolaan kahdessa kolmasosatunnissa. Kuinka nopeasti Pertsan pitää ajaa?

461. a) Ratkaise a yhtälöstä $x - a^{9001} = a^{9001} + x$.

b) Suorakulmaisen kolmion hypoteenuksen pituus on 4 pituusyksikköä ja kateetit ovat yhtä pitkät. Kuinka pitkiä kateetit ovat?

c) Ratkaise t yhtälöstä $\frac{t}{t-1} = \frac{2t-1}{t-1}$.

462. Mirjami heittää pallon 10 metrin korkeuteen. Pallo pomppaa aina 80 % edellisen pompun korkeudesta. Kuinka korkealle pallo nousee toisen pompuun jälkeen? Monennenko pompun jälkeen pallo ei enää nouse yli 5 metrin?

463. Ostat vuoden voimassa olevan parturikortin, jolla voi käydä parturissa niin usein kuin haluaa. Kortti maksaa 230 € ja kertakäynti 25 €. Kuinka monta kertaa sinun pitäisi käydä parturissa vuoden aikana, jotta ostos olisi kannattava? Esitä lisäksi sievennetty lauseke, jonka arvona on vuosikortin prosentuaalisen alennus (verrattuna yksittäiskäynteihin), kun vuodessa käydään parturissa n kertaa.

464. a) Mansikasta noin 99 % on vettä. Ostat 3,00 kiloa mansikoita ja laitat ne kuivumaan, kunnes kaksi kolmasosaa mansikoiden vedestä on haihtunut. Kuinka monta kilogrammaa mansikoita sinulla on kuivatuksen jälkeen?

b) Laitat suuren lottovoiton tilille, jolla talletus kasvaa 1,5 % vuodessa. Nostat rahat 20 vuoden päästä. Kuinka monta prosenttia arvokkaampi talletus tällöin on, kun inflaatio on pienentänyt joka vuosi rahan arvoa yhdellä prosentilla?

465. Kuutiosenttimetrissä ilmaa on keskimäärin 100 bakteeria. Bakteerisolujen oletetaan olevan pallon muotoisia (säde yksi mikrometri) ja vastaavan tiheydeltään vettä. Puhtaan ilman tiheys (ilman bakteereita) on $1,275 \text{ kg m}^{-3}$. Kuinka monta miljardisosaa (yksikössä ppb, *parts per billion*) ilman massasta on bakteereja? Pallon tilavuus lasketaan kaavalla $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, missä r on pallon säde eli puolet halkaisijasta/läpimitasta.

466. Todista jaollisuuden määritelmän avulla oikeaksi tai vääräksi väite: jos $a \mid b$ ja $a \mid c$, niin $a \mid b + c$. a , b ja c ovat kokonaislukuja.

467. Funktion T arvot määritellään yhtälöllä $T(x) = \frac{3}{4x^3-2}$. Määritä funktiolle mahdollisimman laaja reaalin määrittelyjoukko ja sitä vastaava arvojoukko.

HARJOITUSKOE 4

468. a) Mainitse jokin aina tosi yhtälö.
(0,5 p.)

b) Määritä luvun -7 käänteisluvun vastaluku. (0,5 p.)

c) Miksei reaalityyppilukuja käytettäessä voida ottaa parillista juurta negatiivisesta luvusta? (2 p.)

d) Järjestä joukot $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{Z}$ järjestykseen pienimmästä suurimpaan ts. siten, että edellinen sisältyy seuraavaan. (1 p.)

e) Esitä luku $1\,705,02$ kymmenen potenssien summana. Kirjoita kaikki kertoimet ja eksponentit selvästi näkyviin. (1 p.)

f) Esitä luvun 81 alkutekijäkehitemä. (1 p.)

469. a) Esitä $0,285714$ murtolukuna.

b) Mikä on funktion f määrittelyjoukko, kun funktion arvot määritellään kaavalla $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$?

c) Määritä yhtälön $x^{42} = 42$ kaikki reaaliset ratkaisut. Anna vastaus sadasosien tarkkuudella.

470. Sievennä.

a) $\frac{x-y}{y-x}$

b) $\frac{5,7 \cdot 10^{1\,002} + 3 \cdot 10^{1\,001}}{60}$

c) $x^2 \cdot 4^{28} \cdot x^{-1} \cdot 0,25^{27}$

471. Itämeren keskisyvyys on 55 metriä ja pinta-ala $415\,000\text{ km}^2$. Jos veden keskiuolaisuus olisi 1 % (painoprosentteina eli massaa suolaa per massa suolavettä), kuinka monta tonnia suolaa itämeressä olisi yhteensä? Veden tiheydeksi oletetaan 1 kg dm^{-3} .

472. a) Sukkien hintaa alennettiin 50 %. Kuinka monta prosenttia hintaa täytyy nostaa, jotta saavutetaan alkuperäinen hinta?

b) Erään valtion väestö on kasvanut 10 vuodessa 10 %. Kuinka monta prosenttia väestö on kasvanut keskimäärin vuodessa? Anna vastaus prosentin sadasosien tarkkuudella.

473. Kuntosaliyritys myy palveluitaan kahdella maksusuunnitelmalla: asiakas ostaa joko yksittäisiä käyntejä tai kuukausikortin. Yksittäinen käynti maksaa 7 euroa. Kuinka paljon kuukausikortin hinnaksi tulee, kun yritys suunnittelee sen olevan 15 päivänä kuukaudessa (30 päivää) kuntoilevalle asiakkaalle 20 prosenttia halvempi kuin vastaavien käyntien ostaminen erikseen? Kuinka monta kertaa kuukaudessa salilla tulee tällöin käydä, jotta kuukausikortti olisi edullisempaa kuin yksittäiset maksut? (Oletetaan asiakkaan käyvän kuntosalilla yhden keran vuorokaudessa.)

474. Timanttien arvo on karkeasti suoraan verrannollinen niiden massan neliöön. Kuuluisa timantti *The Great Mogul* painaa noin 800 karaattia. *The Sancy*-timantti painaa noin 50 karaattia. Kuinka monta kertaa

a) suurempi *The Great Mogul* on verrattuna *The Sancyyn*?

b) arvokkaampi *The Great Mogul* on verrattuna *The Sancyyn*?

475. Laboratoriossa viljeltävän bakteeriviljelmän massa kolminkertaistuu päivässä. Kun bakteereja on kasvatettu 5 päivän ajan, niitä on 243 grammaa.

a) Kuinka paljon bakteereja oli kasvatuksen alussa?

b) Kuinka monen päivän kuluttua kasvatuksen alusta bakteerimassaa on yli kaksi kilogrammaa?

476. Tuotteen hintaa laskettiin ensin p %, minkä jälkeen tuotteen hintaa korotettiin samat p %. Kokonaisuudessaan tuotteen hinta laski 15 %. Määritä p :n lukuarvo kahden desimaalin tarkkuudella.

477. a) Voiko funktio olla relaationa sekä transitiivinen että refleksiivinen? Jos voi, anna esimerkki. Jos ei, perustele.

b) Anna esimerkki reaalifunktion f lausekkeesta, jolle pätee $f(f(x)) = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Ylioppilaskoetehtäviä

Ylioppilaskokeissa on aina tehtäviä tai tehtävien alakohtia, joiden ratkaiseminen on mahdollista ensimmäisen kurssin tiedoin.

Lyhyen oppimäärän tehtäviä

478. (K2014/1b,c)

a) Laske lausekkeen $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ arvo, kun $a = 1$ ja $b = \frac{1}{2}$.

b) Ratkaise yhtälö $\frac{x}{3} = \frac{x-1}{4}$.

479. (K2014/2b) Ratkaise yhtälö $4x^3 = 48$. Anna tarkka arvo ja kolmidesimaalinen likiarvo.

480. (K2014/5) Boolimaljassa on 4,0 litraa sekoitusta, jonka tilavuudesta 70 % on kuohuviiniä ja 30 % mansikkamehua. Kuinka paljon siihen täytyy lisätä kuohuviiniä, jotta mehun osuus on 20 %?

481. (K2014/6) Kiinalainen arvoitus 5 000 vuoden takaa: Häkissä on fasaaneja ja kaniineja. Oletetaan, että yhdellä fasaanilla on yksi pää ja kaksi jalkaa, ja yhdellä kaniinilla yksi pää ja neljä jalkaa. Niillä on yhteensä 35 päätä ja 94 jalkaa. Kuinka monta fasaania ja kuinka monta kaniinia häkissä on?

482. (K2014/14) Helsingin kaupunki teetti ennusteen kaupungin väestönkasvusta vuodesta 2012 alkaen. Ennusteen mukaan asukasluku kasvaa lineaarisesti aikavälillä 2012 – 2030 niin, että kaupungissa on 607 417 asukasta vuoden 2014 alussa ja 629 894 asukasta vuoden 2018 alussa. Ennusteessa ei otettu huomioon mahdollisia kuntaliitoksia.

a) Ennusteen mukaan asukasluku y toteuttaa yhtälön

$$y = a(x - 2014) + b,$$

kun x on vuosiluku. Määritä vakioiden a ja b tarkat arvot käyttämällä yllä mainittuja tietoja.

b) Kuinka paljon asukasluku kasvaa ennusteen mukaan aikavälillä 2014 – 2030? Anna vastaus 1 000 asukkaan tarkkuudella.

Pitkän oppimäärän tehtäviä

483. (K2013/1a) Ratkaise yhtälö $(x - 4)^2 = (x - 4)(x + 4)$.

484. (K2013/3b) Sievennä lauseke $(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}})$.

485. (S2012/1a) Ratkaise yhtälö $2(1 - 3x + 3x^2) = 3(1 + 2x + 2x^2)$.

486. (S2012/1c) Ratkaise yhtälö $1 - x = \frac{1}{1-x}$.

487. (K2012/1b) Ratkaise yhtälö $\frac{x}{6} - \frac{x-3}{2} - \frac{7}{9} = 0$.

488. (K2012/2a) Laske lausekkeen $\frac{15}{4} - \left(\frac{6}{3}\right)^2$ arvo.

489. (S2011/1b) Ratkaise yhtälö $\frac{4x-1}{5} = \frac{x+1}{2} + \frac{3-x}{4}$.

490. (S2011/2a) Sievennä välivaiheet esittäen lauseke $\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{2+\sqrt{2}}}}$.

491. (K2011/1a) Ratkaise yhtälö $\frac{2}{x} = \frac{3}{x-2}$.

492. (K2011/2a) Osakkeen arvo oli 35,50 euroa. Se nousi ensin 12 %, mutta laski seuraavana päivänä 10 %. Kuinka monta prosenttia arvo nousi yhteensä näiden muutosten jälkeen?

493. (S2010/1a) Sievennä lauseke $(a + b)^2 - (a - b)^2$.

494. (K2010/1b) Sievennä lauseke $(\sqrt{a} + 1)^2 - a - 1$.

495. (S2009/1c) Osoita, että $\sqrt{27 - 10\sqrt{2}} = 5 - \sqrt{2}$.

496. (S2009/2b) Ratkaise yhtälö $\sqrt{x+2} = 3$.

497. (K2009/1a) Sievennä $\frac{a^2}{3} - \left(\frac{-a}{3}\right)^2$.

498. (S2008/1b) Sievennä lauseke $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1+x}{x^2}$.

499. (S2009/2b) Ratkaise yhtälö $\frac{x}{6} - \frac{x-2}{3} = \frac{5}{12}$.

500. (K2008/4) Vuonna 2007 alennettiin parturimaksujen arvonlisäveroa 22 prosentista 8 prosenttiin. Jos alennus olisi siirtynyt täysimääräisenä parturimaksuihin, kuinka monta prosenttia ne olisivat alentuneet? Arvonlisävero ilmoitetaan prosentteina verottomasta hinnasta ja se on osa tuotteen tai palvelun hintaa.

501. (S2007/1c) Ratkaise L yhtälöstä $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

502. (S2007/4) Tuotteen hintaa korotettiin p prosenttia, jolloin menekki väheni. Tämän johdosta hinta päätettiin alen-
taa takaisin alkuperäiseksi. Kuinka monta prosenttia korotetusta hinnasta alennus oli?

503. (K2007/1c) Sievennä lauseke
 $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} \quad (a > 0).$

504. (K2007/3a) Merivettä, jossa on 4,0 painoprosenttia suolaa, haihdutetaan altaassa, kunnes sen massa on vähentynyt 28 %. Mikä on suolapitoisuus haihduttamisen jälkeen? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

505. (K2007/3b) Mikä on vuotuinen korkoprosentti, jos tilille talletettu rahamäärä kasvaa korkoa korolle 1,5-kertaiseksi 10 vuodessa? Lähdeveroa ei oteta huomioon. Anna vastaus prosentin sadasan tarkkuudella.

506. (S2006/5) Hopean ja kuparin seoksesta tehty esine painaa 150 g, ja sen tiheys on $10,1 \text{ kg/dm}^3$. Kuinka monta painoprosenttia esineessä on hopeaa ja kuinka monta kuparia, kun hopean tiheys on $10,5 \text{ kg/dm}^3$ ja kuparin $9,0 \text{ kg/dm}^3$?

507. (K2006/1a) Ratkaise x yhtälöstä
 $4x + 2 = 3 - 2(x + 4).$

508. (K2006/1c) Sievennä lauseke
 $\frac{1}{a-1} \left(a - \frac{1}{a} \right)$

509. (K2006/4) Kesämökin rakentaminen tuli 25 % arvioitua kalliimmaksi. Rakennustarvikkeet olivat 19 % ja muut kustannukset 28 % arvioitua kalliimpia. Mikä oli rakennustarvikkeiden arvioitu osuus ja mikä lopullinen osuus kokonaiskustannuksista?

510. (S2005/1a) Ratkaise reaalityökalualueella yhtälö $2(x - 1) + 3(x + 1) = -x$

511. (S2005/1c) Ratkaise reaalityöryhmä
eella yhtälö $x^{16} = 256$.

512. (K2005/1a) Sievennä lauseke $\frac{x}{1-x} + \frac{x}{1+x}$

513. (K2005/2a) Ratkaise yhtälöryhmä
$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = 2a \end{cases}$$

514. (K2005/3) Asuinrakennuksesta saadut vuokrat ovat 12 % pienemmät kuin ylläpitokustannukset. Kuinka monta prosenttia vuokria oli korotettava, jotta ne tulisivat 10 % suuremmiksi kuin ylläpitokustannukset, jotka samanaikaisesti ko-
hoavat 4 %?

515. (K2004/3) Perheen vuokramenot olivat 25 % tuloista. Vuokramenot nousivat 15 %. Montako prosenttia vähemmän rahaa riitti muuhun käyttöön korotuksen jälkeen?

516. (S2003/5) Päärynämehestä ja omenamehestä tehdyn sekamehun sokeripitoisuus on 11 %. Määritä mehujen sekoitussuhde, kun päärynämehestä sokeripitoisuus on 14 % ja omenamehestä 7 %.

517. (K2003/1) Sievennä lausekkeet

a) $\sqrt{3\frac{3}{4}} / \sqrt{1\frac{2}{3}}$

b) $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) / \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)$.

518. (S2002/2) Vuoden 1960 jälkeen on nopeimman junayhteyden matka-aika Helsingin ja Lappeenrannan välillä lyhentynyt 37 prosenttia. Laske, kuinka monta prosenttia keskinopeus on tällöin noussut. Oletetaan, että radan pituus ei ole muuttunut.

519. (S2002/4a) Olkoon $a \neq 0$ ja $b \neq 0$.

Sievennä lauseke $\frac{a + \frac{b^2}{a}}{b + \frac{a^2}{b}}$

520. (K2002/3) Vuonna 2001 erään liikeyrityksen ulkomaille suuntautuvan myynnin arvo kasvoi 10 % vuoteen 2000 verrattuna. Samaan aikaan myynnin arvo kotimaassa väheni 5 %. Tällöin koko myynnin arvo kasvoi 6 %. Laske, kuinka monta prosenttia myynnistä meni vuonna 2000 ulkomaille.

521. (S2001/1) Ratkaise lineaarinen yhtälöryhmä
$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 4x + 5y = 2 \end{cases}$$

522. (S2001/3) Juna lähtee Tampereelta klo 8.06 ja saapuu Helsinkiin klo 9.58. Vastakkaiseen suuntaan kulkeva juna lähtee Helsingistä klo 8.58 ja saapuu Tampereelle klo 11.02. Matkan pituus on 187 kilometriä. Oletetaan, että junat kulkevat tasaisella nopeudella, eikä pysähdyksiin kuluvia aikoja oteta huomioon. Laske kummankin junan keskinopeus. Millä etäisyydellä Helsingistä junat kohtaavat, ja paljonko kello tällöin on?

523. (K2001/4) Säiliö sisältää 2,3 kg ilmaa, ja pumppu poistaa jokaisella vedolla 5 % säiliössä olevasta ilmasta. Kuinka monen vedon jälkeen säiliössä on vähemmän kuin 0,2 kg ilmaa?

524. (S2000/1) Sievennä seuraavat lausekkeet:

a) $(x^{n-1})^{n-1} \cdot (x^n)^{2-n}$

b) $\sqrt[3]{a} (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a^5})$

525. (S2000/3) Matkaa kuljetaan tasaisella nopeudella. Kun matkasta on jäljellä 40 %, nopeutta lisätään 20 %. Kuinka monta prosenttia koko matkaan kuluva aika tällöin lyhenee?

Pääsykoetehtäviä

ARKKITEHTIVALINTA

(2012/1) Taloyhtiössä on 210 asukasta. Taloyhtiö perii vesimaksua 15 €/henkilö/kk. Kaupunki perii taloyhtiöltä vesimaksua kokonaiskulutuksen mukaan 3,17 €/m³. Taloyhtiön toteutunut kokonaisvedenkulutus on asukasta kohden 155 litraa vuorokaudessa, mihin sisältyy hukkaan valuvia vuotoja yhtiötä kohden 1 500 m³ vuodessa. Oletamme, että vuodessa on 365 vuorokautta.

- a) Kuinka monta litraa vettä taloyhtiössä valuu hukkaan minuutissa?
- b) Vuodot tukitaan. Montako prosenttia vesimaksua voitaisiin laskea tai tulee korottaa, jotta vesimaksu tällöin kattaisi taloyhtiön vuotuiset vesikulut?

Anna vastaukset kolmen numeron tarkkuudella.

(2010/3) Arkkitehdit M. Uoto, F. Örm ja S. Hapé ovat suunnitelleet Aalto-yliopiston aulaan kullatusta teräskuutiosta muodostuvan taideteoksen. Kultaus on ohut. Toteutuksen aikana teoksen sijoituspaikka muuttuu, jolloin teräskuution tilavuutta kasvatetaan 19 % alkuperäisestä. Loppulaskutuksessa materiaalikustannusten todetaan kasvaneen samaiset 19 % alkuperäisestä budjetista.

- a) Paljonko kultaukseen käytetyn kullan määrä kasvoi toteutuksen aikana?
- b) Teräksen yksikköhinta ei toteutuksen aikana muuttunut. Miten kullan yksikköhinta siis muuttui?

Anna vastaukset prosentteina 0,1 prosenttiyksikön tarkkuuteen pyöristettynä.

DIPLOMI-INSINÖÖRIVALINTA

(2012/3) Asumistukea maksetaan 80 % vuokran määrästä, siltä osin kuin vuokra ei ylitä 252 euroa. Vuokran määrää vähennettynä asumistuella kutsutaan omavastuuksi.

- a) Minkä suuruinen vuokra on, kun omavastuu on puolet vuokrasta?

(2009/1) Kokonaistuotanto jaetaan materian ja palveluiden tuotantoon. Verrataan tuotantoa tammikuussa 2008 tammikuuhun 2009. Tänä vuoden pituisen tarkastelujakson aikana materiatuotanto kasvoi 2,0 % ja palvelutuotanto laski

7,0 %.

Kuinka suuri oli materiatuotannon osuus kokonaistuotannosta tammikuussa 2009,

a) kun tammikuussa 2008 materia- ja palvelutuotanto olivat yhtäsuuret?

b) kun vertailuaikana kokonaistuotanto laski 2,0 %?

Anna kummatkin vastaukset 0,1 %-yksikön tarkkuuteen pyöristettynä.

(2008/2) Yritys hankkii 5 000 kg raaka-ainetta, josta on vettä 5,40 % (painoprosenttia) ja väripigmenttiä 2,60 %. Ennen käyttöä raaka-aine on laimennettava siten, että lisäyksen jälkeen sekoituksesta 6,60 % on vettä.

a) Miten paljon hankittuun raaka-aineeseen tulee lisätä vettä, jotta haluttu vesipitoisuus saavutetaan?

b) Miten paljon vettä ja väripigmenttiä tulee lisätä hankittuun raaka-aineeseen, jotta haluttu vesipitoisuus saavutetaan, ja lisäksi väripigmentin suhteellinen osuus massasta säilyy alkuperäisenä 2,60 %:na?

Anna vastaukset sadan gramman tarkkuudella.

(2007/1) Vaaleissa kaikkiaan 39 300 äänestäjästä 45 % äänestää varmasti puoluetta A ja 47 % puoluetta B. Loput ovat ns. liikkuvia äänestäjiä, jotka eivät ole vielä päättäneet kantaansa.

a) Oletetaan, että kaikki äänioikeutetut äänestävät. Kuinka monta liikkuvien äänestäjien ääntä puolueen A täytyy tällöin kerätä saadakseen enemmistön, vähintään puolet annetuista äänistä?

b) Oletetaan, että täsmälleen kolmasosa liikkuvista äänestäjistä jättää äänestämättä. Kuinka monta prosenttia liikkuvien äänestäjien annetuista äänistä puolueen A täytyy tällöin kerätä saadakseen enemmistön kaikista annetuista äänistä?

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN VALINTA

(2012/1a) Ratkaise yhtälö $\frac{3}{2}x - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}$.

(2011/1) Oletetaan, että polttoaineessa E05 on etanolia 5 % ja bensiiniä 95 % ja polttoaineessa E10 etanolia 10 % ja bensiiniä 90 %. Oletetaan myös, että etanolin energiasisältö on $\frac{2}{3}$ puhtaan bensiinin energiasisällöstä. Jos tietyllä autolla 100 km kulutus on 10 litraa polttoainetta E05, paljonko kulutus on polttoainetta E10? Anna vastaus sievennettynä murto- tai sekalukuna. Jos polttoaineen E10 hinta on 1,60 €/l ja polttoaineen E05 hinta on 1,65 €/l, kumpaa on edullisempaa käyttää?

TEKNIIKAN JA LIIKENTEEN ALAN AMK-VALINTA

(K2012/3) Erään tuotteen valmistuskustannuksista raaka-aineiden osuus on 65 % ja palkkojen osuus on 35 %.

b) Jos toisaalta valmistuskustannukset halutaan pitää ennallaan palkankorotuksen jälkeen, niin montako prosenttia raaka-ainekustannusten pitää pienentyä?

(S2011/2) Olkoon $a = 132$ ja $b = 112$. Kuinka monta prosenttia

b) luku b on pienempi kuin luku a

(K2011/1) Laske lukujen $\frac{1}{3}$ ja $-\frac{7}{3}$

b) summan käänteisluku

(K2011/2) Yksi kilogramma etanolia tuottaa palaessaan energiaa 26,8 MJ ja vastavasti yksi kilogramma puhdasta bensiiniä tuottaa palaessaan energiaa 42,6 MJ. Kuinka monta prosenttia enemmän energiaa puhdas bensiini tuottaa palaessaan kuin 95 E10 -bensiini, joka sisältää 10 % etanolia? Ilmoita vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

KAUPPATIETEIDEN VALINTAKOE

Luku 3. Funktiot 227

neliöjuuren. Seuraavia tehtäviä ratkoessasi sinun kannattaa miettiä, miten toimit, jos käytössäsi olisi vain nelilaskin.

(2002/38) Mikä on lukujen $a = 2^{1/2}$, $b = 3^{1/3}$ ja $c = 5^{1/5}$ suuruusjärjestys?

- a) $a > b > c$
- b) $a > c > b$
- c) $b > a > c$
- d) $c > a > b$

(2008/43) TietoEnatorin liikevaihto vuonna 2007 oli 1 772,4 MEUR (miljoona euroa). Mikä alla olevista vaihtoehdoista on lähimpänä vuoden 1999 liikevaihtoa, kun liikevaihdon keskimääräinen vuotuinen muutosprosentti kahdella desimaalilla on ollut 3,96 %? Keskimääräinen muutosprosentti on luku, joka ilmaisee kuinka paljon liikevaihto olisi vuosittain prosentuaalisesti kasvanut, jos prosentuaalinen kasvu olisi ollut vakio.

- a) 1 299,1 MEUR
- b) 1 346,0 MEUR
- c) 1 704,9 MEUR
- d) 1 249,6 MEUR

(2004/40) Piensijoittajan rahavarat r vuoden alussa ovat 1 000 €, ja ne kasvavat korkoa vuotuisen korkotekijän $R = 1,04$ mukaisesti. Vuoden lopussa korko lisätään pääomaan, ja seuraavana vuotena vuotuinen korkotekijä on $R = 1,10$. Korkotuotto kahdelta vuodelta on (lähimpään kokonaislukuun pyöristettynä)

- a) 145 €
- b) 140 €
- c) 100 €
- d) 144 €.

(2003/33) Yhtä tuotetta valmistavan monopoliyrityksen kuukauden tarjontamäärän ollessa q (yks/kuukausi) on tuotteen hinta p (euroa/yks) annettu hintafunktiolla $p = 100 - q$. Kun kyseessä on monopoli, yritys määrää markkinahinnan p valitsemalla tuotantomäärän q , jolloin hinta määräytyy hintafunktion mukaisesti. Yrityksen tuotantokustannukset $c(q)$ (euroa/kuukausi) tuotantomäärän q funktiona ovat

$$c(q) = 100 + 80q, \text{ kun } q \leq 15, \text{ ja}$$

$$c(q) = 700 + 40q, \text{ kun } q \geq 15.$$

Yrityksen voitto $pq - c(q)$ saavuttaa maksimiarvonsa, kun

- a) $q = 10$

b) $q = 15$

c) $q = 30$

d) $q = 60$.

(2000/33) Erään tuotteen kysyntämäärä d (yksikköä) riippuu yksikkö hinnasta p (mk/yksikkö) funktion $d = 5\,000p^{-1,5}$ mukaisesti. Tuotteen yksikkökustannukset ovat vakio 15 mk/yksikkö. Suurin nettotuotto saadaan tällöin hinnalla

a) 40 mk

b) 45 mk

c) 50 mk

d) 55 mk.

Lisämateriaalia

Lukujärjestelmät

PAIKKAJÄRJESTELMÄT

Merkitsemme lukuja yleensä **kymmenjärjestelmässä** eli **lukujärjestelmässä**, jossa on kymmenen **numeromerkkiä**: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9. (Käyttämämme numeromerkit ovat nimeltään hindu-arabialaiset numerot.) Kymmenjärjestelmää kutsutaan myös **desimaalijärjestelmäksi**. Tunnetaan kulttuureja, joissa on käytetty pääasiallisesti jotakin muuta lukujärjestelmää.

Kymmenjärjestelmä on **paikkajärjestelmä**, eli merkin paikka määrittää sen merkityksen. [ESIMERKKI 3.142](#)

Numeron 8 merkitys riippuu sen paikasta. Luvussa 80 merkin 8 merkitys on $8 \cdot 10^1$, mutta luvussa 820 sen merkitys on $8 \cdot 10^2$.

ESIMERKKI 3.143

Esitä luku 2 080,7 kymmenen potenssien summana.

Ratkaisu. $2\,080,7 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1}$

Nykyään yleisimmät desimaalijärjestelmästä poikkeavat lukujärjestelmät ovat **binääri-**, **oktaali-** ja **heksadesimaalijärjestelmät**, joissa on vastaavasti 2, 8 ja 16 numeromerkkiä. Tietokoneet käsittelevät lukuja sisäisesti binäärijärjestelmässä, kun taas oktaali- ja heksadesimaalijärjestelmät ovat muutoin käteviä tietojenkäsittelytieteessä.

Yleisesti pätee, että kun käytettävissä olevien merkkien määrää lisää, suuria lukuja voi kirjoittaa lyhyempään muotoon. Näin ollen sama luku esitettynä kolmekantaisessa lukujärjestelmässä voi olla paljon pidempi kuin kymmenkantaisessa esitettynä. Tilanne on verrattavissa vaikkapa kiinan kieleen, jossa on käytössä tuhansia erilaisia

kirjoitusmerkkejä. Merkeissä on paljon muistettavaa, mutta toisaalta kokonaisen lauseen voi kirjoittaa vain parilla kirjoitusmerkillä.

Binäärijärjestelmässä luvun muodostavia numeromerkkejä kutsutaan **biteiksi**. Bitti voi olla joko päällä (1) tai pois päältä (0), ja toteutus tietokoneessa vastaa esimerkiksi sitä, että johtimessa kulkee virta (1) tai ei (0). Kuusitoistajärjestelmässä tarvitaan numeroiden 0 ... 9 lisäksi kuusi uutta numeromerkkiä. Tavaksi on vakiintunut käyttää kirjainmerkkejä A, B, C, D, E, F. Ne vastaavat desimaalilukuja 10 ... 15.

Useampaa järjestelmää käytettäessä, erityisesti muunnettaessa lukuja järjestelmästä toiseen, merkitään kantaluku luvun jälkeen alaindeksinä. Voimme esimerkiksi merkitä (desimaalijärjestelmän) lukua yhdeksäntoista 10011_2 , 23_8 , 19_{10} tai 13_{16} . Huomaa, että binäärijärjestelmän luvuissa ei ole mielekästä käyttää tuhaterotinta, koska sana tuhat itsessään viittaa kymmenjärjestelmälle ominaiseen kolmanteen kymmenen potenssiin. Binääriluvuille ei ole vakiintunut vastaavia ilmaisuja kuten sata tai miljoona, vaan luvut luetaan numero kerrallaan.

ESIMERKKI 3.144

■ Luku 11001_2 luetaan ”yksi yksi nolla nolla yksi”.

Luvut eri kannoissa voidaan muuttaa desimaaliluvuiksi esittämällä luku ...

ESIMERKKI 3.145

■ $10,01_2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 2,25_{10}$

Lukujärjestelmiä voidaan vaihtoehtoisesti merkitä kirjoittamalla niiden tunnus (Bin, Oct, Dec, Hex) luvun jälkeen. Klassinen vitsi ”Miksi tietojenkäsittelytieteilijä sekoittaa halloweenin ja joulun? Koska $31 \text{ Oct} = 25 \text{ Dec}$!” perustuu siihen, että

$$\begin{aligned} \text{halloween} &= 31. \text{lokakuuta} = 31 \text{ Oct} = 31_8 = 3_{10} \cdot 8_{10} + 1_{10} \cdot 1_{10} \\ &= 25_{10} = 25 \text{ Dec} = 25. \text{joulukuuta} = \text{joulupäivä}. \end{aligned}$$

MUUT LUKUJÄRJESTELMÄT

Yleisesti tunnetaan myös joitakin lukujärjestelmiä, jotka eivät ole paikkajärjestelmiä.

Tukkimiehen kirjanpidossa toistetaan yhtä ainoaa merkkiä. Se on tavallaan 1-järjestelmä, mutta tällainen määrittely ei ole ongelmaton.

$$\text{III} = 3 \quad \text{IIII} = 4 \quad \text{IIII}^{\text{I}} = 5$$

Hienostuneempi versio tukkimiehen kirjanpidosta ovat **roomalaiset luvut**, jotka nimensä mukaisesti olivat yleisin lukujärjestelmä antiikin Roomassa. Roomalaisia lukuja käytetään yhä nykyäänkin erityisesti järjestyksen merkitsemisessä. Roomalaisten lukujen numeromerkit ovat I, V, X, L, C, D ja M. Ne vastaavat desimaalijärjestelmän lukuja seuraavalla tavalla:

$$I = 1 \quad V = 5 \quad X = 10 \quad L = 50 \quad C = 100 \quad D = 500 \quad M = 1\,000$$

Roomalaiset luvut merkitään kirjoittamalla merkkejä laskevassa järjestyksessä, poikkeuksena vähennyssääntö. Merkkien kokonaisarvo määrää luvun. Vähennyssääntö tarkoittaa kuutta kaksimerkkistä ilmaisua:

$$IV = 4 \quad IX = 9 \quad XL = 40 \quad XC = 90 \quad CD = 400 \quad CM = 900$$

Joissain vanhoissa teksteissä (ja jopa kellotauluissa) luku 4 on merkitty myös IIII.

Luvussa voi olla vain kerran IV tai IX, vain kerran XL tai XC ja vain kerran CD tai CM. Kaksimerkkisiin ilmaisuihin pätevät samat säännöt kuin numeromerkkeihin: I= 1 ei voi edeltää numeroa IV= 4, eikä IV= 4 numeroa V= 5. Lisäksi merkinnät IXV, XCL ja CMD eivät ole sallittuja. Oikea roomalainen luku minimoi käytettyjen merkkien määrän. Esimerkiksi VIV ei ole roomalainen luku, sillä IX on esityksenä lyhyempi.

Nollaa roomalaisissa numeroissa ei ole; nolla nykyisessä merkityksessään kehitettiin vasta Intiassa 800-luvulla jaa.

ESIMERKKI 3.146

Roomalaisia lukuja:

a) III = $1 + 1 + 1 = 3$

b) IX = $10 - 1 = 9$

c) $XII = 10 + 1 + 1 = 12$

d) $XIV = 10 + (5 - 1) = 14$

e) $CDX = 500 - 100 + 10 = 410$

f) $MDC = 1\,000 + 500 + 100 = 1\,600$

Tehtäviä

526. Muunna seuraavat binääriluvut kymmenjärjestelmään.

- a) $101,0_2$
- b) $1,00101_2$
- c) $100101,1101_2$

527. Muunna seuraavat luvut binäärijärjestelmään.

- a) $7,0_{10}$
- b) $2,5_{10}$
- c) $11,1875_{10}$

528. Muuta seuraavat kymmenjärjestelmän luvut heksadesimaaliluvuiksi.

- a) 175
- b) 384

529. Laske

- a) $1101_2 \cdot 100_2$
- b) $1101001_2 \cdot 100000_2$
- c) $10110_2 \cdot 0,01_2$.

530. Mitkä seuraavista ovat oikeita roomalaisia lukuja? Mitä ne ovat kymmenjärjestelmässä?

- a) CLI
- b) IVX
- c) VIZI
- d) CCLI
- e) CCCLXXXVI
- f) CMVCI
- g) MMDCXLIII
- h) CDXCIII
- i) DCXLIX

531. Muuta seuraavat kymmenjärjestelmän luvut roomalaisiksi luvuiksi. Kuinka monta merkkiä tarvitaan luvun kirjoittamiseen?

- a) 278
- b) 712
- c) 1 478
- d) 3 999

532. ★ Mikä on suuruusjärjestyksessä 148. positiivinen kokonaisluku, jonka kymmenjärjestelmäesityksessä on vain nollia ja ykkösiä?

Vastaukset

1.

a) $-16 - (-8) = -16 + 8 = -8$

b) $\frac{8}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$

c) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$

d) $-8x^2 + x$

e) $\frac{b}{a^2}$

2.

a) 20, sillä $1\text{ l} = 1\text{ dm}^3$

b) $20\text{ dm}^3 = 20 \cdot (\text{dm})^3 = 20 \cdot \text{d}^3 \cdot \text{m}^3 = 20 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 \text{ m}^3 = 20 \cdot \frac{1}{1\,000} \text{ m}^3 = \frac{20}{1\,000} \text{ m}^3 = \frac{2}{100} \text{ m}^3 = 0,02 \text{ m}^3$

3.

a) $x = -\frac{11}{4}$

b) $x = -3$ tai $x = 3$

c) $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

4.

a) $(-3)^2 + 3 \cdot (-3) = 0$

b) $x = 4$

5.

a) Aika kaksinkertaistuu.

b) Aika puolittuu.

6.

a) Alennettu hinta on

$$25,95\text{ €} - 25,95 \cdot 0,15 = 25,95\text{ €} \cdot (1 - 0,15) = 25,95\text{ €} \cdot 0,75 = 22,06\text{ €} \approx 22,05\text{ euroa}$$

b) Merkataan tuotteen alkuperäistä hintaa (esimerkiksi) x :llä, jolloin saadaan yhtälö $x \cdot 0,75 = 21,25\text{ €}$. Tästä saadaan ratkaistua jakolaskulla alkuperäiseksi hinnaksi

$$x = \frac{21,25\text{ €}}{0,75} = 25,00\text{ €}$$

7.

a) 37 616,003

b) $-67\,360\,008$

8.

a) refleksiivinen ja transitiivinen

b) transitiivinen

c) ei mikään vaihtoehdoista

d) symmetrinen (ei transitiivinen, koska oma työkaveri voi olla töissä lisäksi jossain muualla)

9. Relatio on symmetrinen, symmetrinen ja transitiivinen.

10.

a) epätosi

b) epätosi

c) tosi

d) tosi

e) tosi

11. Pisteseeseen

a) $-2 + (-3) = -5$

b) $-2 + 6 + (-2) = 2$

c) $-2 + 2 + (-6) = -6$

12.

a) $17 - 5 = 12$

b) $5 + 6 = 11$

c) $-10 + (-2) = -12$

d) $-20 - (-3) = -17$

13.

a) -5

b) 12

c) -3

d) 3

e) 0

14.

a) -36

b) -49

c) 40

d) -64

e) -40

f) -80

15. 60

16.

a) $5 : (-15) = -\frac{1}{3}$

b) $-(2 \cdot 8) = -16$

c) $\frac{-(-2)}{x-y} = \frac{2}{x-y}$

17.

a) $130 + 5$

b) $-4 + (-7)$

c) $2a + (-b)$

18.

a) $31 - (-4)$

b) $-15 - 92$

c) $-a - (-2b)$

19.

a) -1

b) 12

c) 3

20.

a) 9

b) 48

c) 6

21.

a) $(5-1) \cdot 3 + 2 = (1+4) \cdot (4-2) - (4-8)$

b) $2 \cdot (-1 : 8 + 3) \cdot 4 = (2+1) \cdot 8 - 1$

c) $7 - 9 + 25 \cdot (5-1) : (61-6-5) = (3+4) \cdot 7 \cdot (1-5) + 14 \cdot (6+8)$

22.

- a) Ei ole jaollinen luvulla 4
- b) On jaollinen luvulla 4, sillä $12 = 4 \cdot 3$
- c) Ei ole jaollinen luvulla 4
- d) Ei ole jaollinen luvulla 4
- e) On jaollinen luvulla 4, sillä $-20 = 4 \cdot (-5)$
- f) On jaollinen luvulla 4, sillä $0 = 4 \cdot 0$

23.

- a) tosi
- b) epätosi
- c) tosi
- d) epätosi

24.

- a) $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
- b) $15 = 3 \cdot 5$
- c) $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$
- d) $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
- e) $64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
- f) $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
- g) $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

25.

- a) Luku 111 voidaan kirjoittaa tulona $3 \cdot 37$, joten 111 ei ole alkuluku.
- b) Luku 74 voidaan kirjoittaa tulona $3 \cdot 5 \cdot 5$, joten 74 ei ole alkuluku.

c) 97 on alkuluku.

d) Luku 360 voidaan kirjoittaa tulona (esimerkiksi) $2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6$, joten 360 ei ole alkuluku.

26. Saavuttamattomissa olevat annoskoot ovat 1, 2, 3, 5, 7 ja 11. Jos neljän pakkaukset eivät innosta, mahdollisia annoskokoja on paljon enemmän: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 22 ja 23.

27.

- a) kyllä
- b) ei
- c) kyllä

28. $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

29. Olkoon a mainittu mielivaltainen kokonaisluku. Väite $6 \mid a$ on yhtäpitävä sen kanssa, että on olemassa kokonaisluku b siten, että $a = 6b$. Koska $6 = 2 \cdot 3$, ehto voidaan kirjoittaa $a = 2 \cdot 3 \cdot b$. Koska kahden kokonaisluvun tulo on aina kokonaisluku, niin sekä $2b$ että $3b$ ovat myös kokonaislukuja. Siis voidaan kirjoittaa $a = 2 \cdot (3b) = 2 \cdot k$, missä k on kokonaisluku: a on jaollinen kahdella. Toisaalta voidaan kirjoittaa $a = 3 \cdot (2b) = 3 \cdot l$, missä l on kokonaisluku: a on jaollinen kolmella. a on siis jaollinen sekä kahdella että kolmella.

30.

a) $(-6) \cdot 3$

b) $5 \cdot (6 + 7)$

c) $(7 + 6) \cdot 5$

d) $5 \cdot 7 + 5 \cdot 6$

e) $-8 \cdot ((-5) \cdot 2)$

31.

a)

$$\begin{aligned} & 350 \cdot 271 - 272 \cdot 350 \\ &= 350 \cdot 271 - 350 \cdot 272 \quad (\text{vaihdantalaki}) \\ &= 350 \cdot (271 - 272) \quad (\text{osittelulaki}) \\ &= 350 \cdot (-1) \\ &= -350 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & 370 \cdot 1\,010 \\ &= 370 \cdot (1\,000 + 10) \\ &= 370 \cdot 1\,000 + 370 \cdot 10 \quad (\text{osittelulaki}) \\ &= 370\,000 + 3\,700 \\ &= 373\,700 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} & 594 + 368 + 3 - 368 \\ &= 594 + 368 + (3 - 368) \quad (\text{liitöntälaki}) \\ &= 594 + 368 + (-368 + 1) \quad (\text{vaihdantalaki}) \\ &= 594 + (368 + (-368)) + 1 \quad (\text{liitöntälaki}) \\ &= 594 + 0 + 1 \\ &= 595 \end{aligned}$$

32.

a) $a + 2b$

b) $8a + 4b$

c) $-a + b$

d) 0

33.

a) $bc - b - c + 1$

b) $bc - 2b - ac + 2a$

c) $1 - 2y - 2x + 4xy$

34.

a) $3 \cdot 2 = 6$, koska $2 + 2 + 2 = 2 + 4 = 6$

b) $6 - 4 = 2$, koska $2 + 4 = 6$

c) $3x + x = 3 \cdot x + 1 \cdot x = (3 + 1) \cdot x = 4x$

d) $xy + yx = xy + xy = 1 \cdot (xy) + 1 \cdot (xy) = (1 + 1) \cdot (xy) = 2(xy) = 2xy$

35.

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{9}{10}$

c) $\frac{1}{16}$

d) $\frac{13}{21}$

e) $\frac{16}{27}$

36.

a) $\frac{10}{15}$ ja $\frac{12}{15}$

b) $\frac{15a}{18}$ ja $\frac{14b}{18}$

c) $\frac{4}{6a}$ ja $\frac{15ab}{6a}$

37.

a) $\frac{8}{11}$

b) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{7}{6}$

d) $\frac{19}{12}$

38.

a) $7\frac{1}{2}$

b) $11\frac{1}{16}$

c) $134\frac{3}{15}$

39.

a) $\frac{17}{5}$

b) $\frac{137}{34}$

c) $\frac{6\,296}{3\,145}$

40.

a) $\frac{16}{9}$ tai $1\frac{7}{9}$

b) $\frac{8}{3}$

c) $\frac{7}{1}$

d) $1\frac{2}{3}$

41.

a) $\frac{8}{15}$

b) $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

c) $\frac{3}{7}$

d) 12

42.

a) $1\frac{1}{21}$

b) $-\frac{16}{39}$

c) $\frac{7}{32}$

d) ei määritelty (nollalla jakaminen)

43.

a) $-7, \frac{-19}{9}, \frac{-15}{11}, \frac{3}{4}, \frac{11}{12}$.

b) $\frac{5}{-2}, \frac{7}{-3}, \frac{15}{21}, \frac{-3}{-4}, \frac{8}{9}$.

44.

a) $\frac{-3}{4}$

b) $\frac{4}{3}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $-\frac{4}{3}$

e) $-\frac{4}{3}$

f) $\frac{3}{4}$

g) kohdat c ja f; Luvun vastaluvun vastaluku on sama kuin luku itse – samoin käänteisluvun käänteisluku.

h) kohdat d ja e: käänteisluvun vastaluku on sama kuin vastaluvun käänteisluku.

45.

a) $\frac{-11}{8}$

b) $8\frac{5}{4} = 9\frac{1}{4}$

c) $-\frac{11}{8}$

d) $-\frac{8}{11}$

46. a) $\frac{7}{10}$ b) $\frac{29}{30}$ c) $-\frac{1}{9}$ d) $-\frac{25}{4}$ eli $-6\frac{1}{4}$

47. a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{19}{30}$

48. a) $\frac{6+b}{2}$ b) ab

49. a) $\frac{2}{11}$ b) $5\frac{2}{3}$

50.

a) Kun $x = 0$ (ja vain silloin; tulosta tulee nolla vain nollalla)

b) $\frac{8}{3}$ (käänteisluvun määritelmä)

c) $\frac{26}{23}$

51. $1 - (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}) = \frac{60}{60} - \frac{20}{60} - \frac{15}{60} - \frac{12}{60} = \frac{60}{60} - \frac{47}{60} = \frac{13}{60}$

52. Yksi kahdeksasosa

53.

a) $-\frac{2}{5}$

b) $-\frac{1}{7}$

c) -7

54. Kaikilla, jos $a \neq 0$, $-\frac{1}{a} = \frac{1}{-a}$

55.

a) 1

b) $-\frac{1}{7}$

56.

a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$

c) $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

d) 4

57.

a) $\frac{18}{5}$

b) $\frac{5}{8}$

c) 3

d) $\frac{1}{4}$

58.

a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

c) $\frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$

d) $\frac{3}{28}$

59.

a) $\frac{2}{5}$

b) $-\frac{5}{6}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{8}$

60.

a) $\frac{47}{84}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $-\frac{2}{15}$

d) $\frac{27}{5}$

61.

a) $\frac{20}{9}$

b) $\frac{18}{35}$

c) $\frac{1}{2}$

62. 5

63. Muut saivat piirakasta kuudesosan.

64.

a) 50 euroa

b) 50 euroa

c) 37,50 euroa

65. $40 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 40 \cdot \frac{4}{10} = 16.$

66. Toisena päivänä aamulla kakkua on jäljellä puolet, kolmantena päivänä aamulla $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$, neljäntenä päivänä $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$, jne. Siis seitsemän päivän jälkeen kakkua on jäljellä

$$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}\right) = \frac{1}{128}.$$

67. $\frac{81}{10}$

68. Luku $\frac{3+a}{a}$, sillä $3 > \frac{5}{3}$. Vakio a on molemmissa sama luku, joten se vaikuttaa samalla tavalla molempien lukujen suuruuteen.

69. $\frac{1}{12}$

70. Summa on $\frac{rs}{r+s}$. Jos $r = \frac{2}{3}$ ja $s = 3$, niin lausekkeen arvo on $\frac{6}{11}$.

71.

a) $\frac{1}{n(n+1)}$

b) $1 - \frac{1}{n}$

72. Kun $x > 1$.

73.

a) $a + 1$

b) $4a$

74. Vanhin sai 6 esinettä, keskimäinen 3 esinettä ja nuorin 2 esinettä. Vanha matemaatikko pitää yhden palkinnon itsellään, sillä $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$. (Tämä vastaus on oikein. Jos ihmetyttää, kannattaa lukea tarkkaan, mitä tehtävässä oikein sanotaan.)

75. Luvut ovat sievennettynä peräkkäisten Fibonaccin lukujen osamääriä:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8} \dots$$

76.

a) $7x^2 + 3x$

b) $4(x^2 + x^3)$ tai $4x^2 + 4x^3$

c) $ax^2 + (b + c)x$ tai $ax^2 + bx + cx$

d) $(a + f)x^3 + (b + d)x + (c + e)y^3$

77.

a) $-\frac{x}{6}$

b) $\frac{2}{3}x - \frac{17}{6}$

c) $\frac{x}{4}$

78. $2b$

79.

a) kantaluku 5, eksponentti 3, potenssin arvo 125

b) kantaluku 2, eksponentti 5, potenssin arvo 32

c) kantaluku 9, eksponentti 1, potenssin arvo 9

d) kantaluku 1, eksponentti 1, potenssin arvo 1

e) kantaluku -4 , eksponentti 3, potenssin arvo -64

f) kantaluku -1 , eksponentti 10, potenssin arvo 1

g) kantaluku 6, eksponentti -1 ,
potenssin arvo $\frac{1}{36}$

80.

- a) a^3
- b) a^3b^4
- c) a^4b^3

81.

- a) a^5
- b) a^6
- c) a^2
- d) 1, ei määritelty kun $a = 0$
- e) a^{10}
- f) a^{20}

82.

- a) 64
- b) 64
- c) 64
- d) 64

83.

- a) 16
- b) 16
- c) -16

84.

- a) -49
- b) 49
- c) $\frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

d) $\frac{1}{(-7)^2} = \frac{1}{49}$

85.

- a) $\frac{1}{3}$
- b) $\frac{1}{25}$
- c) $\frac{7}{1}$
- d) $\frac{4}{3}$

86.

- a) a^2b^3
- b) 1
- c) a^{17}

87.

- a) a
- b) b^2
- c) c^2
- d) d^3
- e) e^{-1}
- f) f^{-2}
- g) k^8

88.

- a) $x^3 - x^2$
- b) $k^5 - 3k^4$
- c) $t^2 - t^{102} - t^{100}$

89.

- a) $2x^2$
- b) $\frac{x}{y}$
- c) $\frac{xz}{y}$
- d) $3y^3z$

90.

a) $\frac{1}{a^4}$

b) $\frac{a^3}{b^3}$

91.

a) $\frac{1}{10}$

b) $5^5 = 3\,125$

c) 2^{2n-3}

d) 2^{6i+12}

92.

a) b^9

b) $-\frac{1}{3}a = -\frac{a}{3}$

c) $\frac{10\,000}{b^6}$

93.

a) $-a^6$

b) 1

c) $27a^3$

d) $a^{15}b^9$

94.

a) $-\frac{b^3}{a^3}$

b) a^8b^8

c) $\frac{a^8}{b^8}$

95.

a) $y^2 - 1$

b) $-2s^3 + 2s^2 + s - 1$

c) $z^4 + 4z^2 + 4$

96.

a) $2x^3 + 3x$

b) $3 + 4\frac{y}{x^2}$

c) $\frac{3}{y} - 2xy^2$

d) $\frac{x}{y^2z} + \frac{3}{2} + \frac{2}{y^2}$

97. Viidennen pompun korkeus on $(1/2)^4 = 1/16 \approx 0,06$ metriä. Pallon 13. pompun korkeus on $(1/2)^{12} \approx 0,0002$ metriä eli 0,2 millimetriä.

98.

a) kaikilla kokonaisluvuilla

b) parillisilla kokonaisluvuilla

c) parittomilla kokonaisluvuilla

d) ei millään kokonaisluvulla

99.

a) 8

b) $\left(\frac{2 \cdot 3}{7}\right)^4 = \frac{1\,296}{2\,401}$

100.

a) Kolmas alkuluku on 5, sijoittamalla alkulukukaavaan $n = 5$, saadaan $p = 2^5 - 1 = 31$, josta edelleen täydelliseksi luvuksi $p(p+1)/2 = 31(31+1)/2 = 31 \cdot 32/2 = 496$.

b) Sijoitetaan $p = 2^n - 1$ kaavaan $p(p+1)/2$, niin saadaan sieventämällä $p(p+1)/2 = (2^n - 1)(2^n - 1 + 1)/2 = (2^n - 1)2^n/2 = 2^n(2^n - 1)/2 = \frac{2^n}{2}(2^n - 1) = 2^{n-1}(2^n - 1)$.

101. Pinta-ala on $\pi \cdot 0,6^2 \approx 1,1 \text{ cm}^2$.

102.

- a) a^3
- b) $4a^2$
- c) $-8a^3b^3c^3$
- d) $91a^4$

103.

- a) a^5
- b) a^2b
- c) $-a^4$

104.

- a) a^6b^4
- b) a^9b^{12}
- c) $a^{20}b^{10}$
- d) $8a^3b^7$

105.

- a) ab
- b) b
- c) 1
- d) 1
- e) $-\frac{a}{b}$

106.

- a) $\frac{1}{a^3}$
- b) $\frac{1}{a^2}$
- c) a^3
- d) $\frac{1}{a^4b^3}$
- e) a^8

107.

- a) 1 ($a \neq 0$, koska 0^0 ei ole määritelty)
- b) 1 ($a \neq 0$, koska 0^0 ei ole määritelty)
- c) a^2
- d) a ($a \neq 0$, koska 0^0 ei ole määritelty)
- e) a ($a \neq 0$, koska 0^0 ei ole määritelty)

108.

- a) $\frac{1}{4}$
- b) $\frac{1}{27}$
- c) $\frac{a^4}{b^4}$
- d) $\frac{a^4}{b^6}$
- e) $\frac{a^2}{b^4}$

109.

- a) a^7
- b) a^2
- c) a^6
- d) 1

110.

- a) $\frac{1}{4}$
- b) a^2
- c) $\frac{1}{9}$
- d) $\frac{1}{a^{12}b^{16}}$ tai $a^{-12}b^{-16}$

111.

- a) a^8b^2
- b) a^2b^6

c) $a^{15}b^{12}$

d) $10^8 = 100\,000\,000$

112.

a) a^2

b) $-a^2b^3$

c) $-a^4$

113.

a) a^5

b) a^5

c) a^3

d) a^4

e) a^6

114.

a) a^4

b) a^4

c) a^5b

d) a^2b^2

115.

a) $2^4 = 16$

b) 2^{63}

c) 2^{n-1}

d) $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$

(Huomataan, että kullakin ruudulla on yksi jyvä vähemmän kuin kaikilla edellisillä ruuduilla yhteensä.)

116.

a) $42 = 2^{2^2} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65\,536$

b) $35 = 4^{4^4} = 4^{256} \approx 1,34 \cdot 10^{154}$

117. $a^{20}c^2$

118.

a) $-i$

b) 1

c) i

d) i

e) $-i$

f) 2

g) $x^2 + y^2$

120. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1\,234}{1\,000} = \frac{617}{500}$ d) $-\frac{1}{5}$

121. a) $-1,5$ b) 0,75 c) 0,6

d) $-1,1666\dots$

122.

a) $\frac{43\,532}{1\,000}$

b) $\frac{5\,031}{1\,000}$

c) $\frac{23}{100}$

d) $\frac{3\,002}{1\,000}$

e) $\frac{101}{1\,000}$

123.

a) $\frac{1}{100}$

b) $\frac{49}{200}$

c) $\frac{1}{250}$

d) $\frac{251}{250\,000}$

124.

- a) $\frac{7}{9}$
- b) $\frac{15}{99} = \frac{5}{33}$
- c) $\frac{205\,426}{99\,900} = \frac{102\,713}{49\,950}$
- d) $\frac{9}{9} = 1$

125.

- a) 0,604
- b) 0,4016
- c) 0,3088
- d) 0,986

126.

- a) $\frac{649}{999}$
- b) $\frac{718}{3\,333}$.

127.

- a) $3,\overline{81}$
- b) $2,\overline{846153}$
- c) $0,\overline{38}$
- d) $0,\overline{93}$

128.

- a) On: joule, J tai kalori, cal
- b) On: celsiusaste, °C tai kelvin, K
- c) Ei ole.
- d) On: gramma, g
- e) On: kilogrammaa per kuutiometri, kg/m³

129.

- a) 32 000
- b) −0,0000703
- c) 0,10005

130.

- a) 5 006 000 000
- b) −3 000 000 700 036
- c) 2 000 000 000 000 002
- d) 0,000000036
- e) 43 000 073 000

131.

- a) seitsemänkymmentäkuusimiljardia
seitsemänkymmentäkuusi
- b) biljoona kaksimiljardia
kolmemiljoonaa neljätuhatta
viisisataakuusikymmentä

132.

- a) 0,05 l
- b) 0,233 m
- c) 0,33 metriä
- d) 16 000 g
- e) 2 000 000 J
- f) 4 096 tavua
- g) 131 072 t

133.

- a) $\frac{5}{22} \cdot 10^{-12}$
- b) 227 ns

134.

- a) 1,6 h
- b) 165 min
- c) 5 400 h

135.

- a) 1,21666 ... tuntia
- b) 0,1802777 ... tuntia
- c) 0,263888 ... tuntia
- d) 0,715 tuntia

136. 4 tuntia

137.

- a) 12,7 cm
- b) 7,62 mm
- c) 72,206 m
- d) 128,72 km
- e) 170,28 cm
- f) 100,65 m

138.

- a) 45 cm³
- b) 50 s
- c) 40 ml

139.

- a) 75 mg
- b) 50 s
- c) 1,5 g/dm²

140. 1 000 l

141. 9 mg/ml

142.

- a) 625 Mt/s
- b) USB 3.0:n tiedonsiirtonopeus gigatavuina sekunnissa on $\frac{5}{8}$ Gb/s = 0,625 Gt/s. Elokuvan koko gigatavuina on $13 \text{ Git} = 13 \cdot 2^{30} \approx 13,959 \text{ Gt}$. Jakamalla tämä koko siirtonopeudella saadaan vastaukseksi sekunteina $13,959 \text{ Gt} : 0,625 \text{ Gt/s} \approx 22,3 \text{ sekuntia}$.

143. Kyllä voidaan: hautakiven tilavuus on noin 0,54 m³, joten se painaa noin 1,5 tonnia.

144.

- a) 6 120 s
- b) 12 720 s
- c) 4 500 s
- d) 16 200 s

145.

- a) 77 min
- b) 165 min
- c) 90 min
- d) 105 min

146.

- a) 2 h 5 min
- b) 11 h 7 min
- c) 2 h
- d) 3 h 14 min

147. Jasper-Korianterilla, sillä 5,9 tuumaa = 14,986 cm

148. 4 tunnin kuluttua

150. 125 pianonvirittäjää

151.

a) 10

b) 20

c) 70

d) 9 000

e) 0

f) -10

g) -10

h) 99 990

152.

a) 1

b) 2

c) 1

d) 3

e) 7

f) 2

g) 1

h) 2

153.

a) 1,0

b) 3,7

c) 150

d) 7 000

e) -2,0

f) 0,0055

g) -1 300

h) 0,000050

154. $5\,910\text{ cm}^2$

155. $943\text{ }\mu\text{l}$. (Lapselle annettava Bricanyl-annos on $330\text{ }\mu\text{l}$.)

156. Tarvitaan 6 pakkausta. Mikstuuraa jää käyttämättä $44,3\text{ ml}$.

157.

a) 8

b) Ei määritelty

c) 4

d) -4

e) 10

158. a) 3 b) Ei määritelty c) 2 d) -2 e) 10

159. a) 9 b) 3 c) Ei määritelty d) 2

160. a) 4 b) $\sqrt{15}$ (Ei sievene enempää.) c) 9 d) 5

161. a) 2 b) $\frac{3}{2}$ c) 3 d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

162.

$$\sqrt{8\,100} = \sqrt{81}\sqrt{100} = 9 \cdot 10 = 90.$$

163. Pienen kuution sivu on $\sqrt[3]{64/2} = 2$.

164. a) $9/7$ b) $\sqrt{5}$ c) 4

165. a) $\sqrt{3} + \sqrt{5} - 1$ b) $\sqrt{2}$

166. a) $\sqrt[3]{8} = 2 < \sqrt{16} = 4$ b)
 $\sqrt{8} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ c)
 $\sqrt[3]{64} = 4 > \sqrt[5]{32} = 2$ d)
 $\sqrt[2]{121} = 11 > \sqrt[5]{243} = 3$

167. Korotetaan luvut toiseen potenssiin:
 $(3\sqrt{2})^2 = 3^2 \cdot \sqrt{2}^2 = 9 \cdot 2 = 18$ ja
 $(2\sqrt{3})^2 = 2^2 \cdot \sqrt{3}^2 = 4 \cdot 3 = 12$. Koska
 $3\sqrt{2}$ ja $2\sqrt{3}$ ovat molemmat lukua 1
suurempia, voidaan niiden keskinäinen
suuruusjärjestys lukea neliöiden
suuruusjärjestyksestä. Edellisten
laskujen perusteella $(3\sqrt{2})^2 > (2\sqrt{3})^2$,
joten $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$.

168. Neliöjuuri kasvaa 10-kertaiseksi.
Reaalilukujen a ja $100a$ neliöjuuret ovat
nimitäin $\sqrt{a}$ ja
 $\sqrt{100a} = \sqrt{100}\sqrt{a} = 10\sqrt{a}$. Yleisesti
jos juuret kerrotaan reaaliluvulla k ,
neliöjuuri kasvaa $\sqrt{k}$ -kertaiseksi.

169. a) 17,89 b) 3,87 c) 8,43

170. Suorakaide muodostuu kahdesta
vierekkäisestä neliöstä, joiden pinta-ala
on 5. Tämän neliön sivun pituus on $\sqrt{5}$.
Siis suorakaiteen korkeus on $\sqrt{5}$ ja
leveys $2\sqrt{5}$.

171. $a = \sqrt{\sqrt{83\,521}}$.

172. $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 =$
1 000, $10^4 = 10\,000$. Luvussa 10^n on n
kappaletta nollia. Niinpä
 $\sqrt[6]{1\,000\,000} = 10$ ja
 $\sqrt[10]{10\,000\,000\,000} = 10$.

173.

a) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a ,
koska kaikkien lukujen neliöt ovat
vähintään nolla. Vastaus on aina
epänegatiivinen.

b) Juuri on määritelty vain luvulla $a = 0$.
Muilla a :n arvoilla $-a^2$ on negatiivinen,
jolloin parillinen juuri ei ole määritelty.
Ainoa vastaus, joka voidaan saada, on
siis $\sqrt[4]{0} = 0$.

c) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a ,
koska $(-a)^2$ on aina vähintään nolla.
Vastaus on aina epänegatiivinen.

d) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a ,
koska kaikkien lukujen neliöt ovat
vähintään nolla. Vastaus on aina
ei-positiivinen, koska $\sqrt[4]{a^2}$ on aina
epänegatiivinen.

174.

a) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a .
Vastaus on aina epänegatiivinen.

b) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a .
Vastaus voi olla mikä tahansa luku.

c) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a .
Vastaus on aina ei-positiivinen.

d) Juuri on määritelty kaikilla luvuilla a .
Vastaus on aina ei-positiivinen.

175. a) $a = 8$ b) $a = 27$

176. Esimerkiksi $a = -1$ ja $b = 2$.
Tällöin annetun ehdon vasemman
lausekkeen arvoksi tulee 1, mutta oikea
ei ole reaaliluvuilla määritelty, jolloin se

ei voi olla yhtä suuri vasemman puolen kanssa.

177.

a) Esimerkiksi $a = 27$ ja $b = 3$

b) Esimerkiksi $a = 16$ $b = 4$

178. $9(3 + \sqrt{3}x)$

179. Luku a) 1,41421 b) 1,41421

c) 1,41421 on tietysti $\sqrt{2}$ ja annetut laskut mukailevat neliön halkaisijan suhdetta sivuun. (Tästä lisää geometrian kurssilla.)

180. Esimerkiksi $a = 3$, $b = 27$

181.

a) Esimerkiksi $\sqrt[4]{3^8} = 16$

b) Esimerkiksi $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$

182.

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[60]{42^{11}}$

183.

a) $a^{\frac{1}{3}}$

b) $a^{\frac{1}{6}}$

c) $a^{\frac{1}{n}}$

184.

a) z^2

b) $y^{\frac{1}{2}}$

c) $b^{\frac{2}{5}}$

d) $\ddot{o}^{\frac{1}{4}}$

185.

a) $\sqrt[5]{x}$

b) $\sqrt[3]{x^4}$

c) x^2

d) $\sqrt[4]{x}$

186.

a) 3

b) 2

c) 8

d) 27

187.

a) x

b) $a(1 - a)$

188.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{x^5}}$

c) $\sqrt{x^3}$

d) $\sqrt[7]{x^8}$

189.

a) $2\sqrt{2}$

b) 32

c) $(\sqrt[3]{16})^2$

d) $5(\sqrt[3]{5})^2$

190.

a) $k^{\frac{1}{4}}$

b) $k^{\frac{1}{12}}$

c) $m^{\frac{3}{4}}$

d) $m^{\frac{8}{35}}$

191.

a) 81

b) 350,48

c) 0,037

d) 0,0029

192. 2^x

193. $2^{x^2-y^2}$

194. $\sqrt[x]{x}$

195.

a) $\alpha^{\frac{2}{9}}$

b) $q^{\frac{1}{2}}$

c) $P^{\frac{27}{4}}$

196.

a) $\sqrt[3]{a} - 1$

b) $\frac{1}{2}a$

c) 1

d) $a\sqrt{a}$

197.

a) Kun $x = 1,3$, tornien arvot vakiintuvat lukuun 1,4709 ...; kun $x = 1,7$, tornien arvot kasvavat mielivaltaisen suuriksi; kun $x = 0,05$, tornien arvot vuorottelevat lukujen 0,136 ... ja 0,664 ... välillä.

b) Arvot vakiintuvat, kun

$0,00659 \dots \leq x \leq 1,444667 \dots$ Tämän

voi esittää muodossa $\frac{1}{e^e} \leq x \leq \sqrt[e]{e}$,

missä e on irrationaalivakio nimeltään

Neperin luku. Desimaalikehitelmänä

$e = 2,718281828459 \dots$ (Kyseistä

ratkaisua ei tämän kurssin tiedoilla voida saavuttaa.)i

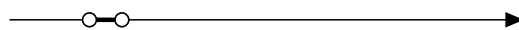
198. $x = \sqrt{2}$

199. Järjestys on $-3, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{\pi}, \pi, 4$

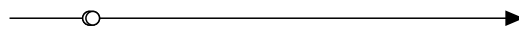
200. a)



b)



c)



201.

a) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$

c) vain $\mathbb{R}$ $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$

c.a) $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$

d) vain $\mathbb{R}$

202.

a) irrationaaliluku

b) rationaaliluku (jakso on 151)

c) irrationaaliluku

203.

a) Ei ole

b) Ei ole

c) On

204.

a) -2

b) 0

c) Sellaista ei ole. Jos nimittäin $a > -3$, niin keskiarvo $\frac{-3+a}{2}$ on vielä lähempänä lukua -3 .

205.

a) 4

b) 7

c) äärettömän monta

206. Vihjeet: a) keskiarvo b) $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku. Käytä painotettua keskiarvoa. c) pyöristäminen d) hyödynnä c-kohtaa e) keskiarvot

a) $\frac{a+b}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}a+b}{\sqrt{2}+1}$

c) Pyöristä pienempi luku ylöspäin sen desimaalin tarkkuudella, jossa lukujen kymmenjärjestelmäesitykset eroavat ensimmäisen kerran.

d) Jos rationaaliluku r on

irrationaalilukujen a ja b välissä, niin $\frac{a+r}{2}$ kelpaa.

e) Jos kahden rationaaliluvun välissä olisi vain äärellinen määrä rationaalilukuja, löytyisi kahden vierekkäisen välistä a-kohdan perusteella vielä yksi. Koska kahden rationaaliluvun välissä on ääretön määrä rationaalilukuja, b-kohdasta seuraa, että niiden välissä on äärettömän monta irrationaalilukua. Irrationaalilukujen välissä olevien rationaali- ja irrationaalilukujen äärettömyys seuraa vastaavasti.

207.

a) tosi

b) epätosi

c) tosi

d) tosi

e) epätosi

f) ehdollisesti tosi (tosi, kun $x = 0$)

g) tosi

h) tosi

i) tosi

j) epätosi

k) ehdollisesti tosi (tosi, kun $y = 2$)

208.

a) esim. $x = x$

b) esim. $x = 1$, tosi vain kun $x = 1$

c) esim. $1 = 2$

209. Ei ole.

$3(-2) - 4 = -10 \neq 11 = 7 - 2(-2)$

210.

- a) kyllä
- b) ei
- c) kyllä
- d) kyllä
- e) ei

211.

- a) kyllä
- b) kyllä
- c) ei
- d) ei
- e) kyllä
- f) kyllä

212.

- a) Pätee.
- b) Ei päde.
- c) Ehdollisesti. (Vain, kun $x = \sqrt[7]{a}$.)

213.

- a) On, sillä $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.
- b) Ei, sillä $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.
- c) On, sillä $(-1)^4 - 3(-1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$.

214.

- a) $3 + 1 = 4$
- b) $2m = 42 \text{ kg}$
- c) $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

d) $p = \pi d$

e) $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ (tai $a \cdot a^{-1} = 1$)

f) $k + (-k) = 0$

g) $k + (-k) = 1$ (Huomaa, että tämä yhtälö on aina epätosi!)

215. Kokeilemalla selviää, että $x = 3$.
Systemaattinen tällaisten yhtälöiden ratkaisutapa ei kuulu lukion oppimäärään.

216. Jos $b = 0$, yhtälö toteutuu kaikilla x :n arvoilla. Jos $b \neq 0$, yhtälö ei toteudu millään x :n arvolla. Periaatteessa kyseessä ei kuitenkaan enää ole ensimmäisen asteen yhtälö, mikäli $a = 0$.

217.

- a) $x = 1$
- b) $x = 4$
- c) $x = 35/7$
- d) $x = -2$
- e) $x = 10/3$
- f) $x = 1/5$
- g) $x = 10$
- h) $x = -1/8$

218.

- a) $x = \frac{1}{7}$
- b) $x = 2$
- c) $x = \frac{54}{5}$

d) Ei ratkaisua

e) $x = \frac{101}{7}$

219.

a) $x = -\frac{5}{4}$

b) $x = \frac{19}{5}$

c) Yhtälö toteutuu kaikilla reaaliluvuilla.

d) $x = 80\,000$

e) $x = 3\,000$

f) Yhtälö ei toteudu millään reaaliluvulla.

220. 6 laitteessa

221.

a) $x = 4\frac{1}{2}$

b) $x = 2\frac{2}{5}$

c) $x = -1\frac{1}{15}$

d) $x = -3\frac{2}{3}$

e) $x = 6$

f) $x = -6\frac{1}{2}$

222.

a) Sarjalippu on kannattavampi. (Liput maksaisivat erikseen ostettuina 48 euroa.)

b) 7,60 euroa

223.

a) $x = 3$

b) $x = \frac{1}{8}$

224.

a) 350 puheminuuttia tai tekstiviestiiä

b) 100 tekstiviestiiä

225.

a) $a = 6$

b) $a = -\frac{2}{5}$

226. 8 min 34 s

227. 15, 17, 19, 21

228.

a) $m = \frac{F}{a}$

b) $F = pA$

c) $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

d) $h = \frac{3V}{\pi r^2}$

229.

a) 14,5 kilometriä

b) 10,4 kilometriä

230. 0,75 mm/tunti

231. 2 hours

232.

desimaaliluku	murtoluku	%	‰
0,1	$\frac{1}{10}$	10	100
-0,8	$-\frac{4}{5}$	-80	-800
0,999	$\frac{999}{1\,000}$	99,9	999
0,00042	$\frac{21}{50\,000}$	0,042	0,42
1,25	$\frac{5}{4}$	125	1 250
-7,5	$-\frac{15}{2}$	-750	-7 500

233.

perusarvo	$\pm p \%$	lauseke
a	$+10 \%$	$1,10a$
b	-24%	$0,76b$
5 000 €	-1%	$0,99 \cdot 5\,000 \text{ €}$
x	-58%	$0,42x$
3 m	$+2\,500 \%$	$26 \cdot 3 \text{ m}$
-7,5	$-99,7 \%$	$0,003 \cdot (-7,5)$

Huom.: $0,42x$ voidaan tulkita myös niin, että perusarvo on $0,42$ ja x on prosenttikerroin (muotoa $1 \pm \frac{p}{100}$). Sama tulkinnanvaraisuus koskee viimeisen rivin lauseketta $0,003 \cdot (-7,5)$

234.

- a) 67,5
- b) $0,045b$
- c) $0,153b$
- d) $1,52b$
- e) $35,5b$

235.

- a) 20 %
- b) 150 %
- c) 11 428,6 %
- d) 70,6 %
- e) 240 %
- f) 11 328,6 %

236. 13 % sadasta eurosta on 13 euroa – ei 11,50 euroa, niin kuin kuitissa todetaan. Arvonlisävero lasketaan

suhteessa verottomaan hintaan, ei lopulliseen myyntihintaan.

237. 168,75 euroa

238. 1 644,63 euroa

239.

a) Suomen Kommunistisen Puolueen, 2 812 ääntä

b) Köyhien asialla -puolueen, 46 %

240.

a) Kannatus kasvoi 0,2 prosenttiyksikköä.

b) Kannatus kasvoi 40 prosenttia.

241.

- a) 95,4 %
- b) 104,8 %
- c) 4,62 %
- d) 4,85 %

242. 200 %

243. 22 %

244. Kirjan veroton hinta on 24,77 euroa.

245. 2 tonnia

246.

a) Uusi hinta on 9,60 euroa.

b) Vaadittava alennus on 17 %.

247. Hän saa 999 prosenttia liian suuren annoksen.

248. $\approx 83,3 \%$

249. 16%

250.

a) $95 : 1$

b) Olkoon a valtion X tai Y alkuperäinen populaatio (sama molemmissa), jolloin saaren alkuperäinen populaatio on $2a$.

Uusi asukasmäärä on $0,01 \cdot a + 0,95 \cdot a$.

Laskemalla vanhan ja uuden

saaripopulaation erotus verrattuna

alkuperäiseen saadaan:

$$\frac{2a - (0,01 \cdot a + 0,95 \cdot a)}{2a} = \frac{2a - 0,01a - 0,95a}{2a} = \frac{1,04a}{2a} = \frac{1,04}{2} = 0,52 = 52 \%. \text{ (Voi toki}$$

myös laskea vain uuden ja vanhan suhteen ja päätellä siitä tuloksen.)

251. 50%

252.

a) 381%

b) 29

253. $18,7 \%$

254. Lipputulot vähenivät 1 prosentilla.

255. Valmiista liuoksesta 10% on

DEPC:tä ja 90% laimennettua etanolia, josta 94% on etanolia ja 6% vettä. Vettä on siis $0,06 \cdot 0,90 \cdot 500 \text{ ml} = 27 \text{ ml}$.

256. Likiarvo on $1,75$ ja $\sqrt{3} = 1,732 \dots$ Likiarvo poikkeaa noin $1,04 \%$.

257. $5,6 \%$

258. Pelkkä ” 40 prosentin alennus” tarkoittaa, että hinnat on kerrottu

prosenttikertoimella $1 - \frac{40}{100} = 0,6$. Jos kyseessä on negatiivinen alennus,

prosenttikerroin on

$$1 - \frac{-40}{100} = 1 + \frac{40}{100} = 1,4, \text{ eli hintoja on kasvatettu!!!!11}$$

259. Luolassa asuu 33 aikuista.

260.

a) $x = \pm 2$

b) $x = 3$

c) $x = -1$

d) $x = \pm \sqrt{3}$

e) $x = -5$

f) $x = 3\sqrt[3]{3}$

g) $x = \sqrt[5]{10}$

h) $x = \pm 1$

261.

a) $x = \pm \sqrt{5}$

b) $x = 1$

c) $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $x = \pm 2$

e) ei ratkaisua

262.

a) $x = \pm \sqrt[4]{8}$

b) $x = -\sqrt[3]{\frac{7}{2}}$

c) $x = \pm \sqrt{14}$

d) $x = \pm \sqrt[4]{\frac{870}{151}}$

263.

a) $x = \frac{23}{79}$

b) $x = -\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$

c) ei ratkaisua

264. $x = \frac{20}{7}$

265. 5,46 %

266. 7,1 %

267. Pienen kappan sivun pituus 12,6 cm, ison kappan 17,1 cm

268. 1,5 %

269. Noin vuonna 2020

270. 5,56 μm

271.

a) Kuusi kertaa

b) Jokaisen kuntoluokan pudotuksen jälkeen pyöristämällä kuolemia voikin olla kuuden sijaan seitsemän ennen kuin kunto on pudonnut alle 50 prosentin.

272.

a) $10\sqrt[3]{5} \approx 17 \text{ m}$

b) $961\,500\sqrt[3]{25} \approx 2\,800\,000 \text{ kg}$

c) $2\,115\,300\sqrt[3]{25} \approx 6\,200\,000 \text{ kg}$

273. 84 cm ja 47 cm

274. Ei mahdu. Suurin mahdollinen levy, joka mahtuu ovesta sisään on Pythagoraan lauseen perusteella leveydeltään $\sqrt{90^2 + 205^2} \approx 224 \text{ cm}$.

275. $\frac{4}{3}x^2 = 100$, joten $x = \sqrt{\frac{300}{4}}$.

Hypotenuusa: $\sqrt{x^2 + (\frac{4}{3}x)^2} = \sqrt{\frac{300}{4} + \frac{16}{9} \cdot \frac{300}{4}} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{300}{4}} \approx 14,4$.

276. $k^{\frac{5}{3}} = 1/32$

277.

a) 625 m^2

b) 796 m^2

278. Muuttujan arvoilla 0 ja 1

279. Särmän pituus on 4.

280.

a) Santeri-soturille tasolla 3, Valtteri-velholle tasolla 4

b) Santeri-soturille tasolla 5, Valtteri-velholle tasolla 5

c) Santeri-soturille tasolla 7, Valtteri-velholle tasolla 6

281.

a) $x = \frac{1}{3}$

b) $y = \frac{1}{4}$

c) $x = \frac{7}{2}$

d) $x = \frac{3}{7}$

282.

a) Eivät ole kumpaakaan.

b) Kääntäen verrannolliset

c) Suoraan verrannolliset

d) Kääntäen verrannolliset

e) Suoraan verrannolliset

283. 30 min

284.

a) $\frac{x}{m} = c$ tai $x = cm$.

b) $xt = c$ tai $x = \frac{c}{t}$.

c) $\frac{Fr^2}{m_1+m_2} = c$ tai $F = c \frac{m_1+m_2}{r^2}$

285. Hiukset kasvavat vuodessa noin 18 senttimetriä.

286. Viiden minuutin tarkkuudella 20 minuuttia.

287.

a) 36

b) 4

288. Munia riittäisi viiteen, sokeria kuuteen ja jauhoja seitsemään kokonaiseen kakkuun. Kaikki aineksia tarvitaan, joten Timo voi leipoa vain viisi kakkua.

289.

a) Suoraan verrannollisia

b) Eivät kumpaakaan, sillä niiden tulo eikä osamäärä ei ole vakio.

c) Kääntäen verrannollisia

d) Kääntäen ja suoraan verrannollisia, sillä niiden tulo ja osamäärä ovat vakioita

290. Puoli neljältä

291. Noin 643 minuuttia eli 10 h 43 min

292.

a) $\frac{32}{5}$

b) 10

293. Seitsemällä opiskelijalla työ valmistuu noin 14 tunnissa. Opiskelijoita tarvitaan 12. Silloin työ valmistuu 8 tunnissa ja 20 minuutissa.

294. Noin 46 joulea

295.

a) vähenee 23% (nopeammalla veneellä aika on noin 58 min)

b) vähenee 31% (aikaa kuluu noin 52 min)

296.

a) Kasvoi 45 %.

b) Arvo laski noin 6 %.

297.

a) 2 dl maitoa, 0,8 dl sokeria, 6 dl vehnäjauhoja

b) 24 pullaa

298.

a) Yhdeksän neliökilometriä

b) Viiden päivän päästä

299. Riittäisi, sillä lankakerä sisältää noin 60 000 km lankaa.

300. 40 tuntia

301. Sadasta vieraasta 20 ei syönyt karkkeja.

302.

a) Kolme tuntia

b) 2 500 paria kenkiä

303. $\sqrt{\frac{100^3}{6}} \approx 68$

304. Noin 10 sekuntia

305. Funktion f nollakohdat ovat x -koordinaatiston kohdissa -1 , 0 ja 1 . Funktio saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja.

306. Funktion f nollakohdat ovat suunnilleen x :n pisteissä: $-1,5$, $-0,5$, $0,5$ ja $1,5$. Funktio saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja.

307. $f(0) = -1$, $f(1) = 0$, $f(x) = 3$ kun $x = -2$ tai $x = 2$, ja $f(x) = 0$, kun $x = -1$ tai $x = 1$

309.

a) $f(-2) = 3$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 3$ ja $f(2) = 7$

b) $f(-2) = 12$, $f(-1) = 3$, $f(0) = 0$, $f(1)$ ja $f(2) = 12$

c) $f(-2) = 6$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 2$, $f(1) = 5$ ja $f(2) = 14$

310. $\mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{2}\}$ eli reaalityyppiset luvut pois lukien rationaaliluku $\frac{5}{2}$.

311. $x = 1$

312.

a) pisteessä $(0,4)$

b) pisteessä $(3, -2)$

c) pisteessä $(-2,8)$ Funktiolla on nollakohta t :n arvolla 2 , eli pisteessä $(2,0)$.

313.

a) 20 euroa ($f(0) = 20$)

b) 7,5 euroa

c) Kuuden viikon jälkeen. (Kun $f(x) = 5$, $x = 6$)

d) Kahdeksan viikon jälkeen. (Kun $f(x) = 0$, $x = 8$)

314. $x = \frac{9}{8}$

315.

a) $x \geq -6$

b) $x > -1$ $x \geq \frac{1}{2}$

316.

a.a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R} \setminus 0$

c) $\mathbb{R}^+$ (mukaan lukien nolla)

d) $\mathbb{R}$

317. $p(v) = 7 - 3v/4$. Kokelas voi antaa korkeintaan 9 väärää vastausta menemättä nollille.

318. $A(x) = x(x + 2) = x^2 + 2x$

a) 0 m

b) 35 m

c) 440 m

d) $x \geq 0$ (Pinta-ala on epänegatiivinen.)

319.

a) $s = -\frac{3}{19}$

b) $s = \frac{1}{38}$

Jos $s = 1$, niin $f(6) = 3$ ja $g(3) = -\frac{11}{2}$

320.

a) $-2x - 6$

b) $-2x + 3$

c) $-6x$

d) $-6x$

321.

a) $\frac{11}{5}$

b) $\frac{11}{5}$

c) $\frac{11}{5}$

Vihje: Voit supistaa.

$$z(x) = \frac{x^2 + \frac{1}{2}x}{x} - x + 5 =$$

$$\frac{x(x + \frac{1}{2})}{x} - x + 5 = \frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{5}$$

322. $a = 68$

323.

a) $\frac{11}{3}$

b) ei määritelty

c) ei määritelty

d) $\frac{-1}{2}$

324.

a) 4

b) $3\sqrt[3]{2} + 12$

c) ei määritelty (nollalla ei voi jakaa)

d) $\frac{-9}{2}$

325.

a) $\frac{7}{2}$

b) $a + \frac{3}{a}$

c) $2a + \frac{3}{2}a$

d) $2x^2 + \frac{6}{x^2}$

e) $\frac{x^2+8}{x+1}$

326.

a) $x = 1$

b) kaikilla $x \in \mathbb{R}$

c) ei ratkaisuja

d) $x = -1$

327.

a) $\frac{4}{25}$

b) 1

c) $-\frac{7}{5}$

d) $2x/5 - 3$

e) $2x/5 - 3/5$

328.

a) 1

b) 0

329.

a) $f(a) > f(a + 2)$

b) $f(-a) < f(a)$

330.

a) $f(x) = \frac{2}{3}x$

b) $f(x) = x$

c) $f(x) = -x$

d) $f(x) = |x|$

331.

- a) 1
- b) 5
- c) -1
- d) -2

332.

- a) $-\frac{1}{8}$
- b) -32
- c) -32
- d) $-\frac{1}{8}$

333.

- a) 1
- b) $\frac{1}{8}$
- c) -27

334.

- a) Ei saa.
- b) Saa.
- c) Saa.
- d) Saa.
- e) Ei saa.

335. Eivät saa.

336.

- a) 3
- b) 2
- c) 7
- d) 5

e) 1

f) 4

g) 6

337.

- a) 2
- b) 5
- c) 11

338. Ratkaisu on kokonaislukujen 3 ja 4 välissä.

339. Noin 4,5 sekunnin päästä

340.

- a) $\frac{1}{2}x^2$
- b) 50
- c) 12

341. Kolmion pinta-ala on $25\sqrt{3} \approx 43,3$.

342.

- a) Noin 25 minuuttia
- b) Noin 6 tuntia ja 40 minuuttia
- c) Noin 14 sekuntia

343. 16-kertaiseksi

344. Säteilyn intensiteetti Maan pinnalla vähenee noin 31 prosenttia.

345.

- a) 1
- b) 64
- c) 2

346.

- a) 1
- b) $\frac{1}{256}$
- c) $\frac{1}{2}$

347.

- a) 3
- b) -2
- c) Ei ratkaisua.

348.

- a) 8
- b) 1 024
- c) 1 048 576

349. Seitsemän taitoksen jälkeen, jolloin kerroksia on 2 187

350. Noin 1 300

351. Ajanhetkellä $t = 3$

352. muutetaan kerroin: $f(t) = 5 \cdot 2^t$

353. $f(x) = 12 \cdot 4^x$

354. Ratkaisu on lukujen 2 ja 3 välissä.

355. Ei voi, sillä eksponenttifunktiot ovat joko kasvavia tai väheneviä.

356. Kahdeksan tunnin kuluttua

357. Funktio on $f(t) = 200 \cdot 1,5^t$, ja kymmenen vuoden kuluttua kokoelmassa on yhteensä noin 11 000 levyä.

358. Ajanhetkellä $t = 8$.

359. Vähintään 4 kesää. (Voidaan muodostaa perunasadon määrää kuvaava lauseke $S(n) = 0,4 \cdot 6^n \cdot 10$, missä n kuvaa viljelyvuosien määrää. Halutaan selvittää, millä n :n arvolla $S(n) \geq 1\,000$. Koska $6 \geq 1$, perunasatoa kuvaava funktio on kasvava – riittää siis ratkaista n yhtälöstä $S(n) = 1\,000$. Saadaan $6^n = 250$ ja kokeilemalla nähdään, että $6^3 = 216$ ja $6^4 = 1296$. Kun $n \geq 4$, $S(n) \geq 1000$.)

360. Esimerkiksi kohdassa $x = \frac{1}{2}$

361. 17 päivän kuluttua

362. $\frac{1}{6^{10}} \approx 0,000000017$

363. Kääretorttua on jäljellä noin yksi kilogramma.

364. Kohdassa $x = 0$

365. Kohdassa $x = 0$

366. Viisi merkkiä riittää. Tällöin erilaisia yhdistelmiä on 20 511 149.

367.

a) Noin kahdeksan kilometrin päässä

b) Noin seitsemänkymmenen metrin päässä

368. 73 200 (pyöristämättä 73 237,5)

369. Luvulla on suuruus, ja niitä esitetään numeroiden eli numeromerkkien avulla. Kymmenjärjestelmässä käytetyt numeromerkit ovat 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ja 9. (Huomaa myös vakiintuneet

nimitykset kuten postinumero,
puhelinnumero, ...)

370. Kahden luvun a ja b vähennyslasku (erotus) $a - b$ määritellään summana $a + (-b)$, eli a :han on lisätty b :n vastaluku. Jakolasku (osamäärä) $\frac{a}{b}$ määritellään tulona $a \cdot \frac{1}{b}$, eli a on kerrottu b :n käänteisluvulla.

371. Kaikilla luvuilla x pätee $0 \cdot x = 0$, eli mikä tahansa luku kerrottuna nollalla on aina nolla. Kuitenkin, jos nollalla voisi jakaa (eli sille olisi määritelty käänteisluku $0^{-1} = \frac{1}{0}$), olisi voimassa $0 \cdot \frac{1}{0} = 1$, mikä ei kuitenkaan samanaikaisesti voi pitää paikkansa sen kanssa, että, kun mikä tahansa luku kerrotaan nollalla, saadaan tuloksi nolla.

372. Laventaminen muuttaa lausekkeen (tavallisesti rationaaliluvun) eri muotoon, mutta pitää sen suuruuden ennallaan. Kertominen on laskutoimitus, joka voi muuttaa luvun suuruutta. Esimerkiksi $\frac{3}{4}$ lavennettuna viidellä on $\frac{15}{20}$ mutta sama luku kerrottuna viidellä on $\frac{15}{4}$.

373. Alkuluku on luonnollinen luku, jota ei voi esittää kahden pienemmän luonnollisen tulona. Pienin alkuluku on 2.

374. Alkutekijäkehiteelmä on luvun esitys alkulukujen tulona, esimerkiksi $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$ tai potenssien avulla kirjoitettuna $45 = 3^2 \cdot 5$.

375. Koska $x^2 \geq 0$ kaikilla

reaaliluvuilla x , eli ei ole olemassa reaalilukua, joka kerrottuna itsellään tuottaisi negatiivisen luvun.

376. Koska käyttämällä potenssisääntöjä saadaan: $x^0 = x^{1-1} = \frac{x^1}{x^1} = \frac{x}{x} = 1$, mikä pätee kaikille luvuille paitsi $x = 0$. Tämä on ainut tapa määritellä nollan potenssi niin, että se ei olisi ristiriidassa muiden potenssin ominaisuuksien (potenssisääntöjen) kanssa. (Toinen variantti:

$x = x^1 = x^{0+1} = x^0 \cdot x^1 = x^0 \cdot x$, mistä tulos seuraa.)

377. Johdannaissuure on suure, joka voidaan ilmaista (SI-järjestelmän) perussuureiden avulla niiden tuloina tai osamäärinä.

378. Jälkimmäisessä esityksessä on kolme merkitsevää numeroa – ensimmäisessä vain kaksi. Jos kyseessä on mittaustulos, jälkimmäistä lukua voidaan pitää tarkempänä.

379. Kyseessä on rationaaliluku, sillä kaikkien rationaalilukujen (ja ainoastaan rationaalilukujen) desimaaliesitys sisältää äärettömästi toistuvaan jaksoon.

380. Positiivisilla reaaliluvuilla x pätee $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$. Tämä mahdollistaa potenssisääntöjen käyttämisen juurilausekkeille.

381. e) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

382. b) $(b - 2a)(c + 3)$

383. d) $\frac{59}{8}$

384. e) $\frac{9}{4}$

385. c) 12

386. b) $3,4 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

(standardimuodossa kymmenen potenssin kertoimena on luku itseisarvoltaan nollan ja kymmenen väliltä)

387. e) Viisi

388. c) $-78,24$ (tuhannesosia pienempiä desimaaleja ei huomioida lainkaan; pyöristys nolnaan päin)

389. d) $2\,000 \text{ cm}^3$

390. b) 17

391. b) $2\sqrt{2}$

392. Muuttujan arvoa (tai muuttujien arvoja), jolla yhtälö on tosi

393. Kyse on absoluuttisista, ei suhteellisista muutoksista. Jos lisätään jokin luku ja sitten vähennetään sama luku, laskutoimitukset kumoavat aina toisensa. Sen sijaan jos mielivaltaista lukua kasvatetaan suhteellisella osuudella, kasvun suuruus riippuu alkuperäisestä luvusta. Kun kasvatetusta luvusta otetaan sama suhteellinen osa pois, kyseinen osa onkin nyt suurempi, joten päädytään alkuperäistä pienempään lukuun.

394. c) ei koskaan tosi

395. b) joskus tosi

396. a) aina tosi

397. b) Aina ja millä tahansa luvulla

398. a) Aina muttei nollalla (nollalla kertominen kadottaa informaatiota, eikä alkuperäistä yhtälöä enää saa ratkaistua)

399. e) Muuttuja y kasvaa myös – ja samassa suhteessa.

400. b) x ja z ovat kääntäen verrannolliset.

401. e) ei mikään mainituista vaihtoehtoista

402. a) nolla

403. c) reaalitylukujen osittelulakia

404. b) $0,97a$

405. Määrittelyjoukko on, kuten nimikin sanoo, joukko. Se siis esittää kaikki mahdolliset luvut (tai muunlaiset syötteet), jotka funktion muuttuja voi saada arvokseen, niin että funktion arvon laskeminen on mielekästä.

Määrittelyehto kertoo määrittelyjoukon epäsuorasti antamalla jonkinlaisen ehdon muuttujalle, yleensä epäyhtälön muodossa. Esimerkiksi, jos määrittelyjoukko olisi $\mathbb{R}_+$ (positiiviset reaalityluvut), niin sitä vastaava määrittelyehto olisi $x > 0$, missä x on kyseisen funktion muuttuja.

406. Maalityjoukko voi olla laajempi kuin arvoityjoukko, mutta sisältää aina arvoityjoukon kokonaisuudessaan. Arvoityjoukko on niiden alkioiden (yleensä lukujen) joukko, jotka funktio voi arvokseen saada. Maalityjoukko koostuu alkiosta, jotka funktio *saattaa* saada

arvokseen. Maalijoukko ei voi päätellä funktion mahdollisesta lausekkeesta, mutta arvojoukon voi. (Maalijoukon tärkeys ei tule kunnolla esille lukion matematiikassa – ei huolta, vaikkei sen merkitys kunnolla aukeaisikaan. Arvojoukko sen sijaan tulee ymmärtää, ja sitä käsitellään lisää tulevilla kursseilla.)

407. e) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

408. d) $y \geq 0$

409.

a) 48

b) $\frac{1}{2}$

c) 6

d) -9

410. $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

411.

a) $\frac{47}{50}$

b) $-\frac{11}{3}$

c) $\frac{3a}{2b}$

d) $\frac{e}{b} - b$

412.

a) 0,46

b) 0,636363 ...

413.

a) $\frac{3\,651}{50}$

b) $\frac{171\,217}{9\,999}$

c) $\frac{64}{75}$

d) $-\frac{3\,526}{495}$

414.

a) $\frac{11}{4}$

b) $\frac{4}{13}$

c) $-\frac{79}{11}$

d) $-\frac{4}{1}$

415.

a) ab^2

b) $3a^2b$

c) $a^6b^4c^2$

d) $b^2 - c^2$

e) 49

416.

a) 75 min

b) 155 cm

c) 10 m

417.

a) $2,00 \cdot 10^1$

b) $3,13 \cdot 10^{-5}$

c) $8,00 \cdot 10^{10}$

418.

a) $6\sqrt{3}$

b) -4

c) $\sqrt{b}$

d) $\sqrt{abc}$

419.

a) 5

b) 7

c) 5

420.

a) $3\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}$

c) 1

d) a

e) a^3

421.

a) $a^{-\frac{5}{7}}$

b) $2^{\frac{1}{4}}$

422.

a) 7

b) $\frac{29}{7}$

c) $x = 8$

d) $x = 6$

e) $f = -2$

f) Ei ratkaisua

g) Kaikki muuttujan x arvot

h) $\frac{20}{9}$

423. $r = \sqrt{\pi}$

424.

a) 200 % suurempi

b) 80 % pienempi

c) 75 %

425. 17 %

426. 6 tunnin kuluttua

427.

a) 5 300

b) 28 000

428. 11

429. 21

430.

a) $x = -6$

b) $x = -\frac{5}{9}$

431. 3,5 m

432. $0 \leq x < 2$

433. x :n arvolla 1

434. $g(x) = 0$, kun $x = -2\frac{3}{4}$ tai $x = \frac{3}{4}$;
 -3 ; $g(x) = -2$, kun $x = -2$ tai $x = 0$;
 $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\frac{3}{4}$

435.

a) $-\frac{1}{2}$

b) Ei määritelty, koska nollalla ei voi jakaa

c) 8

d) -4

e) $-\frac{1}{2}$

436.

a) 157 360

b) 10

c) Saa!

437.

a) 371 g

b) 862 g

438.

a) Luvun 341 pystyy kirjoittamaan kahden pienemmän luonnollisen luvun tulona, $341 = 11 \cdot 31$, joten kyseessä ei ole alkuluku. (Kyseinen alkulukukehiteelmä selviää kokeilemalla rohkeasti jakaa 341 eri luvuilla.)

b) Esim. $1 = 2$ tai $x = x + 1$

c) Vastaukseksi käy mikä tahansa irrationaaliluku käy vastaukseksi, esim. π tai $\sqrt{2}$.

d) Vastaukseksi käy jokin seuraavista:

d.a) Nollalla jakaminen (esim. $3/0$ tai $0/0$) – nollalla ei ole olemassa käänteislukua. Käänteisluvun määritelmän perusteella olisi $0 \cdot 0^{-1} = 1$, mutta tämä on ristiriidassa sen kanssa, että mikä tahansa luku kerrottuna nollalla pitäisi olla nolla.

d.b) Nollan korottaminen nollanteen potenssiin (esim. 0^0) – palautuu nollalla jakamisen ongelmaan, koska potenssääntöjen mukaan pitäisi olla $0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1} = \frac{0}{0}$.

d.c) Parillisen juuren ottaminen negatiivisesta luvusta – ei ole olemassa

reaalilukua, joka kerrottuna itsellään parillista määrää kertoja (ts. korotettuna parilliseen potenssiin) tuottaisi tulona negatiivisen luvun. Nollan kokonaislukupotenssit ovat nolliä, ja sekä negatiivinen että positiivinen luku kerrottuna itsellään tuottavat positiivisen luvun, ei milloinkaan negatiivista.

d.d) Nollan korottaminen negatiiviseen murtopotenssiin – aiheuttaa ongelmia, koska negatiivisesta eksponentista seuraa nollan potenssin siirtyminen nimittäjään, joka taas on ongelmallista nollalla jakamisen vuoksi.

e) Kaksi ratkaisua

439.

a) $9 \sqrt[12]{3}$

b) -2

c) 0

440.

a) $x = \frac{5}{3}$

b) $\frac{7}{18}$

441.

a) 19 %

b) 20 %

442.

a) Tarjouspaketti on kannattavampi kuin yksittäisten lounaiden osto, kun lounaita on kuukaudessa vähintään 22.

b) 16 %

443. Maidosta riittää 2,5-kertaiseen annokseen (50 pullaa), eli myös sokeria tarvitaan 2,5-kertainen määrä:
 $2 \cdot 2,5 \text{ dl} = 5 \text{ dl}$. Tiheys $1,59 \text{ g cm}^{-3}$ ilmaistuna desilitrojen avulla on 159 g/dl .
 Tarvittava sokerin määrä on siis
 $5 \text{ dl} \cdot 159 \text{ g/dl} = 795 \text{ g}$. Kilogramman pakkauksesta jää siis jäljelle
 $1\,000 \text{ g} - 795 \text{ g} = 205 \text{ g}$.

444.

- a) $x = 35$
- b) Nollakohdat ovat $x = -0,5$ ja $x = 2$.
 Funktio saa arvon 3, kun $x = -1$ tai $x = 2,5$. Funktion pienin arvo on kuvaajan perusteella noin $-3,125$.

445. 81π

446. Näyttö on suorakulmion muotoinen, $1\,920$ pikseliä leveä ja $1\,080$ pikseliä korkea. Kuvasuhteeksi saadaan $16 : 9$ supistamalla pituuksien osamäärä. Näytön lävistäjän pituus on 50 tuumaa eli 127 senttimetriä. Lävistäjä toimii hypotenuusana suorakulmaiselle kolmiolle, jonka kateettien suhde on mainittu $16 : 9$. Pythagoraan lauseella saadaan yhtälö $127^2 = (16a)^2 + (9a)^2$, missä a on näytön leveyden ja korkeuden pienin yhteinen tekijä (senttimetreissä). Yhtälö saadaan potenssit laskemalla muotoon $16\,129 = 256a^2 + 81a^2$, mistä edelleen $337a^2 = 16\,129$.
 Potenssiyhtälön positiivisena ratkaisuna (koska pituudet ovat positiivisia) saadaan

$$a = \sqrt{\frac{16\,129}{337}} \text{ cm}.$$

Näytön kokonaispinta-ala on tällöin
 $16a \cdot 9a = 144a^2 = 144 \cdot \left(\sqrt{\frac{16\,129}{337}} \text{ cm}\right)^2 = 144 \cdot \frac{16\,129}{337} \text{ cm}^2 \approx 6\,891,92 \text{ cm}^2$. Näytöllä on pikseleitä kokonaisuudessaan
 $1\,920 \cdot 1\,080 = 2\,073\,600$ (eli reilut kaksi megapikseliä). Neliösenttimetriä kohden pikseleitä on näytöllä
 $2\,073\,600 / 6\,891,92 \approx 301$. (Pikseli on perustavanlaatuinen kuva-alkio, ja niitä ei voi hajottaa osiin. Vain luonnollinen luku kelpaa vastaukseksi.)

447.

a) Määritellään relaatio esimerkiksi ” x on y :n äiti” siten, että x ja y ovat mielivaltaisia ihmisiä. Kyseessä ei ole tällöin funktio monestakin syystä (yksi riittää): 1) muuttuja x voidaan yhdistää useaan arvoon (eli yhdellä äidillä voi olla monta lasta) – funktion arvojen sen sijaan pitäisi olla yksikäsitteisiä 2) jokainen funktion määrittelyjoukon alkio pitää voida liittää funktion arvoon – sen sijaan kaikki ihmiset eivät ole äitejä.

b) Määrittelyjoukoksi sopii $0,1$. Tällöin $f(0) = 1$ ja toisaalta $f(1) = 0$, eli nolla ja yksi kuvautuvat toisikseen.

448.

- a) Esim. $x = 1$, joka on tosi vain, kun $x = 1$
- b) Vastaukseksi käy mikä tahansa negatiivinen kokonaisluku, esimerkiksi

−42, ja nolla. (Opettaja kertokoon, käyttääkö hän nollaa luonnollisena lukuna vai ei.)

c) Vastaukseksi käyvät kaikki reaaliset ei-irrationaaliluvut, esimerkiksi −3, 0 tai $\frac{99}{98}$. (Ei siis π , $\sqrt{2}$ jne.)

d) 61 on alkuluku, sillä se ei ole jaollinen millään sitä pienemmällä luonnollisella luvulla. (Tai: sitä ei voi kirjoittaa kahden luonnollisen luvun tulona, joista kumpikaan ei ole 1 tai 61.)

e) Koska (esimerkiksi)
 $2 - 3 = -1 \neq 1 = 3 - 2$, vähennyslasku ei ole vaihdannainen.

449.

a) $\frac{2 \cdot 7,5 + 10}{3} \approx 8$ ($\frac{7,5 + 10}{2}$ on väärin!)

b)

FI1	FI2
8	7
9	6
10	5

c) 8, 9 tai 10

450.

a) $-5\frac{2}{9}$

b) $z = 1 + \sqrt{a}$, ja ehdon $a \geq 0$ täytyy päteä, koska reaalityyppiset luvut ei voi ottaa neliöjuurta.

451. Noin 18 %.

452. 306 metriä

453.

a) $a^2 + 5$

b) x

c) -1

d) $\frac{1}{8a^2}$

454. Ei mahdu. Suurin mahdollinen levy, joka mahtuu ovesta sisään on Pythagoraan lauseen perusteella leveydeltään $\sqrt{90^2 + 205^2} \approx 224$ cm.

455.

a) noin 50 700 asukasta vuodessa

b) 2,78 prosenttia

c) $1,52 \cdot 10^6 \cdot 1,0278^{n-2000}$

456. 2,3 senttimetriä

457.

a) $t = 2$

b) $t = \pm \frac{3}{2}$

458.

a) $124 = 2^2 \cdot 31$

b) Esimerkiksi $(8/4)/2 = 2/2 = 1$, mutta toisaalta $8/(4/2) = 8/2 = 4$, joten jakolasku ei ole liitännäinen. (Vastauksesta täytyy selvästi käydä ilmi, että opiskelija ymmärtää, mitä laskutoimituksen liitännäisyys tarkoittaa.)

c) Yksi piste per alakohta:

c.a) Kukaan ei ole itsensä sisar, joten relaatio ei ole refleksiivinen.

c.b) Sisaruus on aina molemminpuolista (jos a on b :n sisar, niin myös b on a :n sisar), joten relaatio on symmetrinen.

c.c) Jokainen mielivaltaisen henkilön sisar on myös muiden kyseisen henkilön sisarten sisar (sisaruus ”välittyy eteenpäin”), joten relaatio on transitiivinen.

459.

a) x

b) $x^2 + 2x + 1$

c) a

460.

a) Kaksikymmentä aitiaa

b) 90 km/h

461.

a) $a = 0$

b) Kummankin kateetin pituus on $\sqrt{8}$ pituusyksikköä. (ratkaistaan yhtälö $x^2 + x^2 = 4^2$, missä x on kateetin pituus)

c) Ei ratkaisua, koska nollalla jakamisen välttämiseksi t ei voi saada arvoa 1.

462. 6,4 metriä; 4. pompun jälkeen

463. 10 kertaa; yleisesti alennusprosentti voidaan laskea kaavalla $1 - \frac{46}{5n}$, missä n on parturikäyntien määrä vuodessa

464.

a) 1,02 kg

b) 10,2 %

465. 330 ppb

466. $a \mid b$ tarkoittaa, että on olemassa kokonaisluku k siten, että $b = a \cdot k$. $a \mid c$ taas tarkoittaa, että on olemassa kokonaisluku l siten, että $c = a \cdot l$. Laskemalla yhtälöt puolittain yhteen saadaan $b + c = a \cdot k + a \cdot l$, josta osittelulla $b + c = a \cdot (k + l)$. Koska $k + l$ on myös kokonaisluku, jaollisuuden määritelmän mukaan a jakaa summan $b + c$, eli $a \mid b + c$.

467. Funktio on määritelty, kun lausekkeen nimittäjä on erisuuri kuin nolla. Tutkitaan, millä muuttujan arvoilla nimittäjään tulee nolla:

$4x^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Funktion määrittelyjoukko on siis $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right\}$ eli reaalilukujen joukko, josta on poistettu $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Arvojoukon selvittäminen aloitetaan ratkaisemalla x yhtälöstä $\frac{3}{4x^3-2} = a$, missä a esittää mahdollisia arvoja, joita funktio voi saada:

$\frac{3}{4x^3-2} = a \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{\frac{3}{a}+2}{4}}$. Lauseke on hyvin määritelty, kun nollalla ei jaeta – a ei siis voi olla nolla. (Kuutiojuuren sisällä voi olla mikä tahansa reaaliluku, joten se ei rajoita mitään.) Funktion arvojoukko koostuu siis kaikista nollasta poikkeavista reaaliluvuista: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

468.

a) Esimerkiksi $x = x$, $1 = 1$, $\sqrt{16} = 4$, ...

b) $\frac{1}{7}$

c) Kaikki reaalityluvut ovat joko negatiivisia, positiivisia tai nolla. Nollan potenssit ovat nollia, ja mikä tahansa positiivinen tai negatiivinen luku korotettuna parilliseen potenssiin tuottaa positiivisen luvun. Koska mistään reaalityluvusta ei saada parilliseen potenssiin korottomalla negatiivista, ei myöskään parillinen juuri ole määritelty negatiivisille luvuille.

d) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

e) $1 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$

f) $81 = 3^4$ (tai $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$)

469.

a) $\frac{2}{7}$

b) $\mathbb{R}_+$ eli positiivisten reaalitylukujen joukko. (Nolla ei kuulu kyseiseen määrittelyjoukkoon.)

c) 1,09 ja $-1,09$

470.

a) -1

b) $10^{1\,001}$

c) $4x$

471. 228 miljardia tonnia
($2,28 \cdot 10^{14}$ kg)

472.

a) 100 %

b) 0,96 %

473. Kuukausikortin hinnaksi tulee 84,00 euroa. Kuukausikortti on edullisempi, jos käy vähintään 13 kertaa viikossa (12 käynnillä hinta on sama.)

474.

a) noin 16 kertaa suurempi

b) noin 256 kertaa arvokkaampi

475.

a) 1,00 g

b) Seitsemän päivän kuluttua

476. Merkitään tuotteen alkuperäistä hintaa (esim.) a :lla. (Hinta on lisäksi erisuuri kuin nolla.) Ratkaistava yhtälö on prosentteina

$$(1 - \frac{p}{100})(1 + \frac{p}{100})a = (1 - \frac{15}{100})a \text{ tai}$$

joidenkin mielestä helpommassa

desimaalimuodossa (sijoituksella

$$p/100 = x) (1 - x)(1 + x)a = (1 - \frac{15}{100})a.$$

Tästä a katoaa jakolaskulla, ja oikean puolen vähennyslasku voidaan sieventää:

$$(1 - x)(1 + x) = \frac{85}{100}. \text{ Yhtälön vasemman}$$

puolen tulon voi kirjoittaa uudelleen

avaamalla sulut osittelulain avulla,

jolloin päädytään potenssiyhtälöön

$$1 - x^2 = \frac{85}{100}. \text{ Tästä edelleen } x^2 = \frac{15}{100},$$

$$\text{josta } x = \pm \sqrt{\frac{15}{100}} = \pm \frac{\sqrt{15}}{10}. \text{ Aiemmin}$$

tehdyn sijoituksen mukaan $\frac{p}{100} = x$,

joten p voidaan ratkaista yhtälöstä

$$\frac{p}{100} = \pm \frac{\sqrt{15}}{10} \text{ kertomalla se puolittain}$$

nimittäjällä 100. Saadun yhtälön

$$p = \pm 10\sqrt{15} \text{ kahdesta ratkaisusta}$$

hyväksytään vain positiivinen vastaus,

koska prosentuaalisen muutoksen

”suunta” on jo otettu huomioon alkuperäisessä yhtälössä yhteen- ja vähennyslaskujen avulla. Lopullinen vastaus on siis $p = 10\sqrt{15} \approx 38,73$.

477.

a) Esimerkkifunktio (identiteettifunktio) $f, f(x) = x$ toteuttaa molemmat, koska jokainen luku on yhtä suuri itsensä kanssa.

b) Sopivia funktion lausekkeita (muuttajana x) ovat esimerkiksi $\frac{1}{x}$ tai $1 - x$.

478.

a) $\frac{3}{2}$

b) $x = -3$

479.

$$x = \sqrt[3]{12} \approx 2,289$$

480. Kuohuviiniä on lisättävä 2,0 litraa.

481. Kaniineja on 12 ja fasaaneja 23.

482.

a) $a = 5\,619,25$ ja $b = 607\,417$

b) 90 000

483. $x = 4$

484. $x + y$

485. $-\frac{1}{12}$

486. $x = 0$ tai $x = 2$

487. $\frac{13}{6}$

488. $-\frac{1}{4}$

489. $x = \frac{29}{11}$

490. $2 - \sqrt{2}$

491. $x = -4$

492. 0,8 %

493. $4ab$

494. $2\sqrt{2}$

495. $(5 - \sqrt{2})^2 = 27 - 10\sqrt{2}$

496. $x = 7$

497. $\frac{2a^2}{9}$

498. $\frac{2}{x}$

499. $x = \frac{3}{2}$

526.

a) $5,0_{10}$

b) $1,15625_{10}$

c) $37,8125_{10}$

527.

a) $111,0_2$

b) $10,1_2$

c) $1011,0011_2$

529.

a) 110100_2

b) 110100100000_2

c) $101,1_2$

530.

a) 151

b) Ei ole oikea roomalainen luku.

c) Ei ole oikea roomalainen luku.

d) 251

e) 386

f) Ei ole oikea roomalainen luku.

g) Ei ole oikea roomalainen luku.

h) 493

i) 649

531.

a) CCLXXVIII, 9 merkkiä

b) DCCXII, 6 merkkiä

c) MCDLXXVIII, 10 merkkiä

d) MMMCMXCIX, 9 merkkiä

532. 10 010 100

Hakemisto

A

absoluuttinen muutos, 131
alkuluku, 32
alkutekijä, 32
analyttinen jatkaminen, 63
aritmetiikka, 23
arvo, 34
arvojoukko, 160, 165
aste, 173
aste (potenssiyhtälö), 140
asteluku, 173

B

binäärijärjestelmä, 229
bitti, 230

D

desimaalierotin, 14, 69
desimaalijärjestelmä, 229
desimaaliosa, 69

E

eksponentiaalinen malli, 182
eksponentti, 56
eksponenttifunktio, 180
eksponenttiyhtälö, 181
erotusprosentti, 132

F

funktio, 160

H

heksadesimaalijärjestelmä, 229

I

identtisesti tosi, 110
imaginääriyksikkö, 68
irrationaaliluku, 22

J

jakoyhtälö, 50
jakso, 70
jaksollinen desimaaliluku, 72
johdannaissuure, 76

K

käänteisluku, 49
kantaluku, 56
kerrannaisyksikkö, 79
kokonaisluvut, 21
kokonaisuosa, 69
kompleksiluvut, 23
korkoa korolle, 148
kuutio, 56
kuutiojuuri, 95
kuvaus, 160
kymmenjärjestelmä, 229

L

laskutoimitus, 16
lauseke, 34
laventaminen, 44

luku, 13
lukujärjestelmä, 229
lukusuora, 21
luonnolliset luvut, 19

M

maalijoukko, 160
määrittelyjoukko, 160, 164
merkitsevät numerot, 91
Mersennen alkuluku, 66
murtoluku, 43
murtopotenssi, 102
muutosprosentti, 131
muuttuja, 15, 111

N

n :s juuri, 96
neliö, 56
neliöjuuri, 94
nimittäjä, 43
nolla, 231
nollakohta, 162
numero, 13
numeromerkki, 229

O

oktaalijärjestelmä, 229
operaatio, 16
osoittaja, 43

P

päättävä desimaaliluku, 71
paikkajärjestelmä, 229
parillinen luku, 32
pariton luku, 32
peilaus, 20
perusarvo, 130

perussuure, 76
pilkun siirtäminen, 78
potenssiyhtälö, 140
pro centum, 128
pro mille, 128
promille, 128
prosentti, 128
prosenttiyksikkö, 135
Pythagoraan lause, 146

R

rationaaliluku, 21
reaaliluku, 22
refleksiivisyys, 15
relatio, 15
roomalaiset luvut, 231

S

samannimisyys, 44
sekamurtoluku, 43
sieventäminen, 36
skalaarisuure, 74
suhteellinen muutos, 131
sulkeiden avaaminen, 38
supistaminen, 44
suure, 74
symmetrisyys, 15

T

täydellinen luku, 33
tekijä, 31
termi, 34
tetraatio, 68
tilavuusprosentti, 139
transitiivisuus, 15
tuhaterotin, 14
tukkimiehen kirjanpito, 230

tuntemattoman eliminointi, 123

V

vaihdannaisuus, 24

vakio, 15

vastaluku, 20

vektorisuure, 74

verrannollisuuskerroin, 153

verranto, 154

vertailuprosentti, 129

Y

yhtälö, 109

yhtälön päteminen, 109

yhtälöpari, 123

yhteinen tekijä, 38

yksikkö, 74