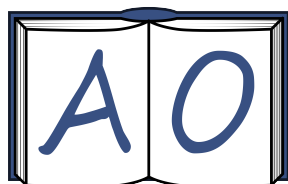


Vapaa matikka

Lukuteoria ja logiikka (MAA11)

“How often have I said to you that when you have eliminated the impossible, whatever remains, however improbable, must be the truth?”
– Sherlock Holmes

The Sign of the Four (1890), Chap. 6, p. 111



Avoimet oppimateriaalit ry



Teknologiateollisuuden
100-VUOTISSÄÄTIÖ



Sisältö on lisensoitu avoimella CC BY 4.0 -lisenssillä.

Tehtävien vastauksia, v. 0.80 / 8.1.14

Jos olet kiinnostunut Vapaa matikka -sarjan kirjoittamisesta, voit tehdä pull requestin muutoksillesi GitHub-palvelussa tai osallistua yhdistyksen toimintaan.

Lisätietoja Vapaa matikka -kirjasarjasta työryhmältä,
vapaamatikka@avoimetoppimateriaalit.fi.

Erityisesti tätä kirjaa koskevaa palautetta voi lähettää Antti Rasilalle,
antti.rasila@iki.fi.

draft 8.1.2014

LISENSSI

Tämän teoksen käyttöoikeutta koskee Creative Commons Nimeä 4.0 Kansainvälinen (CC BY 4.0) -lisenssi. This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) License.



Lisenssin suomenkielinen tiivistelmä

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.fi>



Tarkat lisenssiehdot (englanniksi)

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>

Voit vapaasti:

Jakaa. Kopioida ja jatkolevittää materiaalia, missä tahansa välineessä ja muodossa, mihin tahansa tarkoitukseen, myös kaupallisesti.

Muuntaa. Remiksata, muuntaa ja jalostaa materiaalia, mihin tahansa tarkoitukseen, myös kaupallisesti.

Lisenssinantaja ei voi vetää näitä vapauksia pois niin kauan kun seuraat lisenssin ehtoja.

Seuraavilla ehdoilla:

Nimeä. Sinun on mainittava tekijät, näytettävä linkki lisenssiin sekä kerrottava, jos olet muuntanut materiaalia. Voit tehdä tämän millä tahansa kohtuullisella tavalla, mutta et niin, että lisenssin antaja näyttäisi tukevan sinua tai materiaalin käyttöäsi.

No additional restrictions. Et voi lisätä lakiehtoja tai teknisiä estoja, jotka estäisivät muita tekemästä mitään, minkä lisenssi sallii.

Huomautukset:

1. Sinun ei tarvitse seurata lisenssiehtoja niiden materiaalin osien kohdalla, jotka ovat public domainissa tai joiden käyttö on sallittua tilannekohtaisen tekijänoikeuspoikkeuksen tai -rajoituksen vuoksi.
2. Mitään takuita ei ole annettu. Lisenssi ei välttämättä anna sinulle kaikkia käyttö-tarkoituksesi edellyttämiä oikeuksia. Esimerkiksi julkisuus-, yksityisyys- tai moraalisäädökset voivat rajoittaa materiaalin käyttöäsi.

KÄSIKIRJOITUS

Partanen, Anna-Maija

Rasila, Antti

Setälä, Mika

KANSI

Köngäs, Hannu

VIIMEISTELY

Enwald, Joel

Forsman, David

Hagström, Vesa

Häsä, Jokke

Ilomäki, Niko

Linja-aho, Vesa

Mauno, Ossi

Rasila, Antti

Talvitie, Topi

Tiensuu, Sampo

Tiitu, Hannu

Tilvis, Ville

Vistiaho, Valtteri

WIKIMEDIA COMMONS

käyttäjä Boris23

käyttäjä Mattes

käyttäjä Nordelch

käyttäjä Paginazero

käyttäjä Raul654

käyttäjä Stahlkocher

UUSIMMAT VERSIOT

Git-repot

<https://github.com/avoimet-oppimateriaalit-ry>

Valmiit pdf-versiot

<http://goo.gl/7OikD>

PROJEKTI

Tavoite

Kokonainen lukion pitkän matematiikan kirjasarja CC BY -lisenssillä

Koordinaattori

Vesa Linja-aho (Metropolia Ammattikorkeakoulu)

Rahoitus

Teknologiaateollisuuden 100-vuotissäätiö: 30 000 € (2013)

AVOIMET OPPIMATERIAALIT RY

Kotisivu

<http://avoimetoppimateriaalit.fi>

Wiki (beta)

Ei tällä hetkellä käytössä.

Sähköpostit

yhdistys@avoimetoppimateriaalit.fi

vapaamatikka@avoimetoppimateriaalit.fi

Facebookissa

<https://facebook.com/avoimetoppimateriaalit>

<https://facebook.com/oppikirjamaraton>

IRCnetissä

#avoimetoppimateriaalit

Sisältö

1	Luku 1	7
1.1	Tehtäväsarja 1	7
2	Luku 2	13
2.1	Tehtäväsarja 1	13
2.2	Tehtäväsarja 2	26
2.3	Tehtäväsarja 3	43
3	Luku 3	53
3.1	Tehtäväsarja 1	53
3.2	Tehtäväsarja 2	65
3.3	Tehtäväsarja 3	71
4	Luku 4	76
4.1	Tehtäväsarja 1	76
5	Luku 5	81
5.1	Tehtäväsarja 1	81
5.2	Tehtäväsarja 2	87
5.3	Tehtäväsarja 3	92
5.4	Tehtäväsarja 4	97
6	Luku 6	103
6.1	Tehtäväsarja 1	103
6.2	Tehtäväsarja 2	108
6.3	Tehtäväsarja 3	114
7	Luku 7	125
7.1	Tehtäväsarja 1	125
7.2	Tehtäväsarja 2	127

LUKU 1

Luku 1

1.1 Tehtäväsarja 1

Tehtäviä

1. Onko päättely loogisesti pätevä? Perustele.

- a) Kaikki ihmiset ovat kuolevaisia. Lasse-kissa on kuolevainen. Siis Lasse-kissa on ihminen.
- b) Kaikki koirat osaavat haukkua. Halli on koira. Siis Halli osaa haukkua.

1.

- a) Ei.
- b) On.

2. Ovatko seuraavat päättelyt loogisesti päteviä? Perustele.

- (1) Kaikki tetraedrit ovat pyramideja.
- a) (2) Jotkut kartiot ovat tetraedrejä.

- (3) Jotkut kartiot ovat pyramideja.
- (1) Kaikki sylinterit ovat lieriöitä.
- b) (2) Mikään lieriö ei ole kartio.

- (3) Jotkut sylinterit ovat kartioita.
- (1) Luku 345 päättyy numeroon 5.
- c) (2) Nollaan päättyvä luku on viidellä jaollinen.

- (3) Luku 345 on viidellä jaollinen.

2.

- a) On.
- b) Ei.
- c) Ei.

3. Onko seuraava päättely loogisesti pätevä? Perustele.

- a) Jos ulkona on pakkanen, menen hiihtämään. Ulkona ei ole pakkanen. Siis en mene hiihtämään.
- b) Jos ulkona on pakkanen, menen hiihtämään. En mene hiihtämään. Siis ulkona ei ole pakkanen.
- c) Jos tiedän nukkuvani, niin nukun. Jos tiedän nukkuvani, niin en nuku. Siis en tiedä nukkuvani.

3.

- a) On.
- b) Ei.
- c) Ei.

4. Tutkitaan polynomia

$$P(x) = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 25x.$$

- a) Laske $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ ja $P(4)$.
- b) Mitä voit sanoa luvuista $P(n)$, kun n on luonnollinen luku?
- c) Testaa päätelmäsi kokeilemalla myös muilla luonnollisilla luvuilla esimerkiksi laskinta käyttäen.

4.

- a) $P(0) = 0$, $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 3$, $P(4) = 4$
- b) $P(n) = n$
- c) $P(5) = 125$, päätelmä ei päde.

5. Arkiajattelussa käytetään usein ajattelumalleja, jotka eivät ole loogisesti perusteltavissa. Mikä virhe on seuraavissa päätelmissä?

- a) Ilta-Sanomien kyselyssä 66 % vastaajista uskoo maan ulkopuoliseen elämään. Maan ulkopuolista elämää on olemassa.
- b) The Sunday Times -lehden haastattelussa kuuluisa tiedemies Stephen Hawking totesi pitävänsä lähes varmana, että avaruudessa on maan ulkopuolista älykäästä elämää. Maan ulkopuolista elämää on olemassa.
- c) Tiedemiehistä 90 % väittää, että nykyinen ilmastonmuutos on ihmisen aiheuttamaa eikä johdu maapallon lämpötilan luontaisesta jaksollisuudesta. Siis nykyinen ilmastonmuutos on ihmisen aiheuttamaa.
- d) Televisiouutisissa kerrottiin, että toisen maailmansodan aikainen holokausti oli vain liittoutuneiden propagandaa. Siis holokaustia ei tapahtunut toisen maailmansodan aikana.

5.

- a) Johtopäätös vedetty vastaajien uskomuksesta.
- b) Johtopäätös vedetty Stephen Hawkingin uskomuksesta.
- c) Johtopäätös perustuu tiedemiesten väitteisiin, joista ei ole varmaa totuutta.
- d) Johtopäätös perustuu televisiouutisen väitteeseen, josta ei ole selviä todisteita.

6. Ovatko seuraavat päättelyt loogisesti päteviä? Perustele.

- (1) Kaikilla x toteutuu y .
a) (2) Joillakin z toteutuu x .

(3) Joillakin z toteutuu y .
(1) Kaikilla A toteutuu B .
b) (2) C toteuttaa B :n.

(3) C toteuttaa A :n.
(1) Kaikilla A toteutuu B .
c) (2) Millään C ei toteudu B .

(3) Millään C ei toteudu A .

6.

- a) On.
b) Ei. Jos A toteuttaa B :n, B ei välttämättä toteuta A :ta.
c) On. Vastaoletuksesta ”Jollakin C toteutuu A .” on johdettavissa ristiriita.

Kotitehtäviä

1. Ovatko seuraavat päättelyt päteviä? Perustele.

- (1) Kaikki kissat osaavat kehrätä.
- a) (2) Tämä eläin osaa kehrätä.

- (3) Tämä eläin on kissa.
- (1) Kukaan laiska opiskelija ei selviä kokeesta.
- b) (2) On opiskelijoita, jotka selviävät kokeesta.

- (3) On opiskelijoita, jotka eivät ole laiskoja.

1.

- a) Ei.
- b) On.

2. Ovatko seuraavat päättelyt päteviä? Perustele.

- (1) Neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
- a) (2) Neljäkäs on suunnikas.

- (3) Suunnikkaan lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
- (1) Kaikki suorakulmiot ovat suunnikkaita.
- b) (2) Jotkut nelikulmiot ovat suorakulmioita.

- (3) Jotkut nelikulmiot ovat suunnikkaita.
- (1) Kolmio ABC on tasakylkinen.
- c) (2) Tasasivuiset kolmiot ovat tasakylkisiä.

- (3) Kolmio ABC on tasasivuinen.

2.

- a) Ei.
- b) On.
- c) Ei.

3. Ovatko seuraavat päättelyt päteviä? Perustele.

- (1) Kaikki lammasfarmin lampaat ovat joko mustia tai valkoisia.
- a) (2) Kaikki lampaat ovat mustia tai valkoisia.

- (1) Tavallisessa korttipakassa kortti on aina joko pata, risti, hertta tai ruutu.
- (2) Pata- ja risti-kortit ovat mustia.
- b) (3) Hertta- ja ruutu-kortit ovat punaisia.

- (4) Kaikki tavallisten korttipakkojen kortit ovat joko mustia tai punaisia.

3.

- a) Ei.
- b) On.

4. Jäämaa on kokonaan Merimaan itäpuolella. Kummallakin on etelärajaa Aurinkomaan kanssa. Merimaalla ja Aurinkomaalla on länsiraja Lumimaan kanssa. Kukkamaa on kokonaan Jäämaan ja Aurinkomaan itäpuolella.

- a) Onko Merimaalla ja Kukkamaalla yhteistä rajaa?
- b) Voiko Lumimaalla ja Kukkamaalla olla yhteistä rajaa?

4.

- a) Ei.
- b) Voi, koska Merimaalla ja Aurinkomaalla voi olla Lumimaan kanssa muutakin rajaa kuin länsiraja. Kuvan piirtäminen saattaa auttaa.

5. Ovatko seuraavat päättelyt päteviä? Perustele.

- (1) Millään x ei toteudu y .
- a)

(2)	Kaikilla z toteutuu x .
(3)	Millään z ei toteudu y .
- (1) Kaikilla A toteutuu B .
- b)

(2)	Joillakin C toteutuu B .
(3)	Joillakin A toteutuu C .

5.

- a) On.
- b) Ei.

LUKU 2

Luku 2

2.1 Tehtäväsarja 1

Tehtäviä

1. Onko lause atomilause?

- a) Tampere on Pirkanmaalla.
- b) Kajaani on Suomen pääkaupunki.
- c) Hattu pois päästä!
- d) On olemassa suurin alkuluku.
- e) Onko avaruudessa elämää?
- f) $5 + 12 = 18$.

1.

- a) On.
- b) On.
- c) Ei.
- d) On.
- e) Ei.
- f) On.

2. Kirjoita lauseen negaatio.

- a) Tänään on maanantai.
- b) $2 + 3 = 5$.
- c) Luku on negatiivinen.
- d) Ainakin yhdellä ryhmämme opiskelijalla on ruskeat silmät.
- e) Kymmenessä sivussa tekstiä on vähintään seitsemän virhettä.
- f) Kesä Välimerellä on kuuma ja aurinkoinen.

2.

- a) Tänään ei ole maanantai.
- b) $2 + 3 \neq 5$
- c) Luku on positiivinen.
- d) Ainakin yhdellä ryhmämme opiskelijalla ei ole ruskeita silmiä.
- e) Kymmenessä sivussa tekstiä on vähintään seitsemän virhettä.
- f) Kesä Välimerellä on kylmä ja pilvinen.

3. Olkoot lause A : ”veikkasin lottorivin” ja lause B : ”voitin miljoona euroa”. Kirjoita suomen kielellä lauseet

- a) $\neg A$,
- b) $A \vee B$,
- c) $A \wedge B$,
- d) $A \wedge \neg B$,
- e) $\neg A \vee (A \wedge B)$,
- f) $\neg A \wedge \neg B$.

3.

- a) En veikannut lottoriviä.
- b) Veikkasin lottorivin tai voitin miljoona euroa.
- c) Veikkasin lottorivin ja voitin miljoona euroa.
- d) Veikkasin lottorivin ja en voittanut miljoonaa euroa.
- e) En veikannut lottoriviä tai veikkasin lottorivin ja voitin miljoona euroa.
- f) En veikannut lottoriviä enkä voittanut miljoonaa euroa.

4. Olkoot lause A : ”on kaunis kesäpäivä”, lause B : ”lokit kirkuvat” ja lause C : ”kävelen rannalla”. Kirjoita suomen kielellä lauseet

- a) $\neg A \vee B$,
- b) $A \wedge B \wedge C$,
- c) $\neg(A \wedge C)$,
- d) $(A \wedge C) \vee (B \wedge \neg C)$.

4.

- a) Ei ole kaunis kesäpäivä tai lokit kirkuvat.
- b) On kaunis kesäpäivä, lokit kirkuvat ja kävelen rannalla.
- c) Ei ole totta, että on kaunis kesäpäivä ja kävelen rannalla.
- d) On kaunis kesäpäivä ja kävelen rannalla tai lokit kirkuvat ja en kävele rannalla.

5. Olkoot A : ”on pilvistä” ja B : ”sataa lunta”. Formalisoi seuraavat lauseet eli kirjoita ne lauseiden A ja B sekä konnektiivien $\neg$, $\wedge$ ja $\vee$ avulla.

- a) On pilvistä ja sataa lunta.
- b) On pilvistä, mutta ei sada lunta.
- c) Ei ole pilvistä eikä sada lunta.
- d) On pilvistä tai sataa lunta.
- e) On pilvistä ja sataa lunta tai ei ole pilvistä eikä sada lunta.

5.

- a) $A \wedge B$
- b) $A \wedge \neg B$
- c) $\neg A \wedge \neg B$
- d) $A \vee B$
- e) $(A \wedge B) \vee \neg A \wedge \neg B$

6. Formalisoi lauseet:

- a) Mustikat polun varrella ovat kypsiä tai alueella ei ole nähty karhuja.
- b) Ei ole totta, että mustikat polun varrella ovat kypsiä tai alueella on nähty karhuja.
- c) Mustikat polun varrella ovat kypsiä, mutta alueella ei ole nähty karhuja, tai sitten mustikat eivät ole kypsiä ja alueella on nähty karhuja.
- d) Karhuja ei ole nähty alueella ja polulla vaeltaminen on turvallista, mutta mustikat ovat kypsiä.

6. Olkoot A : ”Mustikat polun varrella ovat kypsiä.”, B : ”Alueella on nähty karhuja.” ja C : ”Polulla vaeltaminen on turvallista.”

- a) $A \vee \neg B$
- b) $\neg(A \vee B)$
- c) $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
- d) $\neg B \wedge C \wedge A$

7. a) Laadi totuustaulu lauseelle $\neg A \vee \neg B$. Millä atomilauseiden A ja B totuusarvoilla lause on tosi?
- b) Laadi totuustaulu lauseelle $\neg(A \wedge B)$. Millä atomilauseiden A ja B totuusarvoilla lause on tosi? Vertaa a-kohdan tulokseen.
- c) Keksi atomilauseet A ja B ja ilmaise a- ja b-kohtien lauseet suomen kielellä.

7.

a)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

b)

A	B	$\neg(A \wedge B)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

- c) Ei sada tai ei tuule.
Ei ole totta, että sataa ja tuulee.

8. Laadi totuustaulu lauseelle $(A \wedge B) \vee \neg(B \vee C)$.

8.

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge B$	$\neg(B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee \neg(B \vee C)$
1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1

9. Olkoot atomilauseet A : " $x < -1$ ", B : " $x > 1$ " ja C : " $x = 1$ ". Formalisoi lauseet

- a) $x \neq 1$,
- b) $x \geq 1$,
- c) $x \geq -1$,
- d) $x < 1$,
- e) $-1 \leq x \leq 1$,
- f) $x < -1$ tai $x \geq 1$.

9.

- a) $\neg C$
- b) $B \vee C$
- c) $\neg A$
- d) $\neg(B \vee C)$
- e) $\neg(A \wedge B)$
- f) $A \vee (B \vee C)$

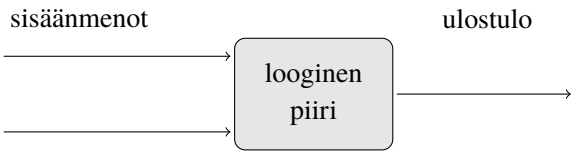
10. Saarella asuu haltijoita ja menninkäisiä. Turisti tapasi kaksi saarelaista, Hipsun ja Vipsun. Hipsu sanoi: "Hillat ovat kypsiä ja kalaonni on suotuisa, tai sitten hillat eivät ole kypsiä tai kalaonni ei ole suotuisa." Vipsu väitti: "Hillat ovat kypsiä ja kalaonni on suotuisa, mutta hillat eivät ole kypsiä tai kalaonni ei ole suotuisa." Tutki totuustaulun avulla Hipsun ja Vipsun väitteiden totuusarvoja. Mitä voidaan päätellä totuustaulun avulla, kun tiedetään, että saaren asukkaista haltijat valehtelevat aina ja menninkäiset puhuvat aina totta? Saiko vierailija käyttökelpoista tietoa marjasadosta tai kalaonnesta?

10. Olkoot A : "Hillat ovat kypsiä." ja B : "Kalaonni on suotuisa."

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$	$(A \wedge B) \vee (\neg A \vee \neg B)$	$(A \wedge B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$
1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0

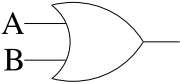
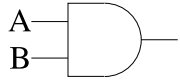
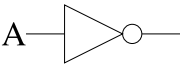
Hipsu on menninkäinen ja Vipsu on haltija. Käyttökelpoista tietoa vierailijalle ei kertynyt.

11. Loogisilla piireillä suoritetaan digitaalisissa laitteissa erilaisia loogisia operaatioita. Loogisen piirin toimintaa voidaan kuvata esimerkiksi seuraavalla kaaviolla.

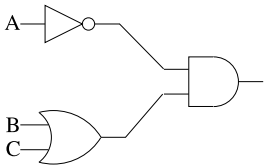


Loogisella piirillä on yksi tai useampi sisäänmeno ja yksi tai useampi ulostulo. Tämän kirjan esimerkeissä ja tehtävissä käsitellään vain yhden ulostulon piirejä. Sisäänmenojen ja ulostulon signaalin arvo voi olla 1 tai 0. Edellisessä tapauksessa johtimessa on jännite, jälkimmäisessä tapauksessa ei ole.

Loogiset piirit kootaan loogisista porteista. Seuraavassa taulukossa on lueteltu loogiset portit, niiden toiminta ja toimintaa vastaava looginen konnektiivi.

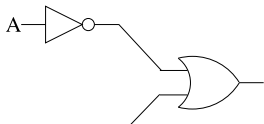
Looginen portti	Toiminta	Piirrosmerkki	Looginen konnektiivi
Tai	Tai-portti antaa jännitteen, kun ainakin toisessa sisäänmenossa on jännite.		$A \vee B$
Ja	Ja-portti antaa jännitteen vain silloin, kun molemmissa sisäänmenoissa on jännite.		$A \wedge B$
Ei	Ei-portti antaa jännitteen silloin, kun sisäänmenossa ei ole jännitettä, ja kääntäen.		$\neg A$

Esimerkiksi looginen piiri



koostuu kolmesta loogisesta portista ja vastaa lausetta $\neg A \wedge (B \vee C)$.

Muodosta seuraavia piirejä vastaavat lauseet.



12. Piirrä lausetta

a) $\neg A \wedge B$

b) $A \vee \neg(B \wedge C)$

c) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$ vastaava looginen piiri.

Kotitehtäviä

1. Kirjoita lauseen negaatio.

- a) $100 > 101$.
- b) Lompakossani on rahaa korkeintaan 10 euroa.
- c) Kaikki ryhmämme opiskelijat ovat Facebookissa.
- d) Koulussamme on täsmälleen kaksi vasenkätistä opettajaa.
- e) En opiskele latinaa enkä kreikkaa.
- f) Maarit pitää lumilautailusta tai käsitöistä muttei molemmista.

1.

- a) $100 \leq 101$
- b) Lompakossani on rahaa enemmän kuin 10 euroa.
- c) Kaikki ryhmämme opiskelijat eivät ole Facebookissa.
- d) Koulussamme on enemmän tai vähemmän kuin kaksi vasenkätistä opettajaa.
- e) Opiskelen latinaa tai kreikkaa.
- f) Maarit pitää lumilautailusta ja käsitöistä tai Maarit ei pidä kummastakaan.

2. Olkoot lauseet A : ”puutarhan portti on auki”, B : ”ruusut kukkivat” ja C : ”menen puutarhaan”. Kirjoita suomen kielellä lauseet

- a) $\neg A$,
- b) $B \wedge C$,
- c) $A \vee B$,
- d) $\neg B \wedge \neg C$,
- e) $\neg(A \wedge B)$,
- f) $A \vee \neg B$ ja
- g) $(A \wedge C) \vee (\neg B \wedge C)$.

2.

- a) Puutarhan portti on kiinni.
- b) Ruusut kukkivat ja menen puutarhaan.
- c) Puutarhan portti on auki tai ruusut kukkivat.
- d) Ruusut eivät kuki enkä mene puutarhaan.
- e) Ei ole totta, että puutarhan portti on auki ja ruusut kukkivat.
- f) Puutarhan portti on auki tai ruusut eivät kuki.
- g) Puutarhan portti on auki ja menen puutarhaan, tai ruusut eivät kuki ja menen puutarhaan.

3. Formalisoi lause.

- a) Kaino ei ole vanha ja Kaino on mies.
- b) Kaino on vanha tai Kaino ei ole mies.
- c) Kaino ei ole vanha mies.
- d) Kaino ei ole vanha eikä hän ole mies.

3. Olkoot A : "Kaino on vanha." ja B : "Kaino on mies."

- a) $\neg A \wedge B$
- b) $A \vee \neg B$
- c) $\neg(A \wedge B)$
- d) $\neg A \wedge \neg B$

4. Formalisoi lause.

- a) Amadeus kuuntelee klassista tai Klaus kuuntelee jazzia.
- b) Amadeus ei kuuntele klassista, mutta Klaus kuuntelee jazzia.
- c) Amadeus kuuntelee klassista, mutta Klaus ei kuuntele jazzia, tai sitten Hassinen kuuntelee progea.
- d) Ei ole niin, että Amadeus kuuntelisi klassista, Klaus jazzia ja Hassinen progea.

4. Olkoot A : "Amadeus kuuntelee klassista.", B : "Klaus kuuntelee jazzia." ja C : "Hassinen kuuntelee progea."

- a) $A \vee B$
- b) $\neg A \wedge B$
- c) $(A \wedge \neg B) \vee C$
- d) $\neg(A \wedge B \wedge C)$

5. a) Laadi totuustaulu lauseille $A \wedge \neg A$ ja $A \vee \neg A$.

b) Etsi atomilause A ja ilmaise kohdan a) lauseet suomen kielellä.

5.

a)

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$	$A \vee \neg A$
1	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	1	0	1

- b) Ulkona sataa ja ulkona ei sada.
Ulkona sataa tai ulkona ei sada.

6. Laadi totuustaulu lauseille

- a) $\neg(A \vee B)$,
 b) $\neg A \wedge B$,
 c) $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$.

Millä atomilauseiden A ja B totuusarvojen yhdistelmillä lauseet ovat tosia?

6.

a)

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	0

Lause on tosi, kun A on tosi ja B epätosi.

b)

A	B	$\neg A$	$\neg A \wedge B$
1	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

Lause on tosi, kun A on epätosi ja B tosi.

c)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \vee B)$	$(A \vee \neg B)$	$(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1

Lause on tosi, kun A ja B ovat tosia.

7. a) Laadi totuustaulu lauseelle $A \vee (B \wedge C)$.
 b) Laadi totuustaulu lauseelle $(A \vee B) \wedge C$.
 c) Vertaa kohtien a) ja b) lauseiden totuusarvoja. Mitä voit päätellä?

7.

a)	A	B	C	$(B \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C)$
	1	1	1	1	1
	1	1	0	0	1
	1	0	1	0	1
	1	0	0	0	1
	0	1	1	1	1
	0	0	1	0	0
	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0
b)	A	B	C	$(A \vee B)$	$(A \vee B) \wedge C$
	1	1	1	1	1
	1	1	0	1	0
	1	0	1	1	1
	1	0	0	1	0
	0	1	1	1	1
	0	0	1	0	0
	0	1	0	1	0
	0	0	0	0	0

- c) Sulkujen paikalla on merkitystä.

8. Olkoot lauseet A : " $x \in [-3, 1]$ " ja B : " $x \in [-1, 5]$ ". Formalisoi lause.

- a) $x \in [-3, 5]$,
 b) $x \in [-1, 1]$,
 c) $x \in [-3, -1[$
 d) $x \in]-\infty, -3[$ tai $x \in]1, \infty[$ ja
 e) $x \in]-\infty, -3[$ tai $x \in]5, \infty[$.

8.

- a) $A \vee B$
 b) $A \wedge B$
 c) $A \wedge \neg B$
 d) $\neg A$
 e) $\neg(A \wedge B)$

9. Kolme koiranpentua, Alli, Buh ja Caesar ovat epäiltyinä isännän tohvelin repimisestä. Luotettava henkilö, joka puhuu aina totta, antaa seuraavan todistuksen: ”Ei ole totta, että Alli on syyllinen tai Buh ei ole syyllinen. Mutta kuitenkin Alli on syyllinen tai Caesar on syyllinen.” Käytä atomilauseita A : ”Alli on syyllinen”, B : ”Buh on syyllinen” ja C : ”Caesar on syyllinen” ja formalisoi luotettavan henkilön lausunto. Muodosta sille totuustaulu ja päättelä, mikä tai mitkä koiranpennuista ovat syyllisiä.

9.

A	B	C	$\neg B$	$\neg(A \vee \neg B)$	$A \vee C$	$\neg(A \vee \neg B) \wedge (A \vee C)$
1	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

Buh ja Caesar ovat syyllisiä.

10. Tutkitaan lausetta ”Suomen kuningas ei ole viiksekäs”. Lause voidaan tulkita ainakin kahdella eri tavalla:

- Suomella on kuningas, joka ei ole viiksekäs.
- Ei ole niin, että olisi olemassa Suomen viiksekästä kuningasta.

Oletetaan, että Suomessa ei ole kuningasta. Onko lause tosi vai epätosi?

10.

- Epätosi.
- Tosi.

11. Kissoilla lyhyen karvan aiheuttaa dominoiva geeni ja pitkän karvan resessiivinen geeni. Merkitään lyhyen karvan geeniä S ja pitkän karvan geeniä s . Kaikilla nisäkkäillä tiettyyn ominaisuuteen vaikuttaa geenipari, joista toinen geeni on saatu isältä ja toinen emolta. Jos kissan geeneistä ainakin toinen on S , niin se on lyhytkarvainen. Kissa on pitkäkarvainen vain siinä tapauksessa, että se on saanut geenin s molemmilta vanhemmiltaan. Pentujen emokissa on pitkäkarvainen (ss) ja isäkissa lyhytkarvainen (SS tai Ss). Millaisia pentuja kissat voivat saada, kun isäkissan geenipari on

- SS
- Ss ?

11.

- Lyhytkarvaisia. (eli Ss)
- Lyhyt- tai pitkäkarvaisia. (Ss tai ss)

2.2 Tehtäväsarja 2

Tehtäviä

1. Olkoot A : ”Matti on insinööri” ja B : ”Matilla on hyvä työpaikka”. Suommenna lause.

- a) $A \wedge B$,
- b) $\neg A \vee B$,
- c) $A \rightarrow B$,
- d) $\neg B \rightarrow A$,
- e) $\neg(B \rightarrow A)$ ja
- f) $B \leftrightarrow A$.

1.

- a) Matti on insinööri, jolla on hyvä työpaikka.
- b) Matti ei ole insinööri tai hänellä on hyvä työpaikka.
- c) Jos Matti on insinööri, hänellä on hyvä työpaikka.
- d) Jos Matilla ei ole hyvää työpaikkaa, hän on insinööri.
- e) Ei ole totta, että jos Matilla on hyvä työpaikka, hän olisi insinööri.
- f) Matilla on hyvä työpaikka, jos ja vain jos hän on insinööri.

2. Olkoot A : ”Liisa on lomalla” ja B : ”Liisa on iloinen”. Formalisoi lauseet:

- a) Jos Liisa on lomalla, hän on iloinen.
- b) Liisa on lomalla, mutta hän ei ole iloinen.
- c) Liisa on iloinen silloin ja vain silloin, kun hän on lomalla.
- d) Jos Liisa ei ole iloinen, hän ei ole lomalla.

2.

- a) $A \rightarrow B$
- b) $A \wedge B$
- c) $B \leftrightarrow A$
- d) $\neg B \rightarrow \neg A$

3. Onko lause tosi?

- a) Jos Tallinna on Norjan pääkaupunki, niin Tukholma on Ruotsin pääkaupunki.
- b) Jos Tallinna on Norjan pääkaupunki, niin Budapest on Ruotsin pääkaupunki.
- c) Jos Leonardo da Vinci on kuollut, niin Aleksis Kivi on saksalainen ralliautoilija.
- d) Jos Leonardo da Vinci on kuollut, niin Leo Tolstoi on venäläinen kirjailija.

3.

- a) Epätosi
- b) Tosi
- c) Epätosi
- d) Tosi

4. Laadi lauseen totuustaulu.

- a) $\neg A \rightarrow B$
- b) $A \leftrightarrow \neg B$
- c) $\neg(A \wedge B) \rightarrow A$

4.

a)

A	B	$\neg A$	$\neg A \rightarrow B$
1	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	0

b)

A	B	$\neg B$	$A \leftrightarrow \neg B$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0

c)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B) \rightarrow A$
1	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	0
0	0	0	1	0

5. Laadi lauseen totuustaulu.

a) $\neg A \vee B \rightarrow C \wedge A$

b) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (C \rightarrow B)$

5.

a)

A	B	C	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$C \wedge A$	$\neg A \vee B \rightarrow C \wedge A$
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0

b)

A	B	C	$A \rightarrow B$	$C \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (C \rightarrow B)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1

6. Formalisoi lause. Missä tilanteissa lause on tosi?

- a) Jos mustikat polun varrella eivät ole kypsiä, niin polulla vaeltaminen on turvallista.
- b) Jos mustikat polun varrella ovat kypsiä, niin silloin polulla vaeltaminen on turvallista, jos ja vain jos karhuja ei ole nähty alueella.
- c) Polulla vaeltaminen on turvallista silloin ja vain silloin, kun mustikat eivät ole kypsiä tai alueella ei ole nähty karhuja.

6. Olkoot A : ”Mustikat polun varrella ovat kypsiä.”, B : ”Polulla vaeltaminen on turvallista.” ja C : ”Karhuja on nähty alueella.”

- a) $\neg A \rightarrow B$. Lause on tosi, kun mustikat ovat kypsiä tai polulla vaeltaminen on turvallista.
- b) $A \rightarrow (B \leftrightarrow \neg C)$. Lause on tosi, kun joko
 - mustikat ovat kypsiä, polulla vaeltaminen ei ole turvallista ja karhuja on nähty alueella,
 - mustikat ovat kypsiä, polulla vaeltaminen on turvallista ja karhuja ei ole nähty alueella tai
 - mustikat eivät ole kypsiä.
- c) $B \leftrightarrow (\neg A \vee \neg C)$. Lause on tosi, kun joko
 - polulla vaeltaminen ei ole turvallista, mustikat ovat kypsiä ja karhuja on nähty alueella,
 - polulla vaeltaminen on turvallista ja mustikat eivät ole kypsiä tai
 - polulla vaeltaminen on turvallista ja karhuja ei ole nähty alueella.

7. Formalisoi lause ja laadi lauseen totuustaulu. Mitä huomaat? Kertooko lause mitään siitä, onko logiikan opiskelu oikeasti hauskaa juuri tällä hetkellä?

- a) Jos sataa ja ei sada, niin logiikan opiskelu on hauskaa.
- b) Jos sataa ja ei sada, niin logiikan opiskelu ei ole hauskaa.

7. Olkoot A : ”Sataa.” ja B : ”Logiikan opiskelu on hauskaa.”

a)

A	B	$\neg A$	$A \wedge \neg A$	$(A \wedge \neg A) \rightarrow B$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Ei kerro.

b)

A	B	$\neg A$	$A \wedge \neg A$	$(A \wedge \neg A) \rightarrow \neg B$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Ei kerro.

8. Perheen lapsia Annaa ja Markusta epäillään kaappiin piilotetun suklaalevyn katoamisesta. Luotettava todistaja kertoo tiedot: Anna on syyllinen tai Markus on syyllinen. Anna on syytön tai Markus on syytön. Jos Anna on syyllinen, niin Markus on syyllinen.

Kumpi lapsista on käynyt suklaavarkaissa?

8.

Olkoot A : ”Anna on syyllinen.” ja B : ”Markus on syyllinen.”

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg A \vee \neg B$	$A \rightarrow B$	$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (A \rightarrow B)$
1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0

Markus on syyllinen.

9. Edwards, Petterson ja Smith ovat syytettyinä omenavarkauksesta. Neiti Marble kuulustelee heitä. Edwards sanoo: ”Jos Petterson on syytön, niin minä olen syyllinen.” Petterson toteaa: ”Minä olen syyllinen, jos ja vain jos Edwards on syyllinen.” Smith väittää: ”Olemme kaikki syyttömiä.” Neiti Marble tietää, että syylliset valehtelevat aina ja syyttömät puhuvat aina totta. Ratkaise totuustaulun avulla, kuka tai ketkä syytetyistä ovat käyneet omenavarkkaissa.

9. Olkoot E : ”Edwards on syyllinen.”, P : ”Petterson on syyllinen.” ja S : ”Smith on syyllinen.”

E	P	S	$\neg E$	$\neg P$	$\neg S$	$\neg P \rightarrow E$	$P \leftrightarrow E$	$\neg E \wedge \neg P \wedge \neg S$
1	1	1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	1

Petterson ja Smith ovat syyllisiä.

10. Eräässä maassa kaikki kuuluvat joko hattujen tai myssyjen puolueeseen. Hatut valehtelevat aina ja myssyt puhuvat aina totta. Kolme kansalaista keskusteli keskenään. Heidän joukossaan saattoi olla vieraan puolueen vakoilija. Arthur sanoi, että Claus on myssy. Berit totesi, että Arthur on myssy ja myös hän itse on myssy. Claus väitti, että jos Arthur on hattu, niin myös hän itse on hattu. Tutki totuustaulun avulla, kuka oli mahdollinen vakoilija.

10.

Olkoot A : ”Arthur on myssy.”, B : ”Berit on myssy.”, C : ”Claus on myssy.” ja niiden negatiot tarkoittavat heidän kuuluvan hattuihin.

A	B	C	$\neg A$	$\neg C$	$A \wedge B$	$\neg A \rightarrow \neg C$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1

Berit on mahdollinen vakoilija.

11. Olkoot lauseet A : ”herään ajoissa”, B : ”menen kouluun” ja C : ”opiskelen logiikkaa”. Esitä sanoin lause $A \rightarrow B \vee C$. Onko lauseen tulkinta $A \rightarrow (B \vee C)$ vai $(A \rightarrow B) \vee C$? Miten tulkinnat eroavat toisistaan?

11.

Jos herään ajoissa, menen kouluun tai opiskelen logiikkaa. Lause tulkitaan $A \rightarrow (B \vee C)$, koska konnektiivien suoritusjärjestyksessä disjunktio on ennen implikaatiota. $(A \rightarrow B) \vee C$ tarkoittaa: ”Jos herään ajoissa, menen kouluun, tai opiskelen logiikkaa.” Tämän voi tulkita: ”Jos herään ajoissa, menen kouluun ja opiskelen logiikkaa.” tai ”En herää ajoissa ja opiskelen logiikkaa joko koulussa tai muualla.”

12. Vertaa lauseiden totuusarvoja atomilauseiden A , B ja C eri totuusarvoilla. Onko sulkeiden muuttamisella vaikutusta lauseen totuusarvoon?

a) $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ ja $A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

b) $(A \wedge B) \wedge C$ ja $A \wedge (B \wedge C)$.

12.

a)

A	B	C	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow C$	$(A \rightarrow B) \rightarrow C$	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	0	1

Sulkeiden muuttamisella on vaikutusta.

A	B	C	$A \wedge B$	$B \wedge C$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Sulkeiden muuttamisella ei ole vaikutusta.

13. * Tietokoneet käsittelevät tietoa käyttäen bittejä. Bitillä on kaksi mahdollista arvoa, 0 ja 1. Bittijono on jono, jossa on yksi tai useampia bittejä. Esimerkiksi 1001 0010 on bittijono, jonka pituus on 8 bittiä. Samanpituisille bittijonoille määritellään bittikohtaiset tai (or), ja (and) sekä poissulkeva tai (xor). Esimerkiksi bittijonojen 1100 ja 1010 bittikohtainen tai on jono 1110, bittikohtainen ja on jono 1000 sekä bittikohtainen poissulkeva tai on jono 0110. Muodosta a) bittikohtainen tai b) bittikohtainen ja c) bittikohtainen poissulkeva tai jonoille 1111 0000 ja 1010 1010.

- a) bittikohtainen tai
- b) bittikohtainen ja
- c) bittikohtainen poissulkeva tai jonoille 1111 0000 ja 1010 1010.

13.

- a) 1111 1010
- b) 1010 0000
- c) 0101 1010

14. * Muodosta bittijono

- a) $(0\ 1111 \wedge 1\ 0101) \vee 0\ 1000$
- b) $(0\ 1010 \text{ xor } 1\ 1011) \text{ xor } 0\ 1001$.

14.

- a) 0 1101
- b) 1 1000

Kotitehtäviä

1. Olkoot A : ”Timo opiskelee matematiikkaa”, B : ”Timo osallistuu logiikan kurssille” ja C : ”Timo opiskelee filosofiaa”. Suomenna lause.

- a) $\neg A \rightarrow \neg B$.
- b) $A \leftrightarrow B$.
- c) $A \vee C \rightarrow B$.
- d) $C \leftrightarrow (B \rightarrow \neg A)$.

1.

- a) Jos Timo ei opiskele matematiikkaa, Timo ei osallistu logiikan kurssille.
- b) Timo opiskelee matematiikkaa, jos ja vain jos Timo osallistuu logiikan kurssille.
- c) Jos Timo opiskelee matematiikkaa tai filosofiaa, Timo osallistuu logiikan kurssille.
- d) Jos Timo opiskelee matematiikkaa ja osallistuu logiikan kurssille, hän ei opiskele filosofiaa. Muussa tapauksessa hän opiskelee filosofiaa.

2. Onko lause tosi?

- a) Jos $(-2)^3 = -8$, niin $(-2)^3 = -8$.
- b) Jos $(-2)^3 = -8$, niin $(-2)^3 = 8$.
- c) Jos luku 8 on pariton, niin luku 8 on pariton.
- d) Jos luku 8 on pariton, niin luku 8 on parillinen.

2.

- a) On.
- b) Ei.
- c) On.
- d) On. (Luku 8 ei ole pariton.)

3. Formalisoi lause.

- a) Jos opettaja on pirteä, niin televisiosta ei ole tullut illalla jalkapalloa.
- b) Suomi voittaa jalkapallon maailmanmestaruuden silloin ja vain silloin, kun lehmät lentävät ja vaaleanpunaiset norsut kävelevät kadulla.
- c) En seuraa jalkapalloa eikä Suomen maajoukkue menesty.
- d) Jos ottelu ei pääty tasapeliin, niin joko kotijoukkue tai vierasjoukkue voittaa pelin.

3.

- a) Olkoot A : "Opettaja on pirteä." ja B : "Televisiosta on tullut illalla jalkapalloa."
 $A \rightarrow \neg B$
- b) Olkoot A : "Suomi voittaa jalkapallon maailmanmestaruuden.", B : "Lehmät lentävät." ja C : "Vaaleanpunaiset norsut kävelevät kadulla."
 $A \leftrightarrow (B \wedge C)$
- c) Olkoot A : "Seuraan jalkapalloa." ja B : "Suomen maajoukkue menestyy."
 $\neg A \wedge \neg B$
- d) Olkoot A : "Ottelu päättyy tasapeliin.", B : "Kotijoukkue voittaa pelin." ja C : "Vierasjoukkue voittaa pelin."
 $\neg A \rightarrow (B \vee C)$

4. Laadi lauseen totuustaulu.

a) $A \wedge B \rightarrow \neg B$

b) $(A \leftrightarrow B) \wedge B \rightarrow C \vee A$

c) $(\neg A \rightarrow B) \leftrightarrow (C \rightarrow B \wedge A)$

4.

a)

A	B	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \wedge B \rightarrow \neg B$
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

b)

A	B	C	$A \leftrightarrow B$	$(A \leftrightarrow B) \wedge B$	$C \vee A$	$(A \leftrightarrow B) \wedge B \rightarrow C \vee A$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1

c)

A	B	C	$\neg A$	$\neg A \rightarrow B$	$C \rightarrow B \wedge A$	$(\neg A \rightarrow B) \leftrightarrow (C \rightarrow B \wedge A)$
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	0

5. Olkoot A : ”Timo opiskelee matematiikkaa”, B : ”Timo osallistuu logiikan kurssille” ja C : ”Timo opiskelee filosofiaa”. Formalisoi lause. Missä tilanteissa lause on tosi?

- a) Timo opiskelee matematiikkaa ja filosofiaa.
- b) Jos Timo opiskelee matematiikkaa, hän osallistuu logiikan kurssille.
- c) Timo osallistuu logiikan kurssille silloin ja vain silloin, kun hän opiskelee filosofiaa tai matematiikkaa.
- d) Jos Timo osallistuu logiikan kurssille, opiskelee hän joko matematiikka tai filosofiaa, muttei molempia.

5.

- a) $A \wedge C$
- b) $A \rightarrow B$
- c) $B \leftrightarrow (A \vee C)$
- d) $B \rightarrow A \text{ xor } C$ tai $B \rightarrow ((A \vee C) \wedge \neg(A \wedge C))$

6. Poliisit Mauno ja Martti saavat kiinni rikoksesta epäilemänsä Jaskan. Tiedetään, että Jaska ei koskaan valehtelee. Mauno toteaa Martille: ”Jos Jaska on syyllinen, on hänellä ollut rikostoveri.” Jaska vastaa: ”Tuo ei ole totta!” Tähän Martti tokaisee: ”Sehän tunnusti helpolla!” Tutki Maunon lausetta ja osoita Martin johtopäätös oikeaksi.

6.

Olkoot A : ”Jaska on syyllinen.” ja B : ”Hänellä on ollut rikostoveri.”

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg(A \rightarrow B)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	0

Koska Jaska puhuu aina totta ja hän väittää, että ei ole totta, että jos hän olisi syyllinen, olisi hänellä ollut rikostoveri.”, on hän syyllinen eikä hänellä ole rikostoveria.

7. Mattia, Seppoa ja Teppoa epäillään polkupyörävarkaudesta. Konstaapeli Reinikainen tietää, että syytön puhuu aina totta ja syyllinen valehtelee aina. Reinikainen kuulustelee kolmea epäiltyä. Matti sanoo: ”Teppo on syyllinen.” Seppo väittää: ”Matti on syyllinen tai Teppo valehtelee.” Teppo toteaa: ”Seppo on syyllinen.” Ratkaise totuustaulun avulla, kuka on syyllinen.

7. Olkoot M : ”Matti on syyllinen.”, S : ”Seppo on syyllinen.”, T : ”Teppo on syyllinen.” ja V : ”Teppo valehtelee.”

M	S	T	V	$M \vee V$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

Teppo on syyllinen.

8. Helinä, Heljä ja Helena asuvat samassa talossa. Epäillään, että loton päävoitto on osunut taloon. Luotettavalta taholta on tullut tietoja:

Jos Heljä on voittaja, niin Helinäkin on. Heljä on voittaja, jos ja vain jos Helena on voittaja. Ainakin yksi naisista on voittaja, mutta kaikki eivät ole.

Kuka tai ketkä ovat voittaneet lotossa?

8.

Olkoot A : ”Helinä on voittaja.”, B : ”Heljä on voittaja.” ja C : ”Helena on voittaja.”

A	B	C	$B \rightarrow A$	$B \leftrightarrow C$	$(A \vee B \vee C) \wedge \neg(A \wedge B \wedge C)$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0

Helinä on voittaja.

9. Mitä eroa on seuraavissa ehdoissa?

- Henkilö saa työpaikan matkamuistomyymälässä, jos hänellä on kokemusta kassakoneen käytöstä.
- Matkamuistomyymälässä työskentelevältä edellytetään kokemusta kassakoneen käytöstä.
- Henkilö saa työpaikan matkamuistomyymälässä silloin ja vain silloin, kun hänellä on kokemusta kassakoneen käytöstä.

9. a) on riittävä on ehto, b) on välttämätön ehto ja c) riittävä sekä välttämätön ehto.

10. Vertaa lauseiden totuusarvoja atomilauseiden A , B ja C eri totuusarvoilla. Onko sulkeiden muuttamisella vaikutusta lauseen totuusarvoon?

- a) $(A \vee B) \vee C$ ja $A \vee (B \vee C)$.
b) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$ ja $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$.
c) $\neg A \leftrightarrow (B \wedge C)$ ja $\neg(A \leftrightarrow B) \wedge C$.

10.

Ei vaikutusta. Vaikuttaa.

a)

A	B	C	$A \vee B$	$B \vee C$	$(A \vee B) \vee C$	$A \vee (B \vee C)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

b)

A	B	C	$A \leftrightarrow B$	$B \leftrightarrow C$	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$	$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1

c)

A	B	C	$\neg A$	$B \wedge C$	$\neg A \leftrightarrow (B \wedge C)$	$A \leftrightarrow B$	$\neg(A \leftrightarrow B)$	$\neg(A \leftrightarrow B) \wedge C$
1	1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0

Vaikuttaa.

11. Olkoon v sellainen funktio, että $v(A) = 1$, jos lause A on tosi, ja $v(A) = 0$, jos lause A on epätosi. Osoita, että yhtälö pätee kaikilla lauseiden A ja B totuusarvojen yhdistelmillä.

- a) $v(A \wedge B) = v(A)v(B)$,
b) $v(A \vee B) = v(A) + v(B) - v(A)v(B)$,
c) $v(A \rightarrow B) = 1 - v(A)(1 - v(B))$.

11.

a)

A	B	$A \wedge B$	$v(A \wedge B)$	$v(A)$	$v(B)$	$v(A)v(B)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0

b)

A	B	$A \vee B$	$v(A \vee B)$	$v(A)$	$v(B)$	$v(A)v(B)$	$v(A) + v(B) - v(A)v(B)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0

c)

A	B	$A \rightarrow B$	$v(A \rightarrow B)$	$v(A)$	$v(B)$	$1 - v(B)$	$1 - v(A)(1 - v(B))$
1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1

12. Peircen nuoli on konnektiivi, joka luonnollisessa kielessä tarkoittaa samaa kuin ”ei A eikä B ”. Shefferin viiva on konnektiivi, joka luonnollisessa kielessä tarkoittaa samaa kuin ”ei molemmat A ja B ”. Laadi näiden konnektiivien totuustaulut.

12.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1

2.3 Tehtäväsarja 3

Tehtäviä

1. Tutki, onko lause tautologia.

- a) $A \vee \neg A$,
- b) $A \wedge \neg A$,
- c) $A \rightarrow B \vee A$,
- d) $A \rightarrow B \wedge A$,

1.

a)

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
1	0	1
0	1	1

Lause on tautologia.

b)

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
1	0	0
0	1	0

Lause ei ole tautologia.

c)

A	B	$B \vee A$	$A \rightarrow B \vee A$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

Lause on tautologia.

d)

A	B	$B \wedge A$	$A \rightarrow B \wedge A$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	0	1

Lause ei ole tautologia.

2. Osoita lause tautologiaksi.

a) $A \rightarrow B \wedge \neg B \leftrightarrow \neg A$.

b) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$.

2.

a)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$B \wedge \neg B$	$A \rightarrow B \wedge \neg B$	$A \rightarrow B \wedge \neg B \leftrightarrow \neg A$
1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Koska viimeisen sarakkeen kaikki totuusarvot ovat 1, lause on tautologia.

b)

A	B	C	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow C$	$A \rightarrow C$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Koska viimeisen sarakkeen kaikki totuusarvot ovat 1, lause on tautologia.

3. Olkoot A : ”kello soi” ja B : ”tunti loppuu”. Kirjoita luonnollisella kielellä lauseet $A \rightarrow B$ ja $\neg(A \wedge \neg B)$. Tarkoittavatko ne samaa?

3.

Jos kello soi, tunti loppuu.

Ei ole totta, että kello soi ja tunti ei lopu.

Totuusarvoiltaan lauseet tarkoittavat samaa.

4. Osoita lauseet loogisesti ekvivalenteiksi totuustaulujen avulla.

a) $A \wedge B$ ja $\neg(\neg A \vee \neg B)$.

b) $A \leftrightarrow B$ ja $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

c) $A \leftrightarrow B$ ja $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.

4.

a)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	$A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1

b)

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

c)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \leftrightarrow B$	$A \wedge B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$
1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1

5. Osoita vaihdantalait

a)

$$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A,$$

b)

$$A \vee B \leftrightarrow B \vee A$$

oikeaksi totuustaulujen avulla.

5.

a)	A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A)$
	1	1	1	1	1
	1	0	0	0	1
	0	1	0	0	1
	0	0	0	0	1
b)	A	B	$A \vee B$	$B \vee A$	$(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$
	1	1	1	1	1
	1	0	1	1	1
	0	1	1	1	1
	0	0	0	0	1

6. Muodosta atomilauseista A ja B lause, joka on loogisesti ekvivalentti lauseen X kanssa.

A	B	X
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

6.

A	B	X	$\neg(A \wedge B)$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1

7. Tutki, onko lause loogisesti ristiriitainen.

a) $\neg(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$,

b) $(\neg A \wedge B) \wedge (A \leftrightarrow B)$,

c) $(\neg(A \rightarrow B) \wedge C) \wedge B$.

7.

a)

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$
1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1	1

Lause ei ole loogisesti ristiriitainen.

b)

A	B	$\neg A$	$\neg A \wedge B$	$A \leftrightarrow B$	$(\neg A \wedge B) \wedge (A \leftrightarrow B)$
1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0

Lause on loogisesti ristiriitainen.

c)

A	B	C	$A \rightarrow B$	$\neg(A \rightarrow B)$	$\neg(A \rightarrow B) \wedge C$	$(\neg(A \rightarrow B) \wedge C) \wedge B$
1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0

Lause on loogisesti ristiriitainen.

8. Tulkitse sanallisesti

a) De Morganin 2. laki

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

b) modus ponens -päättelysääntö

$$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$$

c) reductio ad absurdum -päättelysääntö

$$(\neg A \rightarrow (B \wedge \neg B)) \rightarrow A$$

8.

a) Lauseet ”Ei ole totta, että A tai B” ja ”Ei A eikä B” ovat loogisesti ekvivalentit.

b) Jos A tapahtuu ja A:sta seuraa B, B tapahtuu

c) Ristiriidasta seuraa mitä vain.

9. Osoita

a) kaksoisnegaation laki,

b) De Morganin 1. laki,

c) modus ponens -päättelysääntö

oikeaksi totuustaulujen avulla.

9.

a)

A	$\neg A$	$\neg\neg A$	$\neg\neg A \leftrightarrow A$
1	0	1	1
0	1	0	1

b)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

c)

A	B	$A \rightarrow B$	$A \wedge (A \rightarrow B)$	$A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

10. Osoita kontraposition laki oikeaksi ilman totuustauluja. Vihje: Voit korvata implikaation $A \rightarrow B$ loogisesti ekvivalentilla lauseella $\neg A \vee B$.

11. Esitä lauseelle ”jos Jaakko saa logiikan kurssista arvosanan 10, hän tarjoaa ystävilleen kahvit” kolme loogisesti ekvivalenttia lausetta.
12. Osoita lauseet loogisesti ekvivalenteiksi päättelysääntöjen avulla ilman totuustauluja.

- a) $A \wedge B$ ja $\neg(\neg A \vee \neg B)$,
 b) $C \rightarrow (\neg A \wedge B)$ ja $(A \vee \neg B) \rightarrow \neg C$.
 c) $A \wedge (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg B$ ja $B \rightarrow \neg A \vee \neg(B \rightarrow \neg A)$.

13. * Kolmiarvologiikassa on kolme totuusarvoa: 1 tosi, 0 epätosi ja u epävarma. Kleenen totuustaulut perustuvat ajatukseen, että epävarma voi myöhemmin osoittautua todeksi tai epätodeksi. Alla on esitetty negaation ja konjunktion totuustaulut. Täydennä oheinen disjunktion totuustaulu. Laadi implikaation ja ekvivalenssin totuustaulut.

A	$\neg A$
1	0
0	1
u	u

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0
1	u	u
u	1	u
0	u	0
u	0	0
u	u	u

A	B	$A \vee B$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	
1	u	
u	1	
0	u	
u	0	
u	u	

Kotitehtäviä

1. Osoita lause tautologiaksi.

- a) $A \rightarrow A$.
- b) $A \wedge B \rightarrow A$.
- c) $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$.

2. Tutki, onko lause tautologia.

- a) $(A \wedge B \rightarrow \neg C) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$.
- b) $(\neg A \leftrightarrow (B \wedge C)) \leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow B \wedge C)$.

3. Olkoot A : ”tunti jatkuu” ja B : ”kello soi”. Kirjoita luonnollisella kielellä lauseet $A \rightarrow \neg B$ ja $B \rightarrow \neg A$. Osoita totuustaulujen avulla, että lauseet ovat loogisesti ekvivalentit.

4. Osoita, että lauseet ovat loogisesti ekvivalentit.

- a) ”Tero soittaa kitaraa, mutta Suvi ei laskettele” ja ”ei ole niin, että jos Tero soittaa kitaraa, niin Suvi laskettelee”.
- b) ”Jos Tero soittaa kitaraa tai Suvi laskettelee, niin Anni kirjoittaa runoja” ja ”jos Tero soittaa kitaraa, niin Anni kirjoittaa runoja, ja jos Suvi laskettelee, niin Anni kirjoittaa runoja”.

5. Sievennä lause eli muodosta mahdollisimman yksinkertainen lause, joka on loogisesti ekvivalentti alkuperäisen lauseen kanssa.

- a) $(A \wedge B) \vee A$.
- b) $(A \vee B) \wedge A$.
- c) $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

6. Osoita osittelulait

a)

$$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C),$$

b)

$$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

oikeaksi totuustaulujen avulla.

7. Muodosta atomilauseista A ja B lause, joka on loogisesti ekvivalentti lauseen Y kanssa.

A	B	Y
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

8. Tarkastele seuraavaa ennustetta: maapallon öljyvarat ehtyvät, jos ja vain jos länsimaiset demokratiat romahtavat, mutta ei pidä paikkaansa, että jos maapallon öljyvarat ehtyvät, niin länsimaiset demokratiat romahtavat. Mitä ennusteeseen pitäisi suhtautua?

9. Mainitse esimerkki tilanteesta, jossa olet käyttänyt

- a) modus ponens -päätelysääntöä
- b) modus tollens -päätelysääntöä.

10. Osoita

- a) De Morganin 2. laki,
- b) modus tollens -päätelysääntö,
- c) reductio ad absurdum -päätelysääntö

oikeaksi totuustaulujen avulla.

11. Osoita lauseet loogisesti ekvivalenteiksi päätelysääntöjen avulla ilman totuustauluja.

- a) $\neg\neg\neg\neg A$ ja $\neg A$,
- b) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ ja $\neg(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$.
- c) $\neg(A \wedge B \wedge \neg C)$ ja $\neg A \vee \neg B \vee C$.

12. Shefferin viivaan ja Peircen nuoleen on tutustuttu edellisen kappaleen kotitehtävässä 12. Esitä negatio, konjunktio ja disjunktio a) Shefferin viivan avulla b) Peircen nuolen avulla.

13. * Sumea logiikka on kaksiarvoisen logiikan laajennus, jossa lauseella on diskreetin totuusarvon (tosi tai epätosi) sijasta reaalinen totuusarvo, joka kuuluu välille $[0, 1]$. Konnektiivit voidaan määritellä esimerkiksi seuraavasti:

$$\begin{aligned}\neg A &= 1 - A, \\ A \wedge B &= \min(A, B), \\ A \vee B &= \max(A, B), \\ A \rightarrow B &= \min(1, 1 - A + B),\end{aligned}$$

missä min tarkoittaa luvuista pienempää ja max suurempaa.

- a) Olkoot lauseen A totuusarvo 0,3 ja lauseen B totuusarvo 0,5. Laske lauseiden $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$ ja $A \rightarrow B$ totuusarvot.
- b) Osoita, että jos lauseet A ja B saavat vain arvoja 0 ja 1, niin edellä mainitut määritelmät johtavat klassisen kaksiarvoisen logiikan totuustauluihin.
- c) Osoita, että sumeassa logiikassa $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$.
- d) Etsi Internetistä sumean logiikan käyttökohteita.

14. * Tutustu Wolfram Alphan logiikkatoimintoihin

%tt <http://www.wolframalpha.com/examples/BooleanAlgebra.html> ja yritä laskea sen avulla joitakin kirjan tehtäviä.

LUKU 3

Luku 3

3.1 Tehtäväsarja 1

Tehtäviä

1. Onko lause tosi?

- a) $K \subset A$
- b) $A \subset V$
- c) $V \subset P$
- d) $V \subset T$

Merkinnät ovat samat kuin esimerkissä 3.15.

1.

- a) Tosi.
- b) Epätosi.
- c) Tosi.
- d) Epätosi.

2. Olkoot $A = \{7, 8, 9\}$ ja $B = \{5, 6, 7\}$. Määritä joukot

- a) $A \cup B$,
- b) $A \cap B$,
- c) $A \setminus B$,
- d) $B \setminus A$.

2.

- a) $\{5, 6, 7, 8, 9\}$
- b) $\{7\}$
- c) $\{8, 9\}$
- d) $\{5, 6\}$

3. Olkoot perusjoukko X aakkoset, A vokaalit ja $B = \{x, y, z\}$. Määritä joukot

- a) $B \setminus A$,
- b) $A \cap B$,
- c) $\mathbb{C}A$,
- d) $A \setminus X$.

3.

- a) $\{x, z\}$
- b) $\{y\}$
- c) $\mathbb{C}A$ on konsonanttien joukko, eli $\{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, z\}$
- d) $\emptyset$

4. Olkoot A koulussa opiskelevien täysi-ikäisten opiskelijoiden joukko ja B niiden opiskelijoiden joukko, jotka asuvat vanhempiensa luona. Millaiset opiskelijat kuuluvat joukkoon

- a) $A \cap B$,
- b) $\complement A$,
- c) $A \cup \complement B$,
- d) $A \setminus B$,
- e) $B \setminus A$,
- f) $\complement(A \cup B)$?

4.

Perusjoukko on koulun opiskelijat.

- a) Vanhempiensa luona asuvat täysi-ikäiset.
- b) Alle täysi-ikäiset.
- c) Opiskelijat, jotka ovat täysi-ikäisiä tai eivät asu vanhempiensa luona.
- d) Täysi-ikäiset, jotka eivät asu vanhempiensa luona.
- e) Vanhempiensa luona asuvat, jotka eivät ole täysi-ikäisiä.
- f) Opiskelijat, jotka eivät ole täysi-ikäisiä eivätkä asu vanhempiensa luona.

5. Olkoot $A \cap B$, $A \setminus B$ ja $B \setminus A$ epätyhjiä joukkoja. Esitä Venn-diagrammissa varjostettuna alue, joka kuvaa joukkoa

- a) $\complement(A \cup B)$,
- b) $\complement(A \cap B)$,
- c) $\complement B \cap A$.

6. Luokalla on 30 opiskelijaa. Heistä 14 harrastaa jääkiekkoa, 12 jalkapalloa ja 3 molempia.

- a) Kuinka moni opiskelija harrastaa pelkkää jääkiekkoa?
- b) Kuinka moni opiskelija harrastaa pelkkää jalkapalloa?
- c) Kuinka moni opiskelija ei harrasta kumpaakaan?

Vihje: Tilanteesta kannattaa piirtää Venn-diagrammi.

6.

- a) 11
- b) 9
- c) 7

7. Olkoot perusjoukko $\mathbb{R}$ sekä joukot A ja B reaalilukuvälit $A = [1, 5]$ ja $B = [3, 6]$. Ilmaise välimerkintää käyttäen joukot

- a) $A \cap B$,
- b) $A \cup B$,
- c) $A \setminus B$,
- d) $\complement A$.

7.

- a) $[3, 5]$
- b) $[1, 6]$
- c) $[1, 3[$
- d) $] - \infty, 1[\cup]5, \infty[$

8. Yhdistä samaa tarkoittavat lauseet.

A	$(x \in A) \wedge (x \in B)$	1	$x \in \complement A$
B	$x \notin A$	2	$x \in A \setminus B$
C	$(x \in A) \vee (x \in B)$	3	$x \in (A \cap B)$
D	$(x \in A) \wedge (x \notin B)$	4	$x \in (A \cup B)$

8. A3, B1, C4, D2

9. Osoita Venn-diagrammin avulla, että

a)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

b)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

10. Sievennä Venn-diagrammin avulla.

- a) $(B \cap A) \cup (B \cap \complement A)$
- b) $\complement(A \cup B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

10.

- a) B
- b) perusjoukko

11. Olkoot perusjoukko kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$, W parillisten kokonaislukujen joukko ja Y luvulla 3 jaollisten kokonaislukujen joukko. Näitä joukkoja voidaan merkitä $W = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ja $Y = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Määritä joukot

- a) $W \cap Y$,
- b) $W \setminus Y$,
- c) $W \cup Y$.

11.

- a) Kuudella jaolliset luvut, eli $\{6n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- b) Parilliset luvut, jotka eivät ole jaollisia kolmella. $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}, \frac{n}{3} \notin \mathbb{Z}\}$
- c) Luvut, jotka ovat jaollisia kahdella tai kolmella. $\{2n, 3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

12. Onko lause tosi?

- a) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
- b) $-3 \in \mathbb{N}$
- c) $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- d) $\frac{4}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$
- e) $\emptyset \subset \mathbb{Z}$

12.

- a) Tosi.
- b) Epätosi.
- c) Tosi.
- d) Epätosi.
- e) Tosi. Tyhjä joukko on minkä tahansa joukon osajoukko.

13. Määritä joukon

- a) $\{1, 2\}$
- b) $\{1, 2, 3\}$

kaikki osajoukot.

13.

- a) $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$
- b) $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

14. * Joukon A **potenssijoukoksi** $\mathcal{A}(A)$ kutsutaan kaikkien joukon A osajoukkojen muodostamaa joukkoa:

$$\mathcal{A}(A) = \{B \mid B \subset A\}.$$

- a) Määritä joukon $\{1, 2, 3\}$ potenssijoukko.
- b) Määritä tyhjän joukon $\emptyset$ potenssijoukko.
- c) Joukko $\{\emptyset\}$ on joukko, jonka ainut alkio on tyhjä joukko. Määritä joukon $\{\emptyset\}$ potenssijoukko.

14.

- a) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
- b) $\{\emptyset\}$
- c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

15. * Luonnolliset luvut voidaan tulkita joukko-opillisesti käyttämällä edellisessä tehtävässä esitettyä potenssijoukon käsitettä. Ajatuksena on, että lukua 0 vastaa tyhjä joukko $\emptyset$ ja kutakin luonnollista lukua $n + 1$ vastaava joukko on luonnollista lukua n vastaavan joukon potenssijoukko. Siis esimerkiksi lukua 1 vastaa tyhjän joukon $\emptyset$ potenssijoukko $\mathcal{A}(\emptyset)$, lukua 2 potenssijoukko $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\emptyset))$ ja niin edelleen.

- a) Määritä lukuja 3 ja 4 vastaavat joukot.
- b) Mitä luonnollista lukua vastaa joukko $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$?
- c) Vastaako joukko $\{\{\emptyset\}\}$ jotakin luonnollista lukua?

15.

- a) Lukua yksi vastaa joukko $\{\emptyset\}$, lukua kaksi $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, lukua kolme $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ ja lukua neljä $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.
- b) Lukua kaksi.
- c) Ei vastaa.

Kotitehtäviä

1. Olkoot $A = \{a, b, c, d\}$ ja $B = \{a, c, e\}$. Määritä joukot

- a) $A \cup B$,
- b) $A \cap B$,
- c) $A \setminus B$,
- d) $B \setminus A$.

1.

- a) $\{a, b, c, d, e\}$
- b) $\{a, c\}$
- c) $\{a, b, d\}$
- d) $\{e\}$

2. Onko lukujoukkoja koskeva lause tosi?

- a) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$
- b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
- c) $\mathbb{R} \subset \mathbb{Z}$
- d) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{N}$
- e) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$

2.

- a) Epätosi.
- b) Tosi.
- c) Epätosi.
- d) Epätosi.
- e) Tosi.

3. Olkoot perusjoukko X aakkoset, $A = \{j, o, k, u\}$, $B = \{k, o, j, u\}$ ja $C = \{k, a, j, o\}$. Määritä joukot

- a) $A \setminus B$,
- b) $(A \cap B) \cup C$,
- c) $A \setminus \mathbb{C}(B \cup C)$.

3.

- a) $\emptyset$
- b) $\{j, o, k, u, a, o\}$
- c) $\{j, o, k, u\}$

4. Olkoot X perusjoukko ja A jokin perusjoukon osajoukko. Sievennä.

- a) $A \cup \emptyset$
- b) $A \cap \emptyset$
- c) $A \cap X$
- d) $A \cup X$

4.

- a) A
- b) $\emptyset$
- c) A
- d) X

5. Olkoot $A \subset B$ ja $B \setminus A$ epätyhjä. Esitä Venn-diagrammissa varjostettuna alue, joka kuvaa joukkoa

- a) $B \setminus A$,
- b) $\complement A \cap B$,
- c) $A \cup \complement B$.

6. Olkoon perusjoukko X kaikkien kalenterivuoden päivien joukko. Olkoot A arkipäivien (maanantai–perjantai) joukko, L liputuspäivien joukko ja T toukokuulle ajoittuvien päivien joukko. Millaiset päivät kuuluvat joukkoon

- a) $\complement A$
- b) $L \cap \complement T$
- c) $L \setminus A$
- d) $T \setminus (A \cup L)$
- e) $\complement(A \cup L \cup T)$?

6.

- a) Lauantait ja sunnuntait.
- b) Muut kuin toukokuun liputuspäivät.
- c) Lauantaiden ja sunnuntaiden liputuspäivät.
- d) Toukokuun lauantait ja sunnuntait, jotka eivät ole liputuspäiviä.
- e) Lauantait ja sunnuntait, jotka eivät ole liputuspäiviä eivätkä ole toukokuussa.

7. Onko lause tosi?

- a) $0 \in \{0, 1, 2\}$
- b) $\{0\} \subset \{0, 1, 2\}$
- c) $\emptyset \subset \{1, 2\}$
- d) $\{\text{å, ä, ö}\} \subset \{\text{o, ä, ö}\}$

7.

- a) On.
- b) On.
- c) On.
- d) Ei.

8. Luokan opiskelijoista kahdeksalla on läppäri, kymmenellä pöytäkone ja viidellä tabletti. Kahdella opiskelijalla on sekä läppäri että pöytäkone, kolmella sekä tabletti että pöytäkone, mutta kellään ei ole sekä läppäriä että tablettia. Kahdella opiskelijalla ei ole mitään tietokonetta.

- a) Piirrä tilannetta kuvaava Venn-diagrammi.
- b) Kuinka monella opiskelijalla on läppäri mutta ei pöytäkonetta?
- c) Kuinka monella opiskelijalla on vain pöytäkone?
- d) Kuinka monta opiskelijaa luokalla on?

8.

- a) -
- b) 6
- c) 5
- d) 20

9. Olkoot perusjoukko $\mathbb{R}$ sekä joukot A ja B reaalilukuvälit $A =]-1, 2[$ ja $B = [0, 4[$. Ilmaise välimerkintää käyttäen joukot

- a) $A \cup B$,
- b) $A \cap B$,
- c) $\complement(A \cap B)$,
- d) $B \setminus A$,
- e) $B \setminus (A \cap B)$,
- f) $A \cap \complement B$.

9.

- a) $] -1, 4[$
- b) $[0, 2[$
- c) $] -\infty, 0[\cup [2, \infty[$
- d) $[2, 4[$
- e) $[2, 4[$
- f) $] -1, 0[$

10. Osoita Venn-diagrammin avulla, että

a)

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B),$$

b)

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

11. Jos $A \subset B$ ja $B \subset C$, niin mitä voidaan päätellä joukoista A ja C ?

Perustele

- a) Venn-diagrammin avulla,
- b) osajoukon määritelmän avulla.

11.

- a) (kuva jätetty pois)
- b) $A \subset C$

12. Onko lause tosi?

- a) $A \cap B \subset A$
- b) $\complement(\complement A) = A$
- c) $(A \cup B) \setminus B = A$
- d) $A \cap \complement B = A \setminus B$
- e) $B \cap \complement B = B$

12.

- a) On.
- b) On.
- c) Jos ja vain jos $A \cap B = \emptyset$.
- d) On.
- e) Jos ja vain jos $B = \emptyset$.

13. Tarkastellaan kaksinumeroisia luonnollisia lukuja 10, 11, ..., 98, 99.

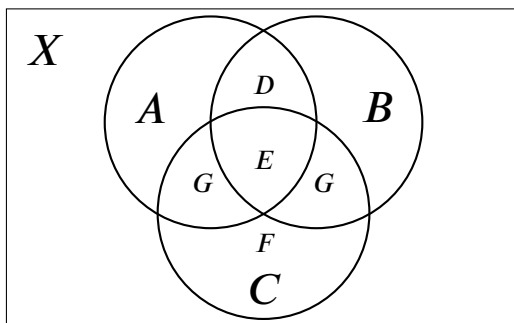
- a) Kuinka monta kaksinumeroista luonnollista lukua on olemassa?
- b) Kuinka moni niistä on jaollinen luvulla 4? Kuinka moni ei ole jaollinen luvulla 4?
- c) Kuinka moni kaksinumeroisista luonnollisista luvuista on jaollinen luvulla 6?
- d) Kuinka moni kaksinumeroisista luonnollisista luvuista on jaollinen luvuilla 4 ja 6?
- e) Kuinka moni kaksinumeroisista luonnollisista luvuista on jaollinen luvulla 4 tai luvulla 6?
- f) Kuinka moni kaksinumeroisista luonnollisista luvuista ei ole jaollinen luvulla 4 eikä luvulla 6?
- g) Piirrä tilanteesta Venn-diagrammi.

13.

- a) 90
- b) 22 jaollista, 68 epäjaollista
- c) 15
- d) 8
- e) 29
- f) $90 - 29 = 61$
- g) (kuva jätetty pois)

14. Merkitään kuvan ympyröiden sisään jääviä joukkoja kirjaimilla A , B ja C . Ilmaise joukkomerkitöjä käyttäen joukkojen A , B ja C avulla kuvan

- a) alue D ,
- b) alue E ,
- c) alue F ,
- d) alue G .



14.

- a) $D = (A \cap B) \setminus C$
- b) $E = (A \cap B) \cap C$
- c) $F = C \setminus (A \cup B)$
- d) $G = ((A \cup B) \cap C) \setminus ((A \cap B) \cap C)$

3.2 Tehtäväsarja 2

Tehtäviä

1. Olkoot $A(x)$ avoin lause ”paikkakunnalla x paistaa aurinko” ja $T(x)$ avoin lause ”paikkakunnalla x tuulee”. Suomenna lause.

- a) $\neg T(x)$,
- b) $A(x) \wedge T(y)$,
- c) $\neg A(\text{Lempäälä})$,
- d) $\neg(A(\text{Turku}) \rightarrow T(\text{Kuopio}))$.

2. Olkoot $S(x)$ avoin lause ” x on suomalainen formulakuljettaja” ja $E(x)$ avoin lause ” x on eurooppalainen formulakuljettaja, joka ei ole suomalainen”. Kuljettaja voi olla joko nykyinen tai entinen. Ratkaise avoin lause, kun perusjoukko on $\{\text{Räikkönen, Vettel, Senna}\}$.

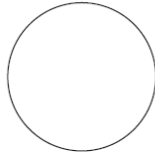
- a) $S(x)$,
- b) $\neg S(x)$,
- c) $E(x)$,
- d) $\neg(S(x) \vee E(x))$.

3. Olkoon $Q(x)$ avoin lause ” $x^2 = 64$ ”. Onko lause a) $Q(-8)$ b) $Q(6)$ tosi?

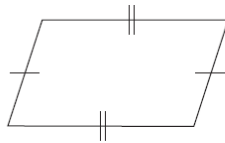
4. Olkoon $P(x, y)$ avoin lause ” $x^2 + y \leq 0$ ”. Onko lause a) $P(0, 0)$ b) $P(-1, 1)$ c) $P(5, -100)$ tosi?

5. Olkoot $S(x)$ avoin lause ”kuvio x on symmetrinen jonkin suoran suhteen” ja $P(x)$ avoin lause ”kuvio x on symmetrinen jonkin pisteen suhteen”. Perusjoukon muodostavat oheiset kuviot. Ratkaise avoin lause.

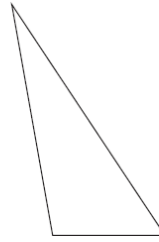
- a) $S(x)$,
- b) $P(x)$,
- c) $\neg(S(x) \vee P(x))$,
- d) $S(x) \leftrightarrow P(x)$.



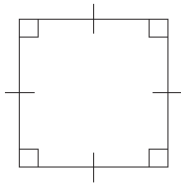
A



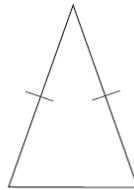
B



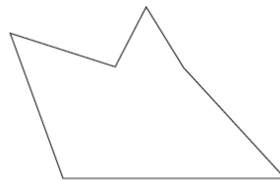
C



D



E



F

6. Ratkaise avoin lause $4x^2 + 7x - 2 = 0$, kun perusjoukko on a) reaalilukujen joukko b) kokonaislukujen joukko.

7. Olkoot perusjoukko $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$, $A(x)$ avoin lause ” $x \leq 1$ ” ja $B(x)$ avoin lause ” $x > 5$ ”. Ratkaise avoin lause.

- a) $A(x)$,
- b) $\neg B(x)$,
- c) $A(x) \wedge B(x)$,
- d) $\neg A(x) \rightarrow B(x)$.

8. Arvotaan kaksi lukua, joista molemmat voivat olla 1, 2 tai 3. Arvonnan tuloksena saadaan lukupari (x, y) , missä x on ensimmäisen arvonnän tulos ja y toisen arvonnän tulos. Olkoot avoimet lauseet $S(x, y)$: " $x \leq y$ " ja $T(x, y)$: " $\text{tulo } xy \text{ on jaollinen luvulla } 3$ ". Ratkaise avoin lause, kun perusjoukon muodostavat arvonnän tuloksena saatavat mahdolliset lukuparit

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$.

- a) $S(x, y)$,
- b) $\neg T(x, y)$,
- c) $\neg(S(x, y) \vee T(x, y))$,
- d) $S(x, y) \rightarrow T(x, y)$.

9. Ratkaise reaalilukujen joukossa

$$\begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x > -1. \end{cases}$$

- a) epäyhtälö $x^2 \leq 4$,
- b) epäyhtälöpari

10. Ratkaise reaalilukujen joukossa epäyhtälö

- a) $|x| > 5$,
- b) $|x| \leq 1$,
- c) $|x - 4| > 5$,
- d) $|2x - 6| \leq 1$.

11. Ratkaise avoin lause reaalilukujen joukossa. Ilmaise ratkaisujoukko myös välimerkintää käyttäen.

- a) $(x^2 > 1) \vee (0 \leq x \leq 2)$,
- b) $(x^2 > 1) \wedge (0 \leq x \leq 2)$,
- c) $(x^2 > 1) \rightarrow (0 \leq x \leq 2)$.

12. Olkoot $P(x)$ avoin lause $(x < 10) \wedge (x^2 = 100)$ ja $Q(x)$ avoin lause $(x \geq 10) \leftrightarrow (x^2 = 100)$. Ratkaise avoin lause reaalilukujen joukossa.

- a) $P(x)$,
- b) $Q(x)$,
- c) $P(x) \vee Q(x)$,
- d) $P(x) \wedge Q(x)$.

Kotitehtäviä

1. Olkoon $T(x, y)$ avoin lause ” x lähettää tekstiviestin y :lle”. Suomenna lause.

- a) $T(\text{Tiina}, \text{Elias})$,
- b) $\neg T(\text{Elias}, \text{Tiina}) \wedge T(\text{Elias}, \text{Vilma})$,
- c) $T(x, x)$,
- d) $T(y, \text{Rasmus}) \leftrightarrow T(\text{Rasmus}, y)$.

2. Olkoot $E(x)$ avoin lause ” x on eurooppalainen pääkaupunki” ja $S(x)$ avoin lause ” x on suomalainen kaupunki”. Ratkaise avoin lause, kun perusjoukko on $\{\text{Helsinki}, \text{Rovaniemi}, \text{Praha}, \text{Milano}\}$.

- a) $E(x)$,
- b) $\neg S(x)$,
- c) $S(x) \wedge \neg E(x)$,
- d) $\neg(E(x) \wedge S(x))$,
- e) $E(x) \leftrightarrow S(x)$.

3. Olkoon $R(x)$ avoin lause ” $x^2 - 100 > 0$ ”. Onko lause a) $R(10)$ b) $R(-15)$ tosi?

4. Olkoon $S(x, y)$ avoin lause ” $x^2 + y^2 = 5$ ”. Onko lause a) $S(2, 3)$ b) $S(2, -1)$ c) $S(-\sqrt{5}, 0)$ d) $S(-1, -1)$ tosi?

5. Ratkaise avoin lause $9x^2 + 30x + 25 \leq 0$, kun määrittelyjoukko on a) reaalilukujen joukko b) kokonaislukujen joukko.

6. Olkoot perusjoukko $\{1, 2, 3, \dots, 16\}$, $C(x)$ avoin lause ”luku 12 on jaollinen luvulla x ” ja $D(x)$ avoin lause ”luvun x neliöjuuri on kokonaisluku”. Ratkaise avoin lause.

- a) $C(x)$,
- b) $D(x)$,
- c) $\neg C(x) \wedge D(x)$,
- d) $C(x) \leftrightarrow D(x)$.

7. Arvotaan kolme lukua, joista jokainen voi olla 1 tai 2. Arvonnan tuloksena saadaan lukukolmikko (x, y, z) , missä x on ensimmäisen arvonnän tulos, y toisen arvonnän tulos ja z kolmannen arvonnän tulos. Olkoot avoimet lauseet $S(x, y, z)$: " $x + y + z \geq 5$ ", $T(x, y, z)$: "tulo xyz on pariton" ja $U(x, y, z)$: "summa $x + y + z$ on jaollinen luvulla 3". Ratkaise avoin lause, kun perusjoukon muodostavat arvonnän tuloksena saatavat mahdolliset lukukolmikot

$(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2)$.

- a) $S(x, y, z)$,
- b) $T(x, y, z)$,
- c) $U(x, y, z)$,
- d) $S(x, y, z) \wedge T(x, y, z)$,
- e) $S(x, y, z) \vee \neg U(x, y, z)$,
- f) $\neg(S(x, y, z) \vee T(x, y, z) \vee U(x, y, z))$,
- g) $S(x, y, z) \wedge (T(x, y, z) \leftrightarrow U(x, y, z))$.

8. Ratkaise reaalitylukujen joukossa.

- a) $x^2 = 1$ tai $x(x + 5)(x - 1) = 0$
- b) $x^2 = 1$ ja $x(x + 5)(x - 1) = 0$

9. Ratkaise reaalitylukujen joukossa

$$\begin{cases} x^2 - 11x + 30 > 0 \\ 2x > -6 - x. \end{cases}$$

- a) epäyhtälö $x^2 - 11x + 30 > 0$,
- b) epäyhtälöpari

10. Ratkaise avoin lause reaalitylukujen joukossa. Ilmaise ratkaisujoukko myös välimerkintää käyttäen.

- a) $(-4 < x) \vee (x < 8)$,
- b) $(-4 < x) \wedge (x < 8)$,
- c) $((-4 < x) \wedge (x < 8)) \wedge (-5 \leq x \leq -3)$,
- d) $(-4 < x) \leftrightarrow (-5 \leq x \leq -3)$.

11. Olkoot $A(x)$ avoin lause $(x \geq 0) \rightarrow (x \geq 20)$ ja $B(x)$ avoin lause $\neg((x \leq 0) \vee (x \geq 20))$. Ratkaise avoin lause reaalitylukujen joukossa.

- a) $A(x)$,
- b) $B(x)$,
- c) $A(x) \vee B(x)$.

3.3 Tehtäväsarja 3

Tehtäviä

1. Olkoon lause $+T(x)$: ”opiskelija x on täysi-ikäinen” ja $+$ perusjoukko kaikki koulun opiskelijat. Suomenna lause.

- a) $\forall x T(x)$
- b) $\exists x T(x)$
- c) $\exists x \neg T(x)$
- d) $\forall x \neg T(x)$

2. Suomenna lause. Onko lause tosi? Perustele.

- a) $\forall x \in \mathbb{R} (|x| > 0)$
- b) $\forall x \in \mathbb{R} (|x| \geq 0)$
- c) $\exists x \in \mathbb{N} (x^2 < 2)$
- d) $\exists x \in \mathbb{N} (x^2 = 2)$

3. Formalisoi lause. Onko lause tosi? Perustele.

- a) Jokainen kokonaisluku on joko positiivinen tai negatiivinen.
- b) On olemassa sellainen kokonaisluku, jonka neliöjuuri on yhtä suuri kuin luku itse.
- c) Minkään kokonaisluvun neliö ei ole 7.

4. Osoita, että yhtälö $\sqrt{x^2} = x$ ei pidä paikkaansa kaikilla reaaliluvuilla.

5. Jalkapallojoukkue on lähdössä turnausmatkalle. Olkoon $P(x, y)$ avoin lause ”pelaajalla x on pelaajan y puhelinnumero”. Suomenna lause.

- a) $\forall x \exists y P(x, y)$
- b) $\exists x \forall y P(x, y)$
- c) $\exists y \forall x P(x, y)$

6. Formalisoi lause. Onko lause tosi?

- a) Positiivisten kokonaislukujen joukossa on pienin alkio.
- b) Negatiivisten kokonaislukujen joukossa on pienin alkio.

7. Onko lause tosi? Perustele.

- a) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} (xy = 1)$
- b) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} (xy = y)$

8. Onko lause tosi? Perustele.

- a) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} (xy = x + y)$
- b) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} (xy = x + y)$

9. Olkoon $M(x)$: ” x on matemaatikko”. Formalisoi lause.

- a) Kaikki eivät ole matemaatikkoja.
- b) Joku ei ole matemaatikko.
- c) Ei ole olemassa matemaatikkoa.
- d) Kukaan ei ole matemaatikko.

10. Muodosta lauseen negaatio.

- a) $\forall x \in \mathbb{Z}(x < 12)$
- b) $\exists x \in \mathbb{Z}(x^2 = 12)$
- c) $\exists x \in \mathbb{N}((x^2 = 9) \wedge (x < 5))$
- d) $\forall x \in \mathbb{N}((x = 0) \vee (x \geq 1))$

11. Osoita, että lause $\exists a, b, c \in \mathbb{Z}_+(a^2 + b^2 = c^2)$ on tosi.

12. * Olkoot $M(x)$: ” x on matemaatikko” ja $I(x)$: ” x on iloinen”. Formalisoi lause.

- a) Kaikki ovat iloisia matemaatikkoja.
- b) Matemaatikot ovat iloisia.
- c) Kukaan matemaatikko ei ole iloinen.
- d) Kaikki matemaatikot eivät ole iloisia.

13. * Olkoot $K(x)$: ” x on kampaaja” ja $T(x, y)$: ” x tekee y :lle kampauksen”. Formalisoi lause.

- a) Kukaan kampaaja ei tee kampausta itselleen.
- b) Joku kampaaja tekee kampauksen niille kampaajille, jotka eivät tee kampausta itselleen.

Kotitehtäviä

1. Olkoon perusjoukko xy -tason suorien joukko. Olkoot lauseet $N(x)$: ”suora on nouseva” ja $L(x)$: ”suora on laskeva”. Suomenna lause. Onko lause tosi?

- a) $\exists x L(x)$
- b) $\forall x (N(x) \vee L(x))$
- c) $\exists x (\neg N(x) \wedge \neg L(x))$
- d) $\forall x \neg N(x)$

2. Onko lause tosi? Perustele.

- a) $\forall x \in \mathbb{R} (x^2 \geq 0)$
- b) $\exists x \in \mathbb{N} (x^2 = -9)$
- c) $\forall x \in \mathbb{R} ((x-1)(x-3) \geq 0)$
- d) $\exists x \in \mathbb{Z} (-x^2 - 2 \leq 0)$

3. Onko lause tosi? Perustele.

- a) $\exists x \in \mathbb{R} (x^2 - 3x + 3 = 0)$
- b) $\forall x \in \mathbb{R} (x^2 - 3x + 3 \geq 0)$

4. a) Osoita, että yhtälö $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ ei pidä paikkaansa kaikilla reaalityyppisillä x ja y .

b) Osoita, että on olemassa sellaiset reaalityypit x ja y , että yhtälö $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ pitää paikkansa.

c) Millä ehdolla yhtälö $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ pitää yleisesti paikkansa?

5. Olkoon $S(x, y)$: ” x on suorittanut kurssin y ”. Formalisoi lause.

- a) Joku on suorittanut kaikki kurssit.
- b) Jokainen on suorittanut ainakin yhden kurssin.
- c) Kukaan ei ole suorittanut kaikkia kursseja.
- d) On olemassa kurssi, jota kukaan ei ole suorittanut.

6. Onko lause tosi? Perustele.

- a) $\forall x \in \mathbb{Z}_+ \exists y \in \mathbb{Z}_+ (x = \sqrt{y})$
- b) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} (x^2 - 4 > y)$

7. Ilmaise suomen kielellä lauseen negaatio kahdella eri tavalla soveltamalla kvanttorien negaatioiden loogisesti ekvivalentteja muotoja.

- a) Jokainen opiskelija saa tästä kurssista arvosanan 10.
- b) On olemassa opiskelija, joka saa tästä kurssista arvosanan 10.

8. Kirjoita lause toisin.

- a) $\neg \forall x \neg P(x)$
- b) $\neg \exists x (P(x) \vee Q(x))$

9. Muodosta lauseen negaatio. Onko negaatio tosi?

- a) $\forall x \in]1, \infty[(\sqrt{x} < x)$
- b) $\exists x \in \mathbb{Q} (x^3 = 5)$
- c) $\forall n \in \mathbb{Z} \exists m \in \mathbb{Z} ((n = 2m) \vee (n = 2m + 1))$

10. Funktiota $f: X \rightarrow Y$ voidaan ajatella kahden muuttujan avoimena lauseena $P(x, y)$: ” $f(x) = y$ ”, missä x kuuluu määrittelyjoukkoon X ja y maalijoukkoon Y . Funktiolta edellytetään lisäksi, että

- $\forall x \exists y P(x, y)$, ja
- $\neg(\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z)))$.

Tulkitse sanallisesti tai kuvaa käyttäen, mitä tämä määritelmä tarkoittaa.

11. * Olkoot $S(x, y)$: ” x on suorittanut kurssin y ” ja $L(x)$: ” x on lukiolainen”. Formalisoi lause.

- a) Joku lukiolainen on suorittanut kaikki kurssit.
- b) Kukaan lukiolainen ei ole suorittanut kaikkia kursseja.

12. * Olkoot $S(x, y)$: ” x on suorittanut kurssin y ”, $L(x)$: ” x on lukiolainen” ja $M(y)$: ” y on pitkän matematiikan kurssi”. Formalisoi lause.

- a) Joku lukiolainen ei ole suorittanut yhtään pitkän matematiikan kurssia.
- b) Joku lukiolainen on suorittanut pitkän matematiikan kurssin.
- c) Jokaisella lukiolaisella on pitkän matematiikan kurssi suoritettuna.
- d) On olemassa pitkän matematiikan kurssi, jota kukaan lukiolainen ei ole suorittanut.

13. * Määritä kaikki funktiot $f: X \rightarrow Y$, kun $X = \{a, b, c\}$ ja $Y = \{1, 2\}$.

14. * Määritä kaikki funktiot $f: X \rightarrow Y$, kun $X = \emptyset$ ja $Y \neq \emptyset$.

15. * Määritä kaikki funktiot $f: X \rightarrow Y$, kun $X \neq \emptyset$ ja $Y = \emptyset$.

LUKU 4

Luku 4

4.1 Tehtäväsarja 1

Tehtäviä

1. a) Laske neljän peräkkäisen kokonaisluvun summa. Toista lasku useilla neljän peräkkäisen kokonaisluvun joukoilla. Mitä havaitset summasta?
- b) Jos neljän peräkkäisen kokonaisluvun joukon pienin luku on m , niin millainen esitysmuoto on kolmella muulla luvulla?
- c) Todista a-kohdan tulos matemaattisesti käyttäen hyväksi b-kohdan esitysmuotoja.

1.

- a) $1 + 2 + 3 + 4 = 10, 2 + 3 + 4 + 5 = 14, 3 + 4 + 5 + 6 = 18$
- b) $\{m, m + 1, m + 2, m + 3\}$
- c) $m + (m + 1) + (m + 2) + (m + 3) = m + m + m + m + 1 + 2 + 3 = 4m + 6 = 2(2m + 3)$

2. Todista, että parillisen ja parittoman kokonaisluvun summa on pariton.

2. Parillinen luku voidaan esittää muodossa $2k$ ja pariton luku muodossa $2l + 1$, missä $k, l \in \mathbb{Z}$. Tällöin summaksi saadaan $2k + 2l + 1 = 2(k + l) + 1$, joka on pariton.

3. Todista, että kahden parillisen kokonaisluvun tulo on parillinen.

3. Parilliset luvut voidaan esittää muodoissa $2k$ ja $2l$, missä $k, l \in \mathbb{Z}$. Tällöin tuloksi saadaan $2k \cdot 2l = 2(2kl)$, joka on parillinen.

4. Todista, että kahden rationaaliluvun tulo on rationaalinen.

4. Rationaaliluvut voidaan esittää muodoissa

5. Olkoot a ja b kokonaislukuja. Todista, että luku $a + b$ on parillinen silloin ja vain silloin, kun luku $a - b$ on parillinen.

5.

6. Olkoon m sellainen kokonaisluku, että m^2 on pariton. Todista, että tällöin m on pariton.

6.

7. Todista väite todeksi tai epätodeksi: Kahden irrationaaliluvun summa on aina irrationaaliluku.

7. (Epätosi.)

8. Luku $\sqrt{3}$ on irrationaaliluku. Todista, että $\sqrt{3} + 1/2$ on irrationaaliluku. Vihje: Käytä epäsuoraa todistusta.

8.

9. Todista, että irrationaaliluvun ja nollasta poikkeavan rationaaliluvun tulo on irrationaaliluku.

9.

10. Todista, että luku $\sqrt{6}$ on irrationaaliluku.

10.

11. Todista: Jos luku a on irrationaaliluku, niin myös luku

$$\frac{2a - 5}{3a - 11}$$

on irrationaaliluku. Vihje: Käytä symbolisen laskimen `solve`-toimintoa.

11.

12. Tarkastellaan suorakulmaista kolmiota, jonka kateettien pituudet ovat a ja b ja hypotenuusan pituus c . Todista väite todeksi tai epätodeksi.

- a) On olemassa sellainen suorakulmainen kolmio, jonka sivujen pituudet a , b ja c ovat kaikki parillisia kokonaislukuja.
- b) On olemassa sellainen suorakulmainen kolmio, jonka sivujen pituudet a , b ja c ovat kaikki parittomia kokonaislukuja.

12.

- a) (Tosi.)
- b) (Tosi.)

13. Kokonaisluvut $0, 1, 2, \dots, 12$ asetetaan mielivaltaiseen järjestykseen ympyrän kehälle. Todista, että joidenkin neljän peräkkäisen luvun summa on vähintään 26.

13. Vihje: tutki tilannetta, jossa olisi vain luvut $1, 2, \dots, 12$ (ilman nollaa).

Kotitehtäviä

1. a) Laske luonnollisten lukujen $1, 2, 3, \dots, 10$ neliöt.
b) Esitä väite luonnollisten lukujen neliöiden parillisuudesta tai parittomuudesta.
c) Todista väitteesi matemaattisesti.

1.

- a) $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$
- b) Luonnollisen luvun neliön parillisuus on sama kuin luvun itsensä.

2. Todista, että kolmen parittoman kokonaisluvun summa on pariton.

2.

3. Todista, että kolmen peräkkäisen kokonaisluvun summa on jaollinen luvulla 3.

3.

4. Todista, että kahden parittoman kokonaisluvun tulo on pariton.

4.

5. Olkoot a ja b reaalityyppiset luvut. Todista, että tulo $ab = 0$, jos ja vain jos $a = 0$ tai $b = 0$.

5.

6. Olkoon n kokonaisluku. Todista, että luku $n^2 + 3n + 1$ on aina pariton. Käytä a) suoraa b) epäsuoraa todistusta.

6.

7. Todista, että ei ole olemassa sellaisia positiivisia kokonaislukuja x ja y , jotka toteuttavat yhtälön $4^x = 7^y$.

7.

8. Todista väite todeksi tai epätodeksi: Kahden irrationaaliluvun tulo voi olla rationaaliluku.

8.

9. Todista, että luku $\sqrt{5}$ on irrationaaliluku. Tarvitset seuraavaa lisätietoa: jos kahden kokonaisluvun tulo on jaollinen luvulla 5, niin ainakin toinen tulon tekijöistä on jaollinen luvulla 5.

9.

10. Tarkastellaan paritonta määrää parittomia kokonaislukuja. Todista, että lukujen keskiarvo ei voi olla nolla.

10.

11. Tarkastellaan kolmiota, jonka sivujen pituudet ovat a , b ja c . Niin sanotun **Heronin kaavan** mukaan kolmion pinta-alalle pätee

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

missä $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Todista, että jos kolmion sivujen pituudet ovat luvulla 4 jaollisia kokonaislukuja, niin kolmion pinta-alan neliö on jaollinen luvulla 16.

11.

12. Niin sanotun **Fermat'n suuren lauseen** mukaan ei ole olemassa sellaisia positiivisia kokonaislukuja x , y ja z , jotka toteuttaisivat yhtälön $x^n + y^n = z^n$, missä n on lukua 2 suurempi kokonaisluku. Erityisesti siis yhtälöllä $x^3 + y^3 = z^3$ ei ole ratkaisua, jos x , y ja z ovat positiivisia kokonaislukuja. Käytä tätä tulosta hyväksesi a- ja b-kohtien ratkaisemisessa.

- a) Todista, että ei ole olemassa sellaisia positiivisia rationaalilukuja x , y ja z , jotka toteuttavat yhtälön $x^3 + y^3 = z^3$.
- b) Todista väite todeksi tai epätodeksi: ei ole olemassa sellaisia keskenään eri suuria kokonaislukuja x , y ja z , jotka toteuttavat yhtälön $x^3 + y^3 = z^3$.

12.

13. Olkoot a ja b reaalilukuja, joille pätee $0 \leq a \leq 1$ ja $0 \leq b \leq 1$. Todista, että tällöin $0 \leq \frac{a+b}{1+ab} \leq 1$.

13.

LUKU 5

Luku 5

5.1 Tehtäväsarja 1

Tehtäviä

1. Onko luku a) 50 b) 48 c) -72 d) -34 jaollinen luvulla 6?
2. Jakaako luku 13 luvun a) 117 b) -65 c) 160 d) -81 ?
3. Osoita, että a) $3|66$ b) $7 \nmid 120$ c) $15|(-330)$ d) $11 \nmid (-619)$.
4. Onko väite tosi?
 - a) $3|53$
 - b) $-9|108$
 - c) $12 \nmid (-158)$
 - d) $-7|175$
 - e) $-17 \nmid (-646)$
5. Kirjoita jakoyhtälö, kun
 - a) luku 7 jaetaan luvulla 3
 - b) luku 51 jaetaan luvulla 4
 - c) luku 1000 jaetaan luvulla 125
 - d) luku 3858 jaetaan luvulla 97.
6. Kirjoita jakoyhtälö, kun
 - a) luku -22 jaetaan luvulla 7
 - b) luku -2844 jaetaan luvulla 36
 - c) luku -3858 jaetaan luvulla 97.
7. Kirjoita jakoyhtälö jakolaskulle
 - a) $9/25$
 - b) $-9/25$
 - c) $124/120$
 - d) $-124/120$.
8. Päättele, mikä on jakojäännös, kun
 - a) luku 1967 jaetaan luvulla 5
 - b) luku -426 jaetaan luvulla 5
 - c) luku 67876 jaetaan luvulla 50
 - d) luku -30509 jaetaan luvulla 50.
9. Leipomossa on pakattavana 260 sämpylää. Kuinka monta täyttä pussia saadaan ja kuinka monta sämpylää jää yli, jos käytetään vain a) 24 b) 10 c) 6 d) 4 sämpylän pusseja?
10. Jos kello on nyt 13.05, niin mitä kello oli 2012 tuntia ja 45 minuuttia sitten?

11. a) Mikä luku jaettuna luvulla 17 antaa osamääräksi 98 ja jakojäännökseksi 5?
b) Mikä luku jaettuna luvulla 12 antaa osamääräksi -91 ja jakojäännökseksi 0?
c) Millä positiivisella kokonaisluvulla luku 146 on jaettava, jotta osamäärä olisi 3 ja jakojäännös 2?
d) Millä positiivisella kokonaisluvulla luku 72 on jaettava, jotta jakojäännös olisi 7?
12. Määritä osamäärä ja jakojäännös sekä kirjoita jakoyhtälö, kun a) luku $2^{18} + 10$ jaetaan luvulla $2^{15} + 1$ b) luku $3^{100} + 100$ jaetaan luvulla $3^{98} + 10$.
13. Olkoot a, b, c, r ja s kokonaislukuja ja $a \neq 0$. Osoita, että jos $a|b$ ja $a|c$, niin $a|(rb + sc)$.
14. Olkoot a, b, c ja d kokonaislukuja ja $a, b \neq 0$. Osoita, että jos $a|c$ ja $b|d$, niin $(ab)|(cd)$.
15. Osoita, että jos a ja b ovat parittomia kokonaislukuja, niin $4|(a^2 - b^2)$.
16. Olkoot a ja b nollasta eroavia kokonaislukuja. Mitä voidaan päätellä, jos $a|b$ ja $b|a$?
17. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Määritä osamäärä ja jakojäännös sekä kirjoita jakoyhtälö, kun
 - a) luku $5n + 3$ jaetaan luvulla 5
 - b) luku $n^2 + 2n + 2$ jaetaan luvulla $n + 1$
 - c) luku $n^3 + 3n^2 - n - 3$ jaetaan luvulla $n + 3$
 - d) luku $2n^3 + 3n^2 + 4n + 9$ jaetaan luvulla $2n + 3$.
18. a) Muodosta jakoyhtälö luvuille $0, 1, 2, \dots, 7$, kun jakajana on luku 3. Mitä arvoja jakojäännös voi saada?
b) Osoita, että jos kahden kokonaisluvun tulo on jaollinen luvulla 3, niin ainakin toinen luvuista on jaollinen luvulla 3. Vihje: Käytä epäsuoraa todistusta.

Kotitehtäviä

1. Onko luku a) 42 b) -75 c) 102 d) -98 jaollinen luvulla 7?
2. Jakaako luku 11 luvun a) -165 b) 21 c) -101 d) 209?
3. Osoita, että a) $2|234$ b) $-17|408$ c) $14 \nmid 223$ d) $6 \nmid (-472)$.
4. Onko väite tosi? a) $8 \nmid 168$ b) $13 \nmid (-95)$ c) $-5|777$ d) $29 \nmid 2583$ e) $-4|(-924)$
5. Kirjoita jakoyhtälö, kun
 - a) luku 9 jaetaan luvulla 6
 - b) luku 576 jaetaan luvulla 19
 - c) luku 3712 jaetaan luvulla 32.
6. Kirjoita jakoyhtälö, kun
 - a) luku -12 jaetaan luvulla 5
 - b) luku -147 jaetaan luvulla 6
 - c) luku -875 jaetaan luvulla 35.
7. Kirjoita jakoyhtälö jakolaskulle a) $3/17$ b) $-3/17$ c) $88/80$ d) $-88/80$.
8. Päättele, mikä on jakojäännös, kun
 - a) luku 5555 jaetaan luvulla 4
 - b) luku -555 jaetaan luvulla 4
 - c) luku 123456 jaetaan luvulla 100
 - d) luku -654321 jaetaan luvulla 100.
9. Tänään on keskiviikko. Mikä viikonpäivä a) on 1000 päivän kuluttua b) oli 500 päivää sitten?
10. Kello on 17.28 ja on tiistai. Mitä kello on 2073 tunnin kuluttua? Mikä viikonpäivä silloin on?
11. Tarkastellaan kirjainjonoa ABCDEFGABCDEFGFG... a) Mikä on jonon 12742. kirjain? b) Kuinka monta A-kirjainta on jonossa ennen sitä?
12.
 - a) Mikä luku jaettuna luvulla 19 antaa osamääräksi 6 ja jakojäännökseksi 13?
 - b) Mikä luku jaettuna luvulla 7 antaa osamääräksi -23 ja jakojäännökseksi 5?
 - c) Millä positiivisella kokonaisluvulla luku 1263 on jaettava, jotta osamäärä olisi 114 ja jakojäännös 9?
 - d) Millä positiivisella kokonaisluvulla luku -140 on jaettava, jotta jakojäännös olisi 3?

13. Olkoon n kokonaisluku. Osoita, että luku $(3n+1)^4 - (3n+1)^3$ on jaollinen luvulla 3. Vihje: Käytä symbolisen laskimen `expand`-toimintoa.

14. Olkoon n kokonaisluku. Osoita, että luku $(2n+1)^5 - (2n-1)^4 - 2n$ on jaollinen luvulla 16.

15. Määritä osamäärä ja jakojäännös sekä kirjoita jakoyhtälö, kun a) luku $7^{50} + 1$ jaetaan luvulla $7^{48} - 1$ b) luku $7^{50} - 1$ jaetaan luvulla $7^{25} + 1$.

16. Olkoot a , b ja c kokonaislukuja ja $a \neq 0$. Osoita, että jos $a|b$ ja $a|(b+c)$, niin $a|c$.

17. Olkoot p , q ja r positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että jos p on luvun q tekijä ja q on luvun r tekijä, niin p on luvun r tekijä.

18. Olkoot a , b ja c kokonaislukuja ja $a, c \neq 0$. Osoita, että jos $(ac)|(bc)$, niin $a|b$.

19. Olkoot a ja b kokonaislukuja. Osoita, että luku $a+b$ on jaollinen luvulla 3 silloin ja vain silloin, kun luku $a-2b$ on jaollinen luvulla 3.

20. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Määritä osamäärä ja jakojäännös sekä kirjoita jakoyhtälö, kun

- a) luku $2n^2 - n - 2$ jaetaan luvulla $n + 1$
- b) luku $n^3 + n^2 + 6$ jaetaan luvulla $n + 2$
- c) luku $n^2 + 2n - 1$ jaetaan luvulla n .

Vihje: Voit laskea polynomien jakolaskun symbolisen laskimen avulla.

21. * Todista jakoyhtälö, kun $a < 0$.

22. * **Lukujärjestelmä** tarkoittaa tapaa, jolla luvut kirjoitetaan numeroi-
den avulla. **Kantaluku** kertoo, kuinka monta eri numeroa lukujärjestelmän
luvuissa voi esiintyä. Esimerkiksi **kymmenjärjestelmässä** kantaluku on 10
ja käytössä ovat numerot 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9. Kymmenjärjestelmän lu-
ku 3258 muodostuu numeroista 3, 2, 5 ja 8 kantaluvun 10 potenssien avulla
seuraavasti:

$$\begin{aligned} 3258 &= 3 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 8 \\ &= 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0. \end{aligned}$$

Kymmenjärjestelmässä siis luvun viimeinen numero on luvun 10^0 kerroin,
toiseksi viimeinen luvun 10^1 kerroin, kolmanneksi viimeinen luvun 10^2 ker-
roin jne.

Kaksijärjestelmän eli **binäärijärjestelmän** luvut taas muodostuvat nume-
roista 0 ja 1. Esimerkiksi binääriluku 101101 voidaan ilmaista kymmenjär-
jestelmässä kirjoittamalla luku kantaluvun 2 potenssien avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned} 101101 &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 = 45. \end{aligned}$$

Kaksijärjestelmässä siis luvun viimeinen numero on luvun 2^0 kerroin, toi-
seksi viimeinen luvun 2^1 kerroin, kolmanneksi viimeinen luvun 2^2 kerroin
jne.

Kymmenjärjestelmän lukuja voidaan muuntaa binääriluvuiksi jakoyhtälöi-
den avulla. Muunnetaan luku 18 binääriluvuksi. Jaetaan ensin kymmenjär-
jestelmän luku 18 kaksijärjestelmään kantaluvulla 2 ja kirjataan ylös jako-
jäännös. Tämän jälkeen jaetaan edellisen jakolaskun osamäärä kantaluvulla
2 ja kirjataan taas jakojäännös muistiin. Näin jatketaan, kunnes osamääräksi
jää luku 0.

$$\begin{aligned} 18 &= 9 \cdot 2 + 0 \\ 9 &= 4 \cdot 2 + 1 \\ 4 &= 2 \cdot 2 + 0 \\ 2 &= 1 \cdot 2 + 0 \\ 1 &= 0 \cdot 2 + 1 \rightarrow \text{lopetetaan} \end{aligned}$$

Kirjoittamalla nyt jakojäännökset lopusta alkuun saadaan luku 10010. Se
on kymmenjärjestelmän luvun 18 binääriesitys.

a) Muunna binäärijärjestelmän luvut 1001 ja 110110100 kymmenjär-
jestelmään.

86 b) Muunna kymmenjärjestelmän luvut 25 ja 520 binäärijärjestelmään.
Luku 5. Luku 5
c) Etsi laskimesi ohjekirjasta, miten muunnokset voidaan toteuttaa las-
kimella.

5.2 Tehtäväsarja 2

Tehtäviä

1. Osoita, että a) $23 \equiv 8 \pmod{5}$ b) $1326 \equiv -546 \pmod{8}$ c) $403 \equiv 0 \pmod{13}$.
2. Määritä pienin epänegatiivinen luku, jonka kanssa luku a) 56 b) -72 c) 3857 on kongruentti modulo 6.
3. Määritä kaikki kokonaisluvut x , joille $x \equiv 7 \pmod{12}$ ja $18 < x < 130$.
4. Pitkäkestoiset kynttilät sytytettiin samaan aikaan. Toinen paloi 128 tuntia ja toinen 181 tuntia. Sammuivatko kynttilät samaan kellonaikaan?
5. Aaron syntymäpäiväjuhlat alkavat 912 tunnin kuluttua ja Mirkun syntymäpäiväjuhlat 1419 tunnin kuluttua.
 - a) Mihin kellonaikaan Mirkun juhlat alkavat, kun Aaron juhlat alkavat kello 12.00?
 - b) Aaron juhlat ovat lauantaina. Mikä viikonpäivä nyt on?
6. Määritä pienin epänegatiivinen luku, jonka kanssa luku
 - a) $234 - 15$
 - b) $79 \cdot 650$
 - c) $19^{12} + 772$on kongruentti modulo 4.
7. Tiedetään, että jakojäännös on 2, kun kokonaisluku n jaetaan luvulla 5. Mikä on jakojäännös, kun luku $3n^2 + 8n + 7$ jaetaan luvulla 5?
8. Kokonaisluvut voidaan jakaa osajoukkoihin esimerkiksi niin, että kussakin osajoukossa ovat ne luvut, jotka ovat kongruentteja keskenään jaettaessa luvulla 3. Näihin osajoukkoihin kuuluvia lukuja voidaan merkitä $3q$, $3q + 1$ ja $3q + 2$, missä $q \in \mathbb{Z}$. Miten voidaan merkitä lukuja osajoukoissa, jotka syntyvät, kun kokonaisluvut jaetaan luvulla a) 4 b) 5 c) 2?
9. Olkoon n kokonaisluku. Osoita, että $n^2 - n \equiv 0 \pmod{2}$.
10. Olkoon n kokonaisluku. Osoita, että luku $n(n + 5)$ on parillinen.
11. Osoita, että luku $n(n + 1)(n + 8)$ on jaollinen luvulla 3, kun n on kokonaisluku.
12. Osoita, että luku $n^5 - n$ on jaollinen luvulla 5, kun n on kokonaisluku.
13. Osoita, että luku $n^3 + 2$ ei ole jaollinen luvulla 4 millään kokonaisluvun n arvolla.
14. Jokainen kokonaisluku on joko parillinen tai pariton. Osoita erikseen näissä osajoukoissa, että luku $n^4 + 2n^3 + n^2$ on jaollinen luvulla 4, kun n on kokonaisluku. (Vrt. esimerkki 5.42.)

15. Etsi kaikki kokonaisluvut x , jotka toteuttavat kongruenssin $5x \equiv 1 \pmod{3}$.

16. Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Osoita, että kokonaisluvut a ja b ovat kongruentteja modulo k eli erotus $a - b$ on jaollinen luvulla k , jos ja vain jos luvuilla a ja b on sama jakojäännös, kun jaetaan luvulla k .

17. Julius Caesar käytti erästä vanhimmista tunnetuista salakirjoitusmenetelmistä. Hän muutti viestin salaiseksi korvaamalla jokaisen kirjaimen toisella kirjaimella, joka sijaitsi aakkosissa kolme kirjainta myöhemmin. Viimeisten kirjainten jälkeen palattiin taas aakkosten alkuun. Suomen kielessä on 28 kirjainta, jos W-kirjainta ei lasketa mukaan. Siten esimerkiksi viesti AVAIN ON ÖLJYRUUKUSSA kirjoitettaisiin Caesarin menetelmällä DZDLQ RQ COMÄUYNYVVD. Suomenna viestit

- a) KÄCNNBÄV NHVNLÄCOOB
- b) BOB VÄC UÄSBOHLXB.

18. Caesarin salakirjoitusmenetelmää voidaan kuvata funktiolla $f(n) = n + 3 \pmod{28}$, missä n on kunkin kirjaimen järjestysnumero aakkosissa. Koodattavan kirjaimen järjestysnumeroon lisätään luku 3 ja näin saatu funktion arvo tulkitaan takaisin kirjaimeksi.

Kirjoita viesti AVAIN ON ÖLJYRUUKUSSA käyttäen salakirjoitusta, jota kuvaa funktio

- a) $f(n) = n + 13 \pmod{28}$
- b) $f(n) = 3n + 7 \pmod{28}$.
- c) Määritä funktiot, joiden avulla a- ja b-kohtien salakirjoitus voidaan purkaa.

Kotitehtäviä

1. Osoita, että a) $34 \equiv 10 \pmod{3}$ b) $-128 \equiv 274 \pmod{6}$ c) $1053 \equiv 0 \pmod{27}$.

2. Määritä pienin epänegatiivinen luku, jonka kanssa luku a) 25 b) -121 c) 5777 on kongruentti modulo 5.

3. Määritä kaikki kokonaisluvut x , joille $x \equiv 3 \pmod{8}$ ja $-50 < x < 51$.

4. Neptunus-planeetan pyörähdysaika on noin 16 tuntia. Onko Neptunuksella sama kellonaika 223 tunnin kuluttua kuin 49 tuntia sitten?

5. Maijan isoäiti on syntynyt 7.3. eräänä karkausvuonna. Maijan äiti on syntynyt 9525 päivää isoäitiä myöhemmin ja Maija itse 10229 päivää äitiään myöhemmin. Tutki, ovatko jotkut henkilöistä syntyneet samana viikonpäivänä.

6. Nyt on tammikuu. Mikä kuukausi

- a) on 76 kuukauden kuluttua
- b) oli 555 kuukautta sitten?

7. Määritä pienin epänegatiivinen luku, jonka kanssa luku

- a) $17 - 930 + 452$
- b) $19 \cdot 30 + 183 \cdot 11$
- c) $5 \cdot 26^{15} + 493$

on kongruentti modulo 9.

8. Tiedetään, että jakojäännös on 5, kun kokonaisluku n jaetaan luvulla 11. Mikä on jakojäännös, kun luku $2n^3 - 6n - 9$ jaetaan luvulla 11?

9. Osoita kongruenssin laskusääntöjä koskevan lauseen kohta 2: Jos $a \equiv c$ ja $b \equiv d \pmod{k}$, niin $a - b \equiv c - d \pmod{k}$.

10. Olkoon n kokonaisluku. Osoita, että luku $n^2 + n$ on jaollinen kahdella.

11. Osoita, että luku $n(n+1)(4n-1)$ on jaollinen luvulla 6, kun n on kokonaisluku.

12. Osoita, että luku $n(4n^2 - 1)$ on jaollinen luvulla 3, kun n on kokonaisluku.

13. Osoita, että luku $n^2 - 3$ ei ole jaollinen luvulla 5 millään kokonaisluvun n arvolla.

14. Etsi kaikki kokonaisluvut x , jotka toteuttavat kongruenssin $4x + 1 \equiv 3 \pmod{7}$.

15. Olkoot a ja b kokonaislukuja. Osoita väite todeksi tai epätodeksi: jos $ab \equiv 0 \pmod{m}$, niin $a \equiv 0$ tai $b \equiv 0 \pmod{m}$.

16. Olkoot a ja b kokonaislukuja. Osoita väite todeksi tai epätodeksi: jos $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$, niin $a \equiv b \pmod{m}$.

17. * Luvun a määräämä **jäännösluokka modulo m** on luvun a kanssa kongruenttien lukujen joukko. Luvun a jäännösluokkaa merkitään $\underline{a}$. Siis $\underline{a} = \{a + km \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Esimerkiksi jäännösluokat modulo 4 ovat $\underline{0} = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\underline{1} = \{1 + 4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\underline{2} = \{2 + 4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ja $\underline{3} = \{3 + 4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

- Määritä jäännösluokat modulo 5.
- Jäännösluokkien yhteenlasku ja kertolasku määritellään seuraavasti: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{a + b}$ ja $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a \cdot b}$. Täydennä seuraavat jäännösluokkien yhteen- ja kertolaskutaulut modulo 5.

+	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>
<u>0</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>
<u>1</u>					
<u>2</u>					
<u>3</u>					
<u>4</u>	<u>4</u>	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>

·	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>
<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>
<u>1</u>					
<u>2</u>					
<u>3</u>					
<u>4</u>	<u>0</u>	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>1</u>

- Jäännösluokan vasta-alkio määritellään seuraavasti: $\underline{b}$ on alkion $\underline{a}$ vasta-alkio, jos $\underline{a} + \underline{b} = \underline{0}$. Määritä b-kohdan taulukoiden avulla kunkin jäännösluokan vasta-alkiot modulo 5.
- Jäännösluokan käänteisalkio määritellään seuraavasti: $\underline{c}$ on alkion $\underline{a}$ käänteisalkio, jos $\underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{1}$. Määritä b-kohdan taulukoiden avulla käänteisalkiot niille jäännösluokkien modulo 5 alkioille, joilla sellainen on olemassa.
- Ratkaise jäännösluokissa modulo 5 yhtälö $\underline{x} + \underline{x} = \underline{1}$.
- Ratkaise jäännösluokissa modulo 5 yhtälö $\underline{x} \cdot \underline{x} = \underline{4}$.

5.3 Tehtäväsarja 3

Tehtäviä

1. Määritä jakojäännös, kun

- a) luku $80 \cdot 30 - 352$ jaetaan luvulla 7
- b) luku 2^{140} jaetaan luvulla 3
- c) luku $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 79 + 80$ jaetaan luvulla 4.

1.

- a) 4
- b) 1
- c) 0

2. Määritä jakojäännös, kun

- a) luku $5 \cdot 11^{99} + 20$ jaetaan luvulla 6
- b) luku $6^{120} \cdot 4^{301}$ jaetaan luvulla 5
- c) luku $3^{60} + 55$ jaetaan luvulla 8
- d) luku 2^{151} jaetaan luvulla 14.

2.

- a) 3
- b) 4
- c) 0
- d) 2

3. Näytä, että luku $7^{2502} + 2^{1573}$ on jaollinen kolmella. [YO kevät 1999 10b kohta 2] $7 \equiv 1 \pmod{3}$ ja $2 \equiv -1 \pmod{3}$

3. Vihje: $7 \equiv 1 \pmod{3}$ ja $2 \equiv -1 \pmod{3}$

4. Määritä jakojäännös, kun summa $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 105^3)$ jaetaan luvulla 3.

5. Mikä on luvun a) 2^{77} b) 3^{33} viimeinen numero?

6. Olkoon n luonnollinen luku. Osoita, että luku $4 \cdot 7^{n+1} + 2$ on jaollinen luvulla 3.

7. Olkoon n luonnollinen luku. Osoita, että luku $13^{2n} + 2^{3n+4} - 10$ on jaollinen luvulla 7.

8. Tutki, onko luku jaollinen luvulla 3.

- a) 123 456 789
- b) 987 654 321 233

9. Määritä jakojäännös, kun luku jaetaan luvulla 9.

- a) 999 000 000 800
- b) 111 111 111 111

10. Todista, että $(n+1)$ -numeroinen kokonaisluku $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$ on kongruentti numeroidensa summan kanssa modulo 9. Ohje: Esitä luku kymmenen potenssien avulla:

$$\begin{aligned} a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0 \\ = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \\ \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0. \end{aligned}$$

11. a) Ajattele jotakin kolminumeroista lukua ja kirjoita se paperille. Vaihda lukusi numeroiden järjestystä ja kirjoita uusi luku paperille. Laske lukujen erotus, jaa erotus luvulla 3 ja kirjoita jakojäännös paperille. Lisää jakojäännökseen luku 7, kerro näin saatu luku luvulla 2 ja vähennä tuloksesta luku 4. Tulos on 10, eikö vain? Miten se voidaan tietää?
- b) Keksi oma algoritmisi, jonka tulos tiedetään etukäteen.

Kotitehtäviä

1. Määritä jakojäännös, kun
 - a) luku $700 - 22 \cdot 185$ jaetaan luvulla 6
 - b) luku 2799^{2799} jaetaan luvulla 7
 - c) luku $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 36 + 37$ jaetaan luvulla 8.
2. Määritä jakojäännös, kun
 - a) luku 2^{256} jaetaan luvulla 5
 - b) luku $12^{10} \cdot 13^3 - 114 \cdot 552$ jaetaan luvulla 11
 - c) luku $34^3 - 966$ jaetaan luvulla 9
 - d) luku 6^{57} jaetaan luvulla 15.
3. Tutki, onko luku $46^{78} + 89^{67}$ jaollinen viidellä. (Yo-koe, kevät 2011)
4. Määritä jakojäännös, kun summa $(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{244})$ jaetaan luvulla 5.
5. Mikä on luvun a) 2^{103} b) 4^{111} viimeinen numero?
6. Mitkä ovat luvun 5^{30} kaksi viimeistä numeroa?
7. Osoita, että
 - a) luku $10^n - 1$ on jaollinen luvulla 9 kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n
 - b) luku $11^n + 1$ on jaollinen luvulla 12 kaikilla parittomilla positiivisilla kokonaisluvuilla n .
8. Olkoon n luonnollinen luku. Määritä jakojäännös, kun luku $501 \cdot 4^{2n} + 2^{2n}$ jaetaan luvulla 5.
9. Tutki, onko luku jaollinen luvulla 9.
 - a) 182 736 451
 - b) 18 273 645 144
10. Määritä jakojäännös, kun luku jaetaan luvulla 3.
 - a) 222 333 445
 - b) 101 010 101 111
11. Osoita luvun 11 jaollisuussääntö: Kokonaisluku on jaollinen luvulla 11, jos ja vain jos sen numeroiden vuorotteleva summa on jaollinen luvulla 11. Vuorotteleva summa lasketaan siten, että luvun viimeisestä numerosta vähennetään toiseksi viimeinen numero, lisätään kolmanneksi viimeinen numero, vähennetään neljänneksi viimeinen numero jne. Vihje: $10 \equiv -1 \pmod{11}$.

12. Tutki, onko luku jaollinen luvulla 11.

- a) 24 927
- b) 928 072 618
- c) 7 000 000 000 000 007
- d) 7 000 000 000 000 070

13. Todista, että $a^3b - b^3a$ on tasan jaollinen kolmella, jos a ja b ovat kokonaislukuja ja $a > b$. [YO 1896 tehtävä 3]

5.4 Tehtäväsarja 4

Tehtäviä

1. Osoita induktiolla, että luku $n^2 + n$ on jaollinen luvulla 2, kun n on luonnollinen luku.
2. Osoita induktiolla, että luku $n^3 + 2n$ on jaollinen luvulla 3, kun n on luonnollinen luku.
3. Osoita induktiolla, että $2^n > n$, kun n on luonnollinen luku.
4. Osoita induktiolla, että $n^2 > 2n + 1$, kun n on kokonaisluku ja $n \geq 3$.
5. Osoita induktiolla, että luku $7^n + 5$ on jaollinen luvulla 6, kun n on positiivinen kokonaisluku.
6. Osoita induktiolla, että luku $10^n - 3^n$ on jaollinen luvulla 7, kun n on positiivinen kokonaisluku.
7. Osoita induktiolla, että luku $7^n - 6n + 8$ on jaollinen luvulla 9, kun n on positiivinen kokonaisluku.
8. Osoita induktiolla, että $n! > n^2$, kun n on kokonaisluku ja $n \geq 4$. Merkin-tä $n!$ tarkoittaa luvun n **kertomaa**. Se on tulo $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.
9. Olkoot n positiivinen kokonaisluku ja r reaaliluku, jolle pätee $r \neq 1$. Osoita induktiolla, että

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

10. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita induktiolla, että

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

11. Osoita induktiolla, että

$$\sum_{m=1}^n m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ kun } n = 1, 2, \dots$$

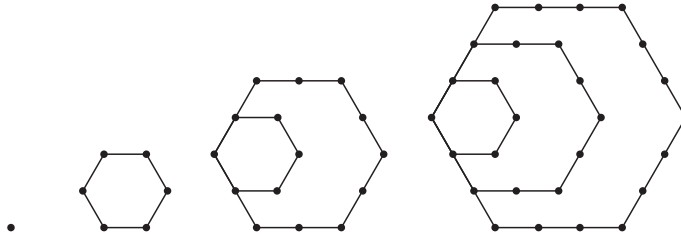
12. Osoita induktiolla, että n -alkioisessa joukossa on

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

kahden alkion osajoukkoa, kun $n \geq 2$.

13. Todista kappaleessa 5.2 esiteltujen kongruenssin laskusääntöjä koskevan lauseen kohta 4: Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$ ja $k, n \in \mathbb{Z}_+$ sekä $a \equiv b \pmod{k}$. Tällöin $a^n \equiv b^n \pmod{k}$.

14. Tarkastellaan kuviojonoa, joka muodostuu säännöllisen kuusikulmion muotoisista pistejoukoista. Jonon neljä ensimmäistä kuviota ovat seuraavat:



- Laske, kuinka monta pistettä on kuviojonon kussakin neljässä ensimmäisessä kuviossa.
- Muodosta kaava, jolla voidaan laskea, kuinka monta pistettä on n . kuviossa. Tarpeen vaatiessa voit hyödyntää laskimesi polynomisovistustoimintoja.
- Todista kaava induktiolla.

Kotitehtäviä

1. Osoita induktiolla, että n jakopisteellä jana voidaan jakaa enintään $n + 1$ janaksi.



2. Osoita induktiolla, että luku $n^3 + 5n$ on jaollinen luvulla 6, kun n on luonnollinen luku.
3. Osoita, että $3^n > 2n$, kun n on positiivinen kokonaisluku.
4. Osoita induktiolla, että $3^n < n!$, kun n on kokonaisluku ja $n \geq 7$.
5. Osoita induktiolla, että luku $6^n - 1$ on jaollinen luvulla 5, kun n on positiivinen kokonaisluku.
6. Osoita induktiolla, että luku $8^n - 5^n$ on jaollinen luvulla 3, kun n on positiivinen kokonaisluku.
7. Osoita induktiolla, että luku $27^{2n} + 3 \cdot 13^n$ on jaollinen luvulla 4, kun n on positiivinen kokonaisluku.
8. Osoita induktiolla, että

$$\sum_{m=1}^n m^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \text{ kun } n = 1, 2, \dots$$

9. Osoita induktiolla, että $(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$, kun n on positiivinen kokonaisluku.
10. Tasoon piirretään n suoraa ($n \geq 2$). Osoita, että suorilla voi olla korkeintaan $n(n-1)/2$ leikkauspistettä.

11. Tarkastele seuraavia luvun 2 peräkkäisistä potensseista muodostuvia summia:

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 \\
 1 + 2 &= 3 \\
 1 + 2 + 4 &= 7 \\
 1 + 2 + 4 + 8 &= 15 \\
 1 + 2 + 4 + 8 + 16 &= 31 \\
 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 &= 63 \\
 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 &= 127.
 \end{aligned}$$

Muodosta kaava, jolla voidaan laskea summa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n$, missä n on luonnollinen luku. Todista kaava induktiolla.

12. Olkoot n luonnollinen luku ja x reaalityö luku, jolle pätee $x > -1$. Osoita, että $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Kyseessä on niin sanottu **Bernoullin epäyhtälö**.

13. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Todista, että

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} < 1.$$

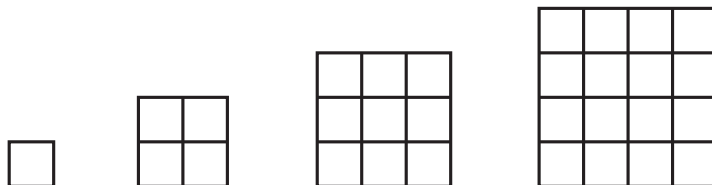
[YO syksy 1971 tehtävä 7]

14. Osoita, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n on

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}.$$

[YO kevät 1998 8b]

15. Tarkastellaan ruudukoista muodostuvaa kuviojonoa, jonka neljä ensimmäistä kuviota ovat seuraavat:



- Laske, kuinka monta neliötä kaikkiaan on kuviojonon kussakin neljässä ensimmäisessä ruudukossa.
- Muodosta kaava, jolla voidaan laskea, kuinka monta neliötä on n . ruudukossa. Tarpeen vaatiessa voit hyödyntää laskimesi polynomisovitus toimintoja.
- Todista kaava induktiolla.

16. Eräs keino, jolla voi tarkastaa onko yhteenlasku oikein suoritettu, perustuu seuraavaan lauselmään:

Jos useampien kokonaislukujen summa ja samoin näiden lukujen numerosummien summa jaetaan yhdeksällä, niin tulevat jäännökset yhtä suuriksi. Todista tämä lauselmä. [YO 1895 tehtävä 2]

LUKU 6

Luku 6

6.1 Tehtäväsarja 1

Tehtäviä

1. Määritä lukujen suurin yhteinen tekijä.

- a) 15 ja 20
- b) 9 ja 36
- c) 4 ja 7

1.

- a) 5
- b) 9
- c) 1

2. Määritä Eukleideen algoritmia käyttäen

- a) $\text{syt}(184, 152)$
- b) $\text{syt}(227, 143)$.

2.

- a) 8
- b) 1

3. Määritä Eukleideen algoritmia käyttäen

- a) $\text{syt}(272, 1479)$
- b) $\text{syt}(4719, 18207)$.

3.

- a) 17
- b) 3

4. Esitä murtoluku

- a) $\frac{143}{605}$
- b) $\frac{5989}{30899}$

supistetussa muodossa. Vihje: Määritä osoittajan ja nimittäjän suurin yhteinen tekijä.

4.

- a) $\frac{13}{55}$
- b) $\frac{113}{583}$

5. Osoita, että murtoluku $\frac{8788}{13475}$ ei supistu.

6. Leirille osallistui 780 tyttöä ja 612 poikaa. Osallistujat jaettiin keskenään yhtä suuriin ryhmiin siten, että kussakin ryhmässä oli vain tyttöjä tai poikia. Mikä oli suurin mahdollinen ryhmäkoko?

6. 12

7. Määritä lukujen 188000100 ja 188 suurin yhteinen tekijä.

7. 4

8. Olkoon a positiivinen kokonaisluku. Määritä

- a) $\text{syt}(a, a)$
- b) $\text{syt}(a, 1)$
- c) $\text{syt}(a^2, a)$
- d) $\text{syt}((a + 1)!, a!)$.

Merkintä $a!$ tarkoittaa luvun a **kertomaa**. Se on tulo $a! = a \cdot (a - 1) \cdot (a - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

8.

- a) a
- b) 1
- c) a
- d) $a!$

9. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita Eukleideen algoritmia käyttäen, että $\text{syt}(n + 1, n) = 1$.

10. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Määritä lukujen $n^2 + 2n$ ja $n + 1$ suurin yhteinen tekijä.

10. 1

11. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$\text{syt}(3^{n+1} + 10, 3^n + 2) = 1.$$

Kotitehtäviä

1. Määritä lukujen suurin yhteinen tekijä.

- a) 63 ja 7
- b) 64 ja 33
- c) 45 ja 60

1.

- a) 7
- b) 1
- c) 15

2. Määritä Eukleideen algoritmia käyttäen

- a) $\text{sy}(657, 306)$
- b) $\text{sy}(2197, 4641)$
- c) $\text{sy}(15787, 4111)$.

2.

- a) 9
- b) 13
- c) 1

3. Esitä murtoluku

- a) $\frac{182}{299}$
- b) $\frac{7697}{32041}$

supistetussa muodossa.

3.

- a) $\frac{14}{23}$
- b) $\frac{43}{179}$

4. Leipomo suljettiin remontin ajaksi. Ennen sulkemista laskettiin, että leipomon varastossa oli 4896 vehnäsämpylää ja 1408 grahamsämpylää. Sämpylät pakattiin kuljetusta varten keskenään samankokoisiin pusseihin siten, että kuhunkin pussiin tuli vain vehnä- tai grahamsämpylöitä. Mikä oli suurin mahdollinen pussikoko? Oletetaan, että vehnäsämpylä oli samankokoinen kuin grahamsämpylä ja että yksikään pussi ei jäänyt vajaaksi.

4. 32

5. Määritä lukujen 468468468108 ja 234 suurin yhteinen tekijä.

5. 18

6. Olkoot a , b ja c positiivisia kokonaislukuja. Lukujen a , b ja c suurin yhteinen tekijä eli $\text{sy}(a, b, c)$ voidaan määrittää siten, että ensin määritetään kahden luvun suurin yhteinen tekijä ja sitten tämän ja kolmannen luvun suurin yhteinen tekijä. Määritä

- a) $\text{sy}(15, 30, 40)$
- b) $\text{sy}(6, 9, 11)$
- c) $\text{sy}(171, 456, 665)$.

6.

- a) 5
- b) 1
- c) 19

7. Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja ja $\text{sy}(a, b) = 9$. Voiko tällöin yhtälö $a + b = 186$ olla tosi?

7. Ei voi.

8. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tutki, mitä arvoja $\text{sy}(n + 4, n)$ voi saada.

8. 1, 2 ja 4.

9. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Määritä lukujen $n^2 + 3n$ ja $n + 2$ suurin yhteinen tekijä.

9. Jos n on parillinen, $\text{sy}(n^2 + 3n, n + 2) = 2$, muuten $\text{sy}(n^2 + 3n, n + 2) = 1$.

10. Olkoot a ja b positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että $\text{sy}(a, b)$ on jaollinen kaikilla lukujen a ja b yhteisillä tekijöillä.

6.2 Tehtäväsarja 2

Tehtäviä

1. Tutki, onko Diofantoksen yhtälöllä ratkaisua.

- a) $7x + 5y = 3$
- b) $5x + 85y = 42$
- c) $6x + 51y = 100$

1.

- a) On ratkaisu.
- b) Ei ole ratkaisua.
- c) Ei ole ratkaisua.

2. Leirille osallistui 364 nuorta. Oliko mahdollista majoittaa osallistujat 24 ja 16 hengen parakkeihin siten, että yksikään parakki ei jäänyt vajaaksi?

2. Ei ole mahdollista.

3. Määritä Diofantoksen yhtälön jokin ratkaisu.

- a) $14x + 49y = \text{syt}(14, 49)$
- b) $56x + 72y = \text{syt}(56, 72)$

3.

- a) Esimerkiksi $x = -3$ ja $y = 1$.
- b) Esimerkiksi $x = -5$ ja $y = 4$.

4. Määritä Diofantoksen yhtälön jokin ratkaisu.

- a) $56x + 72y = 40$
- b) $24x + 138y = -24$

4.

- a) Esimerkiksi $x = -7$ ja $y = 6$.
- b) Esimerkiksi $x = -1$ ja $y = 0$.

5. Tutki, onko suoralla

- a) $26x + 91y + 10 = 0$
- b) $529x + 621y - 92 = 0$

pisteitä, joiden molemmat koordinaatit ovat kokonaislukuja.

5.

- a) Ei ole.
- b) On, esimerkiksi piste $(-1, 1)$.

6. Määritä Diofantoksen yhtälön kaikki ratkaisut.

a) $2x + 3y = 1$

b) $2x + 3y = 7$

6.

a) $x = -1 + 3n$ ja $y = 1 - 2n, n \in \mathbb{Z}$.

b) $x = 2 + 3n$ ja $y = 1 - 2n, n \in \mathbb{Z}$.

7. Määritä Diofantoksen yhtälön $45x + 21y = -6$ kaikki ratkaisut.

7. $x = -2 + 7n$ ja $y = 4 - 15n, n \in \mathbb{Z}$.

8. Määritä Diofantoksen yhtälön $13509x + 10203y = 228$ kaikki ratkaisut.

8. $x = 105 + 179n$ ja $y = -139 - 237n, n \in \mathbb{Z}$.

9. Etsi Diofantoksen yhtälö, jolla

a) ei ole ratkaisua

b) on äärettömän monta ratkaisua.

9.

a) Esimerkiksi $6x + 8y = 1$

b) Esimerkiksi $13x + 24y = 47$

10. Määritä Diofantoksen yhtälön $63x + 279y = 450$ kaikki ratkaisut. Mitkä niistä toteuttavat ehdon $|x| + |y| < 25$?

10. Ratkaisut ovat $x = 16 + 31n$ ja $y = -2 - 7n, n \in \mathbb{Z}$. Näistä ehdon $|x| + |y| < 25$ toteuttaa ratkaisu $x = -15$ ja $y = 5$ sekä ratkaisut $x = 16$ ja $y = -2$.

11. Käytettävissä on 8 gramman ja 12 gramman punnuksia. Kuinka monta kummankinlaista punnusta tarvitaan, jotta punnusten kokonaismassaksi tulisi 100 grammaa? Selvitä kaikki vaihtoehdot.

11. Vaihtoehdot kun 8 gramman punnuksien määrä on x ja 12 gramman punnuksien määrä on y :

- $x = 2$ ja $y = 7$
- $x = 5$ ja $y = 5$
- $x = 8$ ja $y = 3$
- $x = 11$ ja $y = 1$.

12. Ruhtinas jakoi 63 yhtä suurta kekoa hedelmiä sekä 7 erillistä hedelmää tasan 23 matkalaiselle. Kuinka monta hedelmää kussakin keossa oli? Vihje: Tutki yhtälöä $63x + 7 = 23y$. (Mahavira, v. 850)

12. Mikä tahansa hedelmien määrä muotoa $5 + 23n$, missä $n \in \mathbb{Z}$ ja $n \geq 0$, on mahdollinen.

13. Olkoot a, b, c ja d positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että yhtälöllä $ax + by + cz = d$ on kokonaislukuratkaisu, jos ja vain jos luku d on jaollinen lukujen a, b ja c suurimmalla yhteisellä tekijällä.

Kotitehtäviä

1. Tutki, onko Diofantoksen yhtälöllä ratkaisua.
 - a) $9x + 6y = 72$
 - b) $12x + 10y = 323$
 - c) $14x + 35y = -91$
1.
 - a) On ratkaisu.
 - b) Ei ole ratkaisua.
 - c) On ratkaisu.
2. Emilia sai valmistujaislahjaksi 200 euron lahjakortin erääseen keramiikkapajaan. Hän osti pajasta 27 euron hintaisia kynttilänjalkoja ja 15 euron hintaisia jälkiruokalautasia. Hän maksoi ostoksensa lahjakortilla ja sai rahaa takaisin 12 euroa. Laskiko myyjä oikein?
2. Ei laskenut.
3. Määritä Diofantoksen yhtälön jokin ratkaisu.
 - a) $59x + 12y = \text{syt}(59, 12)$
 - b) $119x + 272y = \text{syt}(119, 272)$
3.
 - a) Esimerkiksi $x = 1$ ja $y = -4$.
 - b) Esimerkiksi $x = -9$ ja $y = 4$.
4. Määritä Diofantoksen yhtälön jokin ratkaisu.
 - a) $36x + 16y = 28$
 - b) $221x + 35y = 2$
4.
 - a) Esimerkiksi $x = -1$ ja $y = 4$.
 - b) Esimerkiksi $x = -3$ ja $y = 19$.
5. Määritä Diofantoksen yhtälön kaikki ratkaisut.
 - a) $2x + 6y = 2$
 - b) $2x + 6y = -10$
5.
 - a) $x = 1 + 3n$ ja $y = -n, n \in \mathbb{Z}$
 - b) $x = -5 + 3n$ ja $y = -n, n \in \mathbb{Z}$
6. Määritä Diofantoksen yhtälön $35x + 84y = 14$ kaikki ratkaisut.
6. $x = -2 + 12n$ ja $y = 1 - 5n, n \in \mathbb{Z}$

7. Määritä Diofantoksen yhtälön $11925x + 3843y = -117$ kaikki ratkaisut.
7. $x = -10 + 427n$ ja $y = 31 - 1325n$, $n \in \mathbb{Z}$
8. Määritä Diofantoksen yhtälön $168x + 204y = 24$ kaikki ratkaisut. Mille ratkaisuille pätee $-50 \leq x \leq 0$ ja $y > 10$?
8. Kaikki ratkaisut ovat $x = 5 + 17n$ ja $y = -4 - 14n$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Niistä ehdot $-50 \leq x \leq 0$ ja $y > 10$ toteuttaa ratkaisut $x = -29$ ja $y = 24$ sekä $x = -46$ ja $y = 38$.
9. Esitä luku 100 kahden positiivisen kokonaisluvun summana niin, että toinen luvuista on jaollinen luvulla 7 ja toinen luvulla 11. (Euler, v. 1770)
9. $100 = 56 + 44$, missä $56 = 8 \cdot 7$ ja $44 = 4 \cdot 11$.
10. Yhtiön kauppavoitto 150 mk on jaettava tasan osakkaille. Jos osakkaita olisi ollut 5 enemmän, olisi jokainen saanut 5 mk vähemmän. Montako osakasta oli yhtiössä? [YO 1874 tehtävä 6]
10. 10 osakasta
11. Sata lyhdettä viljaa jaetaan sadalle henkilölle niin, että kukin mies saa 3 lyhdettä, nainen 2 lyhdettä ja lapsi puoli lyhdettä. Kuinka monta miestä, naista ja lasta on? (Alcuin Yorkilainen, v. 775)
11. Merkitään miesten lukumäärää kirjaimella a , naisten lukumäärää kirjaimella b ja lasten lukumäärää kirjaimella c . Mahdolliset vastaukset ovat
- $a = 20$, $b = 0$ ja $c = 80$
 - $a = 17$, $b = 5$ ja $c = 78$
 - $a = 14$, $b = 10$ ja $c = 76$
 - $a = 11$, $b = 15$ ja $c = 74$
 - $a = 8$, $b = 20$ ja $c = 72$
 - $a = 5$, $b = 25$ ja $c = 70$
 - $a = 2$, $b = 30$ ja $c = 68$.
12. * Osoita suoralla sijoituksella, että $a = 2$, $b = 4$, $c = 3$ ja $d = 1$ on yksi Kexleruksen viiniongelman ratkaisuiista.
13. * Ratkaise Kexleruksen viiniongelman, kun asetetaan $b = 0$ ja $d = 0$.
13. $a = 4$ ja $c = 6$
14. * Osoita, että Kexleruksen viiniongelmaa ei ole ratkaisuja, jos asetetaan $a = 0$ ja $d = 0$.

6.3 Tehtäväsarja 3

Tehtäviä

1. Mitkä ovat kymmenen pienintä alkulukua?

1. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

2. Onko luku

- a) 37
- b) 77
- c) 87
- d) 101

alkuluku?

2.

- a) On.
- b) Ei ole.
- c) Ei ole.
- d) On.

3. Määritä Eratostheneen seulan avulla kaikki välillä 75, ..., 100 olevat alkuluvut.

3. 79, 83, 89, 97

4. Pitääkö väite paikkansa? Perustele.

- a) Jos tulo mn on jaollinen luvulla 97, niin ainakin toinen kokonaisluvuista m ja n on jaollinen luvulla 97.
- b) Jos tulo mn on jaollinen luvulla 55, niin ainakin toinen kokonaisluvuista m ja n on jaollinen luvulla 55.

4.

- a) Väite pätee Eukleideen lemmän nojalla, sillä 97 on alkuluku.
- b) Väite ei päde. Vastaesimerkki: $m = 11$ ja $n = 5$.

5. Määritä luvun alkutekijähajotelma.

- a) 42
- b) 600
- c) 4410

5.

- a) $2 \cdot 3 \cdot 7$
- b) $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$
- c) $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$

6. Määritä luvun $8!$ alkutekijähajotelma.

6. $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

7. Millä luvuilla on luvun 241 jaollisuus vähintään tutkittava, jotta saadaan selville, onko se alkuluku?

7. Riittää tarkistaa jaollisuus alkuluvuilla $\sqrt{241}$ asti, eli siis alkuluvuilla 2, 3, 5, 7, 11, 13.

8. Onko luku

- a) 187
- b) 197
- c) 299
- d) 601

alkuluku?

8.

- a) Ei ole.
- b) On.
- c) Ei ole.
- d) On.

9. Luvut 2 ja 3 ovat kaksi peräkkäistä kokonaislukua, jotka molemmat ovat alkulukuja. Osoita, että muita peräkkäisiä alkulukuja ei ole olemassa.

10. Mikä on lukujen suurin yhteinen tekijä?

- a) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^5 \cdot 7^5$ ja $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
- b) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ ja $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$

10.

- a) $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
- b) $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$

11. Mikä on lukujen pienin yhteinen jaettava?

- a) $3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3$ ja $2^9 \cdot 3^6 \cdot 5^9$
- b) 19^{31} ja 19^{17}

11.

- a) $2^9 \cdot 3^7 \cdot 5^9 \cdot 7^3$
- b) 19^{31}

12. Määritä alkutekijähajotelman avulla lukujen

- a) 15 ja 42
- b) 20 ja 75
- c) 2250 ja 30800

suurin yhteinen tekijä ja pienin yhteinen jaettava.

12. Suurin yhteinen tekijä:

- a) 3 b) 5 c) 50. Pienin yhteinen jaettava:
- a) 210 b) 300 c) 1386000.

13. Jokamiesluokan kilpa-auto A kiertää radan 55 sekunnissa ja B 65 sekunnissa. Kuinka pitkän ajan kuluttua lähdöstä autot ovat uudestaan yhtä aikaa lähtölinjalla?

13. 715 sekunnin kuluttua.

14. Olkoot x ja y kokonaislukuja. Ratkaise yhtälö $(3x + 2y)(x + y) = 21$.

14. Ratkaisut ovat:

- $x = -41$ ja $y = 62$
- $x = -19$ ja $y = 18$
- $x = -11$ ja $y = 18$
- $x = -1$ ja $y = -2$
- $x = 1$ ja $y = 2$
- $x = 11$ ja $y = -18$
- $x = 19$ ja $y = -18$
- $x = 41$ ja $y = -62$.

15. Perustele väite todeksi tai epätodeksi.

- a) Jos luku on jaollinen luvuilla 6 ja 25, niin se on jaollinen myös luvulla 150.
- b) Jos luku on jaollinen luvuilla 6 ja 9, niin se on jaollinen myös luvulla 54.

15.

- a) Väite pätee, sillä $\text{sy}(6, 25) = 1$ ja $150 = 6 \cdot 25$.
- b) Väite ei päde. Vastaesimerkki: luku 18 on jaollinen luvuilla 6 ja 9 mutta ei luvulla 54.

16. Olkoon n kokonaisluku. Osoita, että luku $n(n + 1)(n + 2)$ on jaollinen luvulla 6.

17. Osoita, että jos n on kokonaisluku, niin luku $7n^3 - 7n$ on jaollinen luvulla 42.

18. Osoita, että jos n on kokonaisluku, niin luku $n^4 - n^2$ on jaollinen luvulla 12.

19. Määritä jakojäännös, kun luku 9^{13} jaetaan luvulla 13.

19. 9

20. Toisinaan Fermat'n pieni lause esitetään seuraavassa muodossa: jos p on alkuluku ja a on kokonaisluku, joka ei ole luvun p monikerta, niin tällöin

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Osoita lauseen tämän muodon avulla, että $n^{19} \equiv n \pmod{19}$ kaikilla luonnollisilla luvuilla n .

21. Muotoa $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ olevia lukuja sanotaan **Fermat'n luvuiksi**. Euler tutki 1700-luvulla, ovatko kaikki Fermat'n luvut alkulukuja. Ratkaise tämä Eulerin ongelma laskinta käyttäen.

21. Kaikki Fermat'n luvut eivät ole alkulukuja, sillä F_5 ei ole alkuluku. Tämä voidaan todeta laskimella käymällä Fermat'n lukuja läpi.

22. Fermat'n luvut F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 ovat alkulukuja. Tämän perusteella Fermat oletti, että loputkin luvut F_n , $n = 5, 6, \dots$, ovat alkulukuja. Vuonna 1732 Euler kuitenkin havaitsi, että $5^4 + 2^4 = 641$ ja $1 + 5 \cdot 2^7 = 641$ ja onnistui näiden yhtälöiden avulla todistamaan, että $641 | F_5$. Todista tämä tulos.

Vihje: Eulerin havaitsemista yhtälöistä seuraa, että

$$2^4 \equiv -5^4 \pmod{641} \quad \text{ja} \quad 5 \cdot 2^7 \equiv -1 \pmod{641}.$$

23. Osoita, että kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+ = 1, 2, 3, \dots$ pätee

$$F_0 F_1 \cdot \dots \cdot F_{n-1} = F_n - 2.$$

Esitä tämän yhtälön perusteella uusi todistus sille, että alkulukuja on äärettömän monta.

24. Päättele, kuinka monta nollaa on luvun $50!$ lopussa.

24. 12

Kotitehtäviä

1. Onko luku

- a) 43
- b) 39
- c) 79
- d) 221

alkuluku?

1.

- a) On.
- b) Ei ole.
- c) On.
- d) Ei ole.

2. Pitääkö väite paikkansa? Perustele.

- a) Jos tulo mn on jaollinen luvulla 171, niin ainakin toinen kokonaisluvusta m ja n on jaollinen luvulla 171.
- b) Jos tulo mn on jaollinen luvulla 149, niin ainakin toinen kokonaisluvusta m ja n on jaollinen luvulla 149.

2.

- a) Väite ei pidä paikkaansa. Vastaesimerkki: $m = 9$ ja $n = 19$.
- b) Väite pitää paikkansa Eukleideen lemmän nojalla, sillä 149 on alkuluku.

3. Määritä luvun alkutekijähajotelma.

- a) 126
- b) 13200
- c) 1000000

3.

- a) $2 \cdot 3^2 \cdot 7$
- b) $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$
- c) $2^6 \cdot 5^6$

4. Millä luvuilla on luvun 267 jaollisuus vähintään tutkittava, jotta saadaan selville, onko se alkuluku?

4. Riittää tarkistaa jaollisuus alkuluvuilla $\sqrt{267}$ asti, eli siis alkuluvuilla 2, 3, 5, 7, 11, 13.

5. Onko luku

- a) 229
- b) 251
- c) 707
- d) 2827

alkuluku?

5.

- a) On.
- b) On.
- c) Ei ole.
- d) Ei ole.

6. Tutki laskimen factor-toiminnolla, onko luku

- a) 72 222 222 227
- b) 7 222 222 227
- c) 722 222 227

alkuluku.

6.

- a) Luku ei ole alkuluku.
- b) Luku ei ole alkuluku.
- c) Luku on alkuluku.

7. Etsi Internetistä, mikä on tällä hetkellä suurin tunnettu alkuluku.

8. Jos luvut n ja $n + 2$ ovat alkulukuja, niin kyseistä lukuparia kutsutaan alkulukukaksosiksi. Se, onko alkulukukaksosia äärettömän monta, on vielä ratkaisematon lukuteorian ongelma. Etsi kymmenen alkulukukaksosta. Käytä laskinta tai tietokonetta apunasi.

8. Esimerkiksi 10 pienintä n siten että n ja $n + 2$ ovat alkulukukaksoset ovat: 3, 5, 11, 17, 29, 41, 59, 71, 101, 107.

9. Mikä on lukujen suurin yhteinen tekijä?

- a) $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ ja $2^{11} \cdot 3^8 \cdot 11 \cdot 17^{10}$
- b) $5 \cdot 7^3 \cdot 19^2$ ja $3 \cdot 11^2 \cdot 41$

9.

- a) $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$
- b) 1

10. Mikä on lukujen pienin yhteinen jaettava?

- a) $7^3 \cdot 11^2$ ja $2^4 \cdot 7^2 \cdot 11$
- b) $41 \cdot 43$ ja $41 \cdot 43$
- c) $2 \cdot 7$ ja $5 \cdot 13$

10.

- a) $2^4 \cdot 7^3 \cdot 11^2$
- b) $1763 = 41 \cdot 43$
- c) $910 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$

11. Määritä alkutekijähajotelman avulla lukujen

- a) 70 ja 385
- b) 240 ja 4900
- c) 2310 ja 17199

suurin yhteinen tekijä ja pienin yhteinen jaettava.

11. Suurin yhteinen tekijä:

- a) 35 b) 20 c) 21.

Pienin yhteinen jaettava:

- a) $770 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
- b) $58800 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$
- c) $2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$.

12. Määritä $\text{syt}(117325, 16625)$ ja $\text{pyj}(117325, 16625)$.

12.

$$\text{syt}(117325, 16625) = 5^2 \cdot 19 = 475$$

$$\text{pyj}(117325, 16625) = 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19^2$$

13. Pulsarit ovat nopeasti pyöriviä ja rytmisiä radiopulsseja säteileviä tähtiä.

Pulsari X lähettää radiopulssin 510 millisekunnin välein, pulsari Y taas 357 millisekunnin välein.

- a) Eräänä ajanhetkenä molempien pulsarien lähettämä pulssi havaitaan yhtä aikaa. Kuinka pitkän ajan kuluttua molempien pulsarien pulssit havaitaan yhtä aikaa seuraavan kerran?
- b) Kuinka monta kierrosta pulsarit pyörähtävät kyseisenä aikana?

13.

- a) 3570 millisekunnin kuluttua.
- b) Virhe kirjassa: tehtävää ei voi ratkaista annetuilla tiedoilla, mikäli ei tunneta pulsarien pyörimisen yhteyttä radiopulsseihin.

14. Perustele väite todeksi tai epätodeksi.

- a) Jos luku on jaollinen luvuilla 15 ja 12, niin se on jaollinen myös luvulla 180.
- b) Jos luku on jaollinen luvuilla 36 ja 5, niin se on jaollinen myös luvulla 180

14.

- a) Väite ei päde. Vastaesimerkki: luku 60 on jaollinen luvuilla 15 ja 12 mutta ei luvulla 180.
- b) Väite pätee sillä $\text{syt}(36, 5) = 1$ ja $180 = 36 \cdot 5$.

15. Osoita, että luku $5n^3 - 5n$ on jaollinen luvulla 30, kun n on luonnollinen luku.

16. Osoita, että muotoa $p^2 - 1$ oleva luku on jaollinen luvulla 12, kun p on alkuluku ja suurempi kuin 3. [YO kevät 2010 tehtävä 12]

17. Erään maan olympiajoukkueessa oli vain yleisurheilijoita ja purjehtijoita. Yleisurheilijoita oli neljä kertaa niin paljon kuin purjehtijoita. Naisia oli kaksi kertaa niin paljon kuin miehiä. Kun joukkue matkusti 100-paikkaisella lentokoneella kisoihin, oli koneen matkustajista noin puolet joukkueen urheilijoita ja loput valmentajia, huoltajia ja median edustajia. Kuinka monta urheilijaa joukkueessa oli? [Tarkennus tehtävään: tässä ”noin puolet” tarkoittaa että erotus 50:een on alle 7.]

17. 45

18. Olkoon n kokonaisluku. Osoita, että luku $n^5 + 10n^4 + 35n^3 + 50n^2 + 24n$ on jaollinen luvulla 120. Vihje: Käytä symbolisen laskimen `factor`-toimintoa.

19. Määritä jakojäännös, kun luku $51 \cdot 31^{94} + 102$ jaetaan luvulla 47. Voit käyttää Fermat’n pientä lausetta apunasi.

20. Osoita, että $2^{341} = 2^{11 \cdot 31} \equiv 2 \pmod{341}$. Tulos osoittaa, että kiinalaiseen alkulukutestiin liittyvä otaksuma on epätosi eikä testi siten toimi kaikilla luvuilla.

21. Alkulukujen lukumääräfunktio $\pi(x)$ kertoo välillä $[0, x]$ olevien alkulukujen lukumäärän. Alkulukujen tiheys välillä $[0, x]$ saadaan jakamalla $\pi(x)$ välin pituudella x .

- Laske $\pi(10^n)$, kun $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
- Mitä alkulukujen määrälle $\pi(x)$ näyttää tapahtuvan, kun x kasvaa? Miksi?
- Laske alkulukujen tiheys väleillä $[0, 10^n]$, kun $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
- Mitä alkulukujen tiheydelle

$$\frac{\pi(x)}{x}$$

näyttää tapahtuvan, kun x kasvaa?

Käytä tehtävässä laskinta tai matemaattisia ohjelmistoja, kuten verkosta ilmaiseksi ladattavissa olevaa Maxima-ohjelmistoa. Esimerkiksi Texas Instrumentsin TI-Nspire CX CAS -laskin sisältää toiminnon `numtheory\primecount(a,b)`, joka antaa alkulukujen määrän välillä $[a, b]$.

22. **Mersennen alkulukuja** ovat alkuluvut, jotka ovat muotoa $2^p - 1$, missä p on alkuluku.

- Etsi neljä pienintä Mersennen alkulukua.
- Ovatko kaikki muotoa $2^p - 1$ olevat luvut alkulukuja?
- Osoita, että jos $2^p - 1$ on alkuluku, myös p on alkuluku.

Vihje: Käytä epäsuoraa todistusta ja sovelta kaavaa

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + \dots + x + 1).$$

- Selvitä kokeilemalla pienillä luvuilla, mitä on $\text{sy}(a, b) \cdot \text{pyj}(a, b)$.
- Todista saamasi tulos.
- Miten Eukleideen algoritmia ja saamaasi tulosta voidaan hyödyntää pienimmän yhteisen jaettavan määrittämisessä?
- Määritä Eukleideen algoritmin ja saamasi tuloksen avulla $\text{pyj}(496125, 9450)$.
- Texas Instrumentsin TI-Nspire CX CAS -laskimesta löytyy ohjelma `numtheory\gcdstep(a,b)`, joka määrittää lukujen a ja b suurimman yhteisen tekijän Eukleideen algoritmilla välivaiheet näyttäen. Tutustu ohjelman toimintaan ja määritä sen avulla $\text{pyj}(7856, 678)$. Kirjoita ylös Eukleideen algoritmin välivaiheet käyttäen tämän oppikirjan mukaisia merkintöjä.

24. * Salakirjoita RSA-algoritmia käyttäen viesti 66, joka vastaa ASCII-kooda-

usjärjestelmässä kirjainta B. Käytä esimerkin 7 avainta ja esim. Wolfram Alphaa. Tarkasta tuloksesi purkamalla viesti. Vihje: Voit antaa syötteen Wolfram Alphalle muodossa $\text{Mod}[a^p, n]$, esim. $\text{Mod}[660^{821}, 2773]$.

25. * Osoita, että Eulerin φ -funktio on multiplikatiivinen eli $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$, kun $\text{syt}(m, n) = 1$.

a) Käyttäen Eulerin tulokaavaa

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

missä p on alkuluku.

b) Suoraan φ -funktion määritelmästä.

26. * Osoita seuraavat φ -funktion ominaisuudet:

a) Jos n on pariton, niin $\varphi(2n) = \varphi(n)$.

b) Jos n on parillinen, niin $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$

27. * Laske $\varphi(1001)$, $\varphi(5040)$ ja $\varphi(36\,000)$.

28. * Osoita, että $\varphi(n)$ on parillinen, kun $n > 2$. Vihje: Oleta ensin, että n on muotoa $n = 2^k$, $k \geq 2$.

29. * Osoita edellisen tehtävän tulosta käyttäen, että alkulukuja on äärettömän monta.

30. * Osoita Eulerin tulokaava käyttäen hyväksi φ -funktion multiplikatiivisuutta.

LUKU 7

Luku 7

7.1 Tehtäväsarja 1

Tehtäviä

1. Määritä lauseen a) $\neg(B \wedge A) \vee (A \wedge \neg B)$, b) $(B \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg B)$ totuusarvo, kun A on tosi ja B on epätosi.

1.

- a) tosi
- b) epätosi

2. Esitä a) kaksoisnegaation laki $\neg\neg A \leftrightarrow A$ b) De Morganin laki $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ loogisen algebran merkinnöin. Laadi totuustaulu laskemalla loogisen algebran laskusäännöillä ja osoita laki päteväksi.

2.

- a) $\neg(\neg A) = A$
- b) $\neg(A \cdot B) = (\neg A) + (\neg B)$

3. Esitä a) implikaatio $A \rightarrow B$, b) ekvivalenssi $A \leftrightarrow B$ käyttäen loogisen algebran merkintöjä. Laske lauseen totuusarvot atomilauseiden A ja B eri totuusarvoilla käyttäen loogisen algebran laskusääntöjä.

3.

- a) $(\neg A) + (A \cdot B)$
- b) $((\neg A) \cdot (\neg B)) + (A \cdot B)$

7.2 Tehtäväsarja 2

Tehtäviä

1. Osoita, että looginen algebra toteuttaa Boolean algebran ehdot 1, 2, 5–8 ja 10.

2. Osoita, että seuraavat laskusäännöt ovat voimassa loogisessa algebras-
sa.

- a) $x + x = x$
- b) $x \cdot x = x$
- c) $x + 1 = 1$
- d) $x \cdot 0 = 0$
- e) $x + x \cdot y = x$
- f) $x \cdot (x + y) = x$
- g) $x + (-x) \cdot y = x + y$
- h) $x \cdot (-x + y) = x \cdot y$
- i) $-(-x) = x$
- j) $-(x + y) = (-x) \cdot (-y)$
- k) $-(x \cdot y) = (-x) + (-y)$

3. Tulkitse, mitä Boolean algebran tulokset

- a) $x \cdot x = x$
- b) $x + 1 = 1$
- c) $x \cdot 0 = 0$
- d) $-(-x) = x$
- e) $x + x \cdot y = x$
- f) $x \cdot (x + y) = x$

tarkoittavat joukko-opissa. Perustele tulokset myös käyttäen Venn-
diagrammeja.

3. Olkoon $x, y \subseteq z$

- a) $x \cap x = x$
- b) $x \cup z = z$
- c) $x \cap =$
- d) $z \setminus (z \setminus x) = x$
- e) $x \cup (x \cap y) = x$
- f) $x \cap (x \cup y) = x$

4. Sievennä lausekkeet Boolean algebran määritelmän ja tehtävän 2 laskusääntöjen avulla.

- a) $x \cdot x + x \cdot x$
- b) $x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$
- c) $(a + b) \cdot (a + c)$
- d) $a + b \cdot a + b$
- e) $(a + (-b)) \cdot b$
- f) $a + b + (-(a \cdot b))$

4.

- a) x
- b) $x \cdot y$
- c) $a + (b \cdot c)$
- d) $a + b$
- e) $a \cdot b$
- f) 1

5. Piirrä Boolean algebran lauseketta

- a) $(x + y) \cdot (x + z)$
- b) $(x + y) \cdot (x + (-y))$
- c) $x + (-x) \cdot y$

vastaava looginen piiri. Sievennä lauseke Boolean algebran säännöillä ja piirrä sievennettyä muotoa vastaava piiri. Loogisia piirejä on käsitelty kappaleessa 2.1 tehtävissä 11 ja 12.

5.

- a) $x + (y \cdot z)$
- b) x
- c) $x + y$

6. * Osoita, että tehtävän 2 säännöt ovat voimassa kaikissa Boolean algebroissa.

7. * Reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$ määritellään yhteenlaskua muistuttava laskutoimitus $x \circ y$ seuraavasti: $x \circ y = x + y - 2$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Osoita, että laskutoimitus toteuttaa seuraavat ehdot:

i $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ kaikilla $x, y, z \in \mathbb{R}$.

ii $x \circ y = y \circ x$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

iii On olemassa sellainen luku $\omega \in \mathbb{R}$, että $x \circ \omega = \omega \circ x = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Mikä ω on?

iv Jokaisella $x \in \mathbb{R}$ on vasta-alkio x^* , jolle $x \circ x^* = x^* \circ x = \omega$.

[YO syksy 1997 tehtävä 9b]