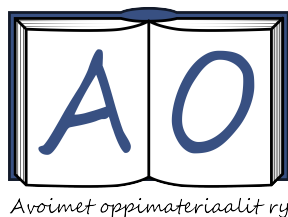


Vapaa matikka

Polynomifunktiot (MAA2)

”Määritelmä sanalle rekursio: ks. rekursio.”



Teknologiateollisuuden
100-VUOTISSÄÄTIÖ



Sisältö on lisensoitu avoimella CC BY 4.0 -lisenssillä.

Versio 0.90 (22.9.2014)

LISENSSI

Tämän teoksen käyttöoikeutta koskee Creative Commons Nimeä 4.0 Kansainvälinen (CC BY 4.0) -lisenssi. This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) License.



Lisenssin suomenkielinen tiivistelmä

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.fi>



Tarkat lisenssiehdot (englanniksi)

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>

Voit vapaasti:

Jakaa. Kopioda ja jatkolevittää materiaalia, missä tahansa välineessä ja muodossa, mihin tahansa tarkoitukseen, myös kaupallisesti.

Muuntaa. Remiksata, muuntaa ja jalostaa materiaalia, mihin tahansa tarkoitukseen, myös kaupallisesti.

Lisenssinantaja ei voi vetää näitä vapauksia pois niin kauan kun seuraat lisenssin ehtoja.

Seuraavilla ehdoilla:

Nimeä. Sinun on mainittava tekijät, näytettävä linkki lisenssiin sekä kerrottava, jos olet muuntanut materiaalia. Voit tehdä tämän millä tahansa kohtuullisella tavalla, mutta et niin, että lisenssin antaja näyttäisi tukevan sinua tai materiaalin käyttöäsi.

No additional restrictions. Et voi lisätä lakiehtoja tai teknisiä estoja, jotka estäisivät muita tekemästä mitään, minkä lisenssi sallii.

Huomautukset:

1. Sinun ei tarvitse seurata lisenssiehtoja niiden materiaalin osien kohdalla, jotka ovat public domainissa tai joiden käyttö on sallittua tilannekohtaisen tekijänoikeuspoikkeuksen tai -rajoituksen vuoksi.
2. Mitään takuita ei ole annettu. Lisenssi ei välttämättä anna sinulle kaikkia käyttö-tarkoituksesi edellyttämiä oikeuksia. Esimerkiksi julkisuus-, yksityisyys- tai moraalisäädökset voivat rajoittaa materiaalin käyttöäsi.

KIRJOITTAJAT

Hellsten, Lauri

Häsä, Jokke

Ilomäki, Niko

Kahilakoski, Olli-Pekka

Keinänen, Tero

Kärkkäinen, Pauliina

Linja-aho, Vesa

Majakari, Edvard

Mauno, Ossi

Mäkinen, Joonas "JoonasD6"

Oras, Ilari

Pajunen, Matti

Peura, Pekka

Rämö, Johanna

Salosensaari, Aaro

Sipola, Aleksi

Talvitie, Topi

Thitz, Paula

Tiensuu, Sampo

Tilvis, Ville

KIITOKSET

Lehtonen, Oskari (toi Red Bullia)

MIKROLAHJOITUSKANAVAT



Flattr

<https://flattr.com/profile/oppikirjamaraton>



Bitcoin

bitcoin:148pMeTViRMFBqMVZRnMZ6Hwccq9WTubq1?label=Oppikirjamaraton

UUSIMMAT VERSIOT

Git-repot

<https://github.com/avoimet-oppimateriaalit-ry>

Pdf-vedokset

<http://avoimetoppimateriaalit.fi/vapaa-matikka>

PROJEKTI

Tavoite

Kokonainen lukion pitkän matematiikan kirjasarja CC BY -lisenssillä

Koordinaattori

Vesa Linja-aho (Metropolia Ammattikorkeakoulu)

Rahoitus

Teknologiaateollisuuden 100-vuotissäätiö: 30 000 € (2013)

AVOIMET OPPIMATERIAALIT RY

Kotisivu

<http://avoimetoppimateriaalit.fi>

Wiki (beta)

Ei tällä hetkellä käytössä.

Sähköpostit

yhdistys@avoimetoppimateriaalit.fi

vapaamatikka@avoimetoppimateriaalit.fi

Facebookissa

<https://facebook.com/avoimetoppimateriaalit>

<https://facebook.com/oppikirjamaraton>

IRCnetissä

#avoimetoppimateriaalit

Sisältö

Esipuhe	7
1 Polynomi	9
1.1 Polynomi	9
1.1.1 Polynomit	9
1.1.2 Polynomin yleinen muoto	13
1.1.3 Polynomifunktion arvo	14
1.2 Polynomeilla laskeminen	18
1.2.1 Polynomien yhteen- ja vähennyslasku	19
1.2.2 Polynomien kertolasku	21
1.3 Muistikaavat	27
1.4 Tulon nollasääntö & tulon merkkisääntö	34
1.5 Polynomifunktion kuvaaja	39
1.5.1 Kuvaajan piirtäminen	40
1.5.2 Kuvaajan tulkintaa	41
2 Ensimmäinen aste	46
2.1 Epäyhtälöiden teoriaa	46
2.1.1 Epäyhtälöiden muokkaaminen	47
2.1.2 Reaalilukuvälit	49
2.2 Kertausta: ensimmäisen asteen yhtälö	56
2.3 Ensimmäisen asteen epäyhtälö	61
3 Toinen aste	67
3.1 Toisen asteen polynomifunktio ja sen kuvaaja	67
3.2 Toisen asteen yhtälö	71
3.2.1 Vaillinaiset yhtälöt	73
3.2.2 Neliöksi täydentäminen	75
3.3 Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava	80
3.4 Diskriminantti	87
3.5 Toisen asteen epäyhtälö	92
3.6 Polynomin jakaminen tekijöihin	99

3.6.1	Polynomien jakolause	99
4	Korkeampi aste	105
4.1	Korkeamman asteen polynomifunktio	105
4.2	Korkeamman asteen yhtälöt	109
4.2.1	Potenssiyhtälö	109
4.2.2	Tekijöihinjako	110
4.2.3	Sijoitukset	111
4.3	Korkeamman asteen epäyhtälöt	115
	Kertausosio	119
	Testaa tietosi!	119
	Kertaustehtäviä	122
	Harjoituskokeita	126
	Ylioppilaskoetehtäviä	132
	Lisämateriaalia	135
	Paraabeli	135
	Vastaukset	139
	Hakemisto	169

Polynomit ovat hyvin keskeisiä sovelletussa matematiikassa. Niin fysiikan, kemian, tietotekniikan kuin myös taloustieteiden parissa varsin monet laskutoimitukset pelkistyvät lopulta polynomien käsittelyksi. Esimerkiksi sellaiset tietotekniset sovellukset kuten hahmon tunnistaminen kuvasta, äänen kompressointi (mp3) ja vaikkapa sikiön sydänäänien erottaminen perustuvat lopulta polynomien laskentaan. Itse asiassa polynomit ovat niin yleisiä matematiikassa, että riippumatta sovellusalueesta ne on hyvä tuntea perusteellisesti.

Pitkän matematiikan toisella kurssilla MAA2 Polynomifunktiot käsitellään polynomifunktioita, -yhtälöitä ja -epäyhtälöitä. Kurssilla syvennetään ensimmäisen kurssin asioita ja sovelletaan niitä polynomien maailmassa. Oppikirja on rakennettu siten, että aiheet esitellään lukujen alussa ja havainnollistetaan esimerkein. Tehtäviä on runsaasti ja niiden tarkoituksena on saada opiskelija sisäistämään opiskellut asiat ja siirtämään ne käytäntöön.

Tässä kirjassa käymme läpi opetussuunnitelman mukaiset keskeiset sisällöt, joita ovat

- polynomien tulo ja binomikaavat
- polynomifunktio
- toisen ja korkeamman asteen polynomiyhtälöt
- toisen asteen yhtälön juurten lukumäärän tutkiminen
- polynomiepäyhtälön ratkaiseminen

Opetussuunnitelman mukaiset kurssin keskeiset tavoitteet ovat, että opiskelija

- harjaantuu käsittelemään polynomifunktioita
- oppii ratkaisemaan toisen asteen polynomiyhtälöitä ja tutkimaan ratkaisujen lukumäärää
- oppii ratkaisemaan korkeamman asteen polynomiyhtälöitä, jotka voidaan ratkaista ilman polynomien jakolaskua
- oppii ratkaisemaan yksinkertaisia polynomiepäyhtälöitä

Avoimet oppimateriaalit ry

Yhdistys tuottaa ja julkaisee oppimateriaaleja ja kirjoja, jotka ovat kaikille ilmaisia ja vapaita käyttää, levittää ja muokata. Vapaa matikka -sarja on suunnattu lukion pitkän matematiikan kursseille ja täyttää valtakunnallisen opetussuunnitelman vaatimukset.

LUKU 1

Polynomi

1.1 Polynomi



Opetus.tv: *polynomien peruskäsitteet* (9.00)

<http://opetus.tv/maa/maa2/polynomien-peruskasitteet/>

1.1.1 POLYNOMIT

Polynomit ovat matematiikassa ryhmä erittäin tärkeitä lausekkeita.

Polynomi on lauseke, jossa esiintyy vain:

- muuttujien potensseja (eksponentti luonnollinen luku, mukaan lukien 0)
- kerrottuna jollakin vakiolla sekä
- näiden potenssien summia.

Polynomissa voi olla yksi tai useampia muuttujia, tai se voi olla muuttujaton vakio-polynomi. Vakio-polynomin tapauksessa muuttujan eksponentin ajatellaan olevan 0, sillä $x^0 = 1$, jolloin muuttuja – oli se mikä hyvänsä – katoaa.

ESIMERKKI 1.1

Kaikki seuraavat lausekkeet ovat polynomeja:

4	ei muuttujia ($4 = 4 \cdot 1 = 4x^0$)
$2x + 1$	muuttujana x ($x = x^1$)
$5x^2 + x - 7$	muuttujana x
$-3t^{100}$	muuttujana t
y	muuttujana y
$y^2 + 1$	muuttujana y
$xy^2 + x^2y$	muuttujina x ja y

ESIMERKKI 1.2

Miksi muuttujan t lausekkeet

1. $\frac{2}{t}$
2. π^t
3. $\sqrt{t} + 2$ ja
4. t^π

eivät ole polynomeja?

Ratkaisu.

1. $\frac{2}{t}$ ei ole polynomi, sillä muuttujan t eksponentti ei ole luonnollinen luku:
 $\frac{2}{t} = 2 \cdot \frac{1}{t} = 2t^{-1}$, ja $-1 \notin \mathbb{N}$.
2. π^t ei ole polynomi, sillä muuttuja on eksponentissa eikä potenssin kantalukuna.
3. $\sqrt{t} + 2$ ei ole polynomi, sillä neliöjuuri ei ole esitettävissä potenssina, jonka eksponentti olisi luonnollinen luku: $\sqrt{t} + 2 = t^{\frac{1}{2}} + 2$, ja $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.
4. t^π ei ole polynomi, sillä muuttujan eksponentti ei ole luonnollinen luku: $\pi \notin \mathbb{N}$. (π on irrationaaliluku.)

Polynomi on summalauseke, joiden yhteenlaskettavia kutsutaan **termeiksi**. Puhumme vain yhteenlaskusta, vaikka polynomissa esiintyykin miinusmerkkejä, sillä jokaisen erotuksen voi esittää summana vähennyslaskun määritelmän $x - y = x + (-y)$ mukaisesti (ks. Vapaa matikka 1).

Termien **kertoimet** on tapana kirjoittaa muuttujan potenssin vasemmalle puolelle. (Tietenkin esimerkiksi $2x$ tarkoittaa samaa kuin x^2 , koska reaalilukujen kertolasku on vaihdannainen.) Jos erillistä kerrointa ei näy, se on 1, sillä $1 \cdot x = x$. Miinusmerkkinen termi tulkitaan niin, että sen kerroin on -1 . Ensimmäisen eli vasemmanpuoleisimman termin kertoimen positiivisuutta ei tarvitse erikseen näyttää plusmerkillä.

Termejä, jotka eivät sisällä muuttujaa, kutsutaan **vakiotermeiksi**. Vakiotermit voivat koostua mistä tahansa luvuista. Vakiotermin kerroin on kyseinen vakio itse, sillä mikä tahansa luku voidaan ajatella olevan muuttujan nollannen potenssin kerroin.

ESIMERKKI 1.3

Kirjoita polynomi $t^4 - t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 9\,001$ muodossa, missä ei esiinny vähennyslaskua. Mitkä ovat polynomin termit? Mitkä ovat näiden termien kertoimet?

Ratkaisu. Vähennyslaskun määritelmän perusteella

$$t^4 - t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 9\,001 = t^4 + (-t^3) + (-\frac{1}{2}t^2) + (-9\,001).$$

Tästä muodosta nähdään helposti, polynomin termit eli yhteenlaskettavat osat ovat t^4 , $-t^3$, $-\frac{1}{2}t^2$ ja $-9\,001$. Termin t^4 kerroin on 1, termin $-t^3$ kerroin on -1 , termin $-\frac{1}{2}t^2$ kerroin on $-\frac{1}{2}$, ja vakiotermin kerroin on vakio itse eli $-9\,001$.

ESIMERKKI 1.4

Polynomissa $-2x^3 - 5x^2 + x - \sqrt{2}$ on neljä termiä: $-2x^3$, $-5x^2$, x ja $-\sqrt{2}$.

Polynomi-sanana 'poly' on kreikkaa ja tarkoittaa montaa. Erityisesti yhden termin polynomeja kutsutaan **monomeiksi**, kahden termin polynomeja **binomeiksi**, kolmen termin polynomeja **trinomeiksi** ja niin edelleen kreikkalaisten lukusanojen mukaan.

ESIMERKKI 1.5

Esimerkkejä polynomeista, joissa on eri määrä termejä:

monomi	binomi	trinomi
$-3x^2$	$x^2 - 5$	$y^2 + 3y - x$
42	$x + y$	$1 - z - z^2$

Muuttujan eksponenttia kutsutaan termin **asteeksi** tai **asteluvuksi**. Vakiotermin aste on nolla. **Polynomin aste** on suurin sen sievennetyn muodon termien asteista.

ESIMERKKI 1.6

Mitkä ovat polynomin $x^4 - 2x^3 + 42$ termit ja niiden asteet? Mikä on polynomin aste?

Vastaus. Polynomin $x^4 - 2x^3 + 42$ termit ovat x^4 , $-2x^3$ ja 42 ja niiden asteet ovat neljä, kolme ja nolla. Polynomin aste on sama kuin sama kuin korkein termien asteista eli neljä.

Polynomin todellisen asteen saaminen selville voi vaatia polynomin sieventämistä.

ESIMERKKI 1.7

Trinomi $x^2 - x^2 + 1$ ei ole toisen, vaan nollannen asteen polynomi, sillä sievennettynä $x^2 - x^2 + 1 = 1 = 1x^0$. Sieventäminen muutti trinomin monomiksi.

Useamman muuttujan tapauksessa polynomin termien asteet lasketaan muuttujien potenssien summana.

ESIMERKKI 1.8

- a) Monomin x^3y^2z aste on 6, sillä muuttujien eksponenttien summa on $3 + 2 + 1 = 6$.
- b) Trinomin $x^6 + x^2y^5 - 1$ aste on 7, sillä korkea-asteisin termi on x^2y^5 , ja sen aste on $2 + 5 = 7$.

Koska yhteenlasku on vaihdannainen ja liitännäinen, polynomin termit voi kirjoittaa missä tahansa järjestyksessä. Esimerkiksi polynomi $y^4 + y^2 - 1$ voidaan kirjoittaa täysin yhtenevästi myös järjestyksessä $-1 + y^4 + y^2$. Yleensä polynomien termit kirjoitetaan niiden asteen perusteella laskevaan järjestykseen niin, että korkeimman asteen termi kirjoitetaan ensin. Termit on joskus tapana ryhmitellä – jos mahdollista – myös muuttujittain.

ESIMERKKI 1.9

Mikä on polynomin $3t^2 - 1 + t^3$ aste? Mikä on korkeimman asteen termin kerroin?

Ratkaisu. Aloitetaan järjestämällä polynomin termit asteluvun mukaiseen laskevaan järjestykseen:

$$3t^2 - 1 + t^3 = t^3 + 3t^2 - 1$$

Vastaus. Polynomi on kolmatta astetta. Korkeimman (eli kolmannen) asteen termin kerroin on 1.

ESIMERKKI 1.10

Kuinka monetta astetta on (kahden muuttujan) polynomi $x^2 + 2xy^2 + xy$?

Ratkaisu. Merkitään selkeyden vuoksi molempien muuttujien kaikki eksponentit näkyviin:

$$x^2 + 2x^1y^2 + x^1y^1$$

Kun termissä on kaksi eri muuttujaa, niin termin asteluku on näiden muuttujien eksponenttien summa. Näin ollen ensimmäisen termin aste on kaksi, toisen termin aste on $1 + 2 = 3$ ja kolmannen termin aste on $1 + 1 = 2$. Järjestetään termit vielä asteiden mukaiseen laskevaan järjestykseen:

$$x^2 + 2x^1y^2 + x^1y^1$$

$$2x^1y^2 + x^1y^1 + x^2$$

Vastaus. Polynomin asteluku on kolme.

1.1.2 POLYNOMIN YLEINEN MUOTO



Opetus.tv: *polynomin täsmällinen määritelmä* (6:10)

<http://opetus.tv/maa/maa2/polynomin-tasmallinen-maaritelma/>

Formaalisti kirjoitettuna yhden muuttujan polynomin yleinen muoto on

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

jollakin $n \in \mathbb{N}$. Muuttuja x kertoo polynomin asteen, ja kertoimet $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ ovat reaalityyppisiä lukuja. Kertoimen symbolilla a on juoksevana alaindeksinä sama luku n siksi, että vakioita on yhtä monta kuin on polynomin aste. Jos jokin kertoimista on 0, kyseinen termi katoaa nollan kertolaskuominaisuuksien vuoksi.

ESIMERKKI 1.11

Polynomi $-3x^{13} - \frac{3}{4}x^2 - 17$ on polynomin yleistä muotoa siten, että $n = 13$, $a_{13} = -3$, $a_2 = -\frac{3}{4}$ ja $a_0 = -17$, ja kaikki muut kertoimet ovat nollia.

Jokainen lauseke, joka on esitettävissä polynomin yleisessä muodossa, on polynomi.

ESIMERKKI 1.12

Lauseke $\frac{2x^3+x^2}{x}$ ei ensi näkemältä näytä polynomilta murtolausekkeen nimittäjässä olevan x :n vuoksi. Lauseketta on kuitenkin mahdollista sieventää esimerkiksi jakamalla murtolauseke kahteen yksinkertaisempaan samannimiseen murtolausekkeeseen ja tämän jälkeen supistamalla termeittäin:

$$\frac{2x^3+x^2}{x} = \frac{2x^3}{x} + \frac{x^2}{x} = 2x^2 + x$$

Nyt nähdään selvästi, että kyseessä on toisen asteen kaksiterminen yhden muuttujan polynomi. (Huomataan kuitenkin, että alkuperäisen esitysmuodon vuoksi $x \neq 0$, koska nolllalla jakamista ei ole määritelty.)

1.1.3 POLYNOMIFUNKTION ARVO



Opetus.tv: *polynomiesimerkkejä* (6:59 ja 7:43)

<http://opetus.tv/maa/maa2/polynomiesimerkkeja/>

Polynomi reaalilukujen laskutoimituksena määrittää funktion, jota kutsutaan **polynomifunktioksi**. Oletusarvoisesti kaikkien lukiomatematiikassa käsiteltävien polynomifunktioiden määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$, ja tällöin myös funktion arvot reaalilukuja. (Numeeristen ja algebrallisten menetelmien syventävässä kurssilla tarkastellaan polynomifunktioita myös reaalilukujoukkoa laajemmalla kompleksilukualueella $\mathbb{C}$.)

Polynomifunktioita nimetään tyypillisesti suuraakkosin kuten P , Q tai R . Niin kuin ensimmäisellä kurssilla opittiin, funktion arvoja lasketaan sijoittamalla funktion lausekkeessa muuttujan paikalle eri määrittelyjoukkoon kuuluvia lukuja.

ESIMERKKI 1.13

Polynomi $5x^2 - 3x + 2$ määrittää funktion $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jonka arvot voidaan laskea kaavalla $P(x) = 5x^2 - 3x + 2$. Lasketaan funktion arvoja sijoittamalla joitakin (mielivaltaisia) lukuja muuttujan x paikalle:

$$P(2) = 5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 20 - 6 + 2 = 16$$

$$P(-1) = 5(-1)^2 - 3(-1) + 2 = 5 + 3 + 2 = 10$$

$$P(-3) = 5(-3)^2 - 3(-3) + 2 = 45 + 9 + 2 = 56.$$

ESIMERKKI 1.14

Polynomi $x^2 - x$ määrittää reaalfunktion Q , jonka arvot voidaan laskea yhtälöstä $Q(x) = x^2 - x$. Laske funktion arvo muuttujan arvolla $x = -1$.

Ratkaisu. Sijoitetaan funktion laskulakiin $x^2 - x$ muuttujan x paikalle haluttu uusi arvo -1 . Tällöin funktion arvoksi kohdassa $x = -1$ saadaan $Q(-1) = (-1)^2 - (-1) = 1 + 1 = 2$.

Vastaus. $Q(-1) = 2$

ESIMERKKI 1.15

★ Määritellään kahden muuttujan polynomifunktion R arvot kaavalla $R(x,y) = xy - y^2$. Lasketaan funktion arvot $R(0,0)$, $R(1, -1)$ ja $R(-1,1)$:

Merkintä $R(0,0)$ tarkoittaa, että molemmat muuttujat saavat arvon 0. Tällöin suoralla sijoituksella saadaan $R(0,0) = 0 \cdot 0 - 0^2 = 0$.

$R(1, -1)$ tarkoittaa, että funktion ensimmäinen muuttuja x saa arvon 1 ja jälkimmäinen muuttuja y saa sarvon -1 . Sijoituksella lasketaan

$$R(1, -1) = 1 \cdot (-1) - (-1)^2 = -1 - 1 = -2.$$

$$\text{Samoin } R(-1,1) = -1 \cdot 1 - 1^2 = -1 - 1 = -2.$$

Polynomeja ja polynomifunktioita käsitellään usein yhtäläisesti; voidaan esimerkiksi sanoa ”polynomi $P(x) = 2x + 1$ ”, vaikka tarkoitetaan vastaavaa polynomifunktiota. Usein on yksinkertaisesti kätevää nimetä käsiteltäviä polynomeja, vaikei alettaisi määrittellä tarkasti niiden ominaisuuksia funktioina (määrittelyjoukko, arvojoukko jne.; ks. Vapaa matikka 1).

Tehtäviä

Opi perusteet

1. Mitkä seuraavista ovat polynomeja?

- a) $\frac{1}{x}$
- b) $5x - 125$
- c) $\sqrt{x} + 1$
- d) $3x^4 + 6x^2 + 9$
- e) $\sqrt{2}x - x$
- f) $4^x + 5x + 6$
- g) $y^4 + 2\pi$
- h) $\frac{4y^2 - y}{2y}$
- i) $\frac{6x + 40}{x^3}$

2. Mikä on/mitkä ovat polynomin

$$P(x) = x^5 - 3x^3 + 2x - 1$$

- a) aste
- b) termit
- c) kolmannen asteen termi
- d) kolmannen termin aste
- e) vakiotermi

3. Täydennä taulukko. Polynomeissa on vain yksi muuttuja, x .

polynomi	termien lukumäärä	korkeimman asteen termin kerroin	polynomin asteluku	vakiotermi
$-2x^2 + 6x$	2	-2	2	0
$7x^3 - x - 15$				
	2	-9	2	5
	1	-5	99	

4. Olkoot $P(x) = x^2 + 5$ ja $Q(x) = x^3 - 1$. Laske

- a) polynomin $P(x)$ arvo, kun $x = 2$
- b) polynomin $Q(x)$ arvo, kun $x = 1$
- c) $P(-7)$
- d) $Q(-1)$.

Hallitse kokonaisuus

5. Mitkä ovat seuraavien polynomien asteet?

- a) $x^2 + 3x - 5$
- b) $100 + x$
- c) $3x^3 + 90x^8 + 2x$
- d) $12x^1 + 34x^2 + 56x^3 + 78x^5 + 90x^5$

6. Olkoot $P(x) = x^2 + 3x + 4$ ja

$Q(x) = x^3 - 10x + 1$. Laske:

- a) $P(-1)$
- b) $Q(-2)$
- c) $P(3)$
- d) $Q(0)$
- e) $P(2x)$

Lisää tehtäviä

7. Täydennä taulukko. Polynomeissa on muuttujat x ja y .

polynomi	termien lukumäärä	korkeimman asteen termin kerroin	polynomin asteluku	2. asteen termin kerroin
$x + xy^2 + 6y^2 - 1$	4	1	3	1
$ax^6 + y^4 - 4by^2 + \sqrt{2}$				
$100x + x^3y^4 - 99y$				
$8y - \frac{\sqrt{15}}{2}x^3$				
$\sqrt{3}xy^6 + y^8 - 4x^2$				

8. ★ Määritellään kahden reaalimuuttujan polynomifunktio kaavalla $f(x,y) = xy^2 + x^2y$.

- 1. Laske funktion arvo $f(-1,2)$.
- 2. Onko $f(x,y) = f(y,x)$ kaikilla x ja y ?

9. ★ Kahden muuttujan (x ja y) binomista tiedetään, että sen asteluku on kaksi, vakiotermiä ei ole, ja kaikkien termien kertoimet ovat ykkösiä. Luettele kaikki mahdolliset polynomit, jotka toteuttavat nämä ehdot.

10. ★ Määritä kolmen muuttujan (x , y ja z) polynomifunktion $R(x,y,z) = ax^6 + 2y^8 - \sqrt{56}xy^2 + y^2z - 4z$ arvo, kun $x = 0$, $y = \sqrt{2}$ ja $z = \frac{\pi}{2}$.

1.2 Polynomeilla laskeminen

Polynomilausekkeiden käsittely on välttämätön taito matematiikassa, ja siksi tähän lukuun kannattaa paneutua huolella.

Polynomeja voidaan reaalilukujen osittelulain nojalla kertoa vakiolla kertomalla kukin termi erikseen.

ESIMERKKI 1.16

Olkoon $P(x) = x^3 - 2x^2 + 1$. Määritä lausekkeen $4P(3)$ arvo.

Ratkaisu. (TAPA 1.) Polynomi $P(x)$ kerrotaan vakiolla 4 kertomalla kukin termi erikseen.

$$\begin{aligned}4P(x) &= 4(x^3 - 2x^2 + 1) \\&= 4x^3 - 4 \cdot 2x^2 + 4 \cdot 1 \\&= 4x^3 - 8x^2 + 4.\end{aligned}$$

Määritetään polynomin $4P(x)$ arvo, kun $x = 3$

$$\begin{aligned}4P(3) &= 4 \cdot 3^3 - 8 \cdot 3^2 + 4 \\&= 4 \cdot 27 - 8 \cdot 9 + 4 \\&= 108 - 72 + 4 \\&= 40.\end{aligned}$$

(TAPA 2.) Ratkaistaan ensin $P(3)$, ja kerrotaan se vasta sen jälkeen vakiolla 4.

$$\begin{aligned}P(3) &= 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 1 \\&= 27 - 2 \cdot 9 + 1 \\&= 27 - 18 + 1 \\&= 10,\end{aligned}$$

jolloin $4P(3) = 4 \cdot 10 = 40$.

Vastaus. $4P(3) = 40$.

1.2.1 POLYNOMIEN YHTeen- JA Vähennyslasku



Opetus.tv: *polynomien yhteen- ja vähennyslasku* (7:36)

<http://opetus.tv/maa/maa2/polynomien-yhteen-ja-vahennyslasku/>

Kaikkien polynomien summat ja erotukset ovat aina polynomeja. Polynomeja voidaan laskea yhteen yhdistämällä samanasteiset termit. On kätevää aloittaa ryhmittelemällä samanasteiset termit vierekkäin. Polynomit sievennetään yleensä aina yleiseen muotoon asti, jossa on vain yksi termi kutakin astetta kohti.

Samanasteisten termien yhteen- ja vähennyslasku perustuu siihen, että soveltamalla reaalilukujen osittelulakia $a(b \pm c) = ab \pm ac$ oikealta vasemmalle (ks. Vapaa matikka 1) samanasteiset potenssit voidaan ottaa yhteiseksi tekijäksi:

$$ax^n \pm bx^n = (a \pm b)x^n$$

ESIMERKKI 1.17

- $2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$
- $t - 5t = 1t - 5t = (1 - 5)t = -4t$
- $5,1k^2 + 3,04k^2 = (5,1 + 3,04)k^2 = 8,14k^2$
- $\frac{1}{2}y^{42} + \frac{1}{3}y^{42} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})y^{42} = (\frac{3}{6} + \frac{2}{6})y^{42} = \frac{3+2}{6}y^{42} = \frac{5}{6}y^{42}$

ESIMERKKI 1.18

Laske polynomien $5x^2 - x + 5$ ja $3x^2 - 1$ summa.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}(5x^2 - x + 5) + (3x^2 - 1) &= 5x^2 - x + 5 + 3x^2 - 1 \\ &= 5x^2 + 3x^2 - x + 5 - 1 \\ &= 8x^2 - x + 4.\end{aligned}$$

Vastaus. Polynomien summa on $8x^2 - x + 4$.

Edellisessä esimerkissä molemmat yhteenlaskettavat polynomit laitettiin rakenteen selventämisen vuoksi kaarisulkeiden sisään, vaikka niillä ei ollutkaan laskujärjestyksen kannalta mitään merkitystä.

Polynomeja voidaan vastaavalla tavalla vähentää toisistaan. Vähennyslaskun tapauksessa on tärkeää laittaa vähennettävä polynomi sulkeisiin, sillä miinusmerkki vaikuttaa *koko* polynomiin, ei vain sen ensimmäiseen termiin. Sulkeet avattaessa pitää muistaa vaihtaa kaikkien termien merkki:

ESIMERKKI 1.19

Laske polynomien $4x^3 + 1$ ja $6x^3 - 2$ erotus.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}(4x^3 + 1) - (6x^3 - 2) \\&= 4x^3 + 1 - 6x^3 - (-2) \\&= 4x^3 + 1 - 6x^3 + 2 \\&= 4x^3 - 6x^3 + 1 + 2 \\&= -2x^3 + 3\end{aligned}$$

Vastaus. Polynomien erotus on $-2x^3 + 3$.

ESIMERKKI 1.20

Laske polynomien $14x^3 + 69$ ja $3x^3 + 2x^2 + x$ erotus.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}(14x^3 + 69) - (3x^3 + 2x^2 + x) &= 14x^3 + 69 - 3x^3 - 2x^2 - x \\&= 14x^3 - 3x^3 - 2x^2 - x + 69 \\&= 11x^3 - 2x^2 - x + 69\end{aligned}$$

Vastaus. Polynomien erotus on $11x^3 - 2x^2 - x + 69$.

ESIMERKKI 1.21

Olkoot polynomit $P(x) = 2x + 1$ ja $Q(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Määritä summa $R(x) = P(x) + Q(x)$.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} R(x) &= P(x) + Q(x) = (2x + 1) + (3x^2 - 2x + 5) \\ &= 2x + 1 + 3x^2 - 2x + 5 \\ &= 3x^2 + 2x - 2x + 1 + 5 \\ &= 3x^2 + 6. \end{aligned}$$

Vastaus. $R(x) = 3x^2 + 6$.

ESIMERKKI 1.22

Laske polynomien P ja Q erotus R , kun $P(x) = -3x^4 + x^2 + 1$ ja $Q(x) = -3x^4 + 3x^3 - x$. Mikä on polynomin R aste?

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} R(x) &= P(x) - Q(x) = (-3x^4 + x^2 + 1) - (-3x^4 + 3x^3 - x) \\ &= -3x^4 + x^2 + 1 + 3x^4 - 3x^3 + x \\ &= -3x^4 + 3x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1 \\ &= -3x^3 + x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

Vastaus. $R(x) = -3x^3 + x^2 + x + 1$. Polynomin R aste on kolme.

1.2.2 POLYNOMIEN KERTOLASKU



Opetus.tv: *polynomien kertolasku* (10:00)

<http://opetus.tv/maa/maa2/polynomien-kertolasku/>

Monomien tulo Kahden monomin tulo sievennetään kertomalla kertoimet keskenään ja kirjainosat keskenään. Muista potenssien laskusäännöt (ks. Vapaa matikka 1)!

ESIMERKKI 1.23

Laske a) $2x \cdot 3x$ b) $-3x^2 \cdot (-5x^4)$ c) $5x^2 \cdot (-2x)$

Ratkaisu.

a) $2x \cdot 3x = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x = 6x^2$

b) $-3x^2 \cdot (-5x^4) = (-3) \cdot (-5) \cdot x^2 \cdot x^4 = 15x^6$

c) $5x^2 \cdot (-2x) = -10x^3$

Vastaus. a) $6x^2$ b) $15x^6$ c) $-10x^3$

Polynomin kertominen monomilla Polynomeja voi kertoa keskenään reaalityttöjen tuttujen laskusääntöjen avulla. Yksinkertaisin erikoistapaus on polynomin kertominen monomilla, jolloin käytetään osittelulakia $a(b + c) = ab + ac$.

ESIMERKKI 1.24

Laske a) $5 \cdot (x + 3)$ b) $2x(x - 5)$ c) $3(a + b + c)$

a) $5 \cdot (x + 3) = 5 \cdot x + 5 \cdot 3 = 5x + 15$

b) $2x(x - 5) = 2x \cdot x - 2 \cdot x \cdot 5 = 2x^2 - 10x$

c) $3(a + b + c) = 3a + 3b + 3c$

Kahden binomin tulo Kahden binomin tulon laskusääntö perustellaan soveltamalla osittelulakia kahdesti:

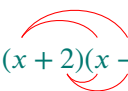
$$(a + b)(c + d) = (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d \quad \text{osittelulaki}$$

$$= ac + bc + ad + bd \quad \text{osittelulaki}$$

Kahden binomin tulossa siis kummallakin ensimmäisen binomin termillä kerrotaan toisen binomin termit. Saadut neljä tuloa lasketaan yhteen.

ESIMERKKI 1.25

Laske binomien $x + 2$ ja $x - 5$ tulo.


$$(x + 2)(x - 5) = x^2 - 5x + 2x - 10 = x^2 - 3x - 10.$$

ESIMERKKI 1.26

Laske binomien $x^2 - x$ ja $2x - 1$ tulo.

$$(x^2 - x)(2x - 1) = 2x^3 - x^2 - 2x^2 + x = 2x^3 - 3x^2 + x.$$

Yleinen kertolasku Osittelulain nojalla kahden polynomin tulo saadaan laskemalla yhteen kaikki termit, jotka saadaan kertomalla termi ensimmäisestä ja toinen termi toisesta polynomista.

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$$

ESIMERKKI 1.27

Laske polynomien $x - 3$ ja $x^2 - 4x + 3$ tulo.

$$(x - 3)(x^2 - 4x + 3) = x^3 - 4x^2 + 3x - 3x^2 + 12x - 9 = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$$

ESIMERKKI 1.28

Laske polynomien $x^4 - 3x^3 + 3$ ja $x^3 - 2x^2 + 1$ tulo.

$$\begin{aligned} & (x^4 - 3x^3 + 3)(x^3 - 2x^2 + 1) \\ &= x^4 \cdot x^3 + x^4 \cdot (-2x^2) + x^4 \cdot 1 - 3x^3 \cdot x^3 - 3x^3 \cdot (-2x^2) - 3x^3 \cdot 1 \\ &\quad + 3x^3 + 3 \cdot (-2x^2) + 3 \cdot 1 \\ &= x^7 - 2x^6 + x^4 - 3x^6 + 6x^5 - 3x^3 + 3x^3 - 6x^2 + 3 \\ &= x^7 - 5x^6 + 6x^5 + x^4 - 6x^2 + 3 \end{aligned}$$

Tehtäviä

Opi perusteet

11. Sievennä.

- a) $3x + 5x$
- b) $4x^2 + 7x^2$
- c) $-6y + 2y$
- d) $3x - (-2x)$

12. Sievennä.

- a) $5x - 2 + 2x + 7$
- b) $5x - 3y - y - 2x$
- c) $2x^2 + x + x^2 - 5x$
- d) $y^3 - 2y^2 + 4y^3 - y$

13. Sievennä.

- a) $(x^2 - 2x + 1) + (-x^2 + x)$
- b) $(3y^3 + 2y^2 + y) - (-y^2 + y)$
- c) $(z^{10} - z^6 + z^2 + 1) + (z^{10} + 2z^8 - 3z^6)$

14. Olkoot $P(x) = x^2 + 3x + 4$ ja $Q(x) = x^3 - 10x + 1$. Sievennä

- a) $P(x) + Q(x)$
- b) $P(x) - Q(x)$
- c) $Q(x) - P(x)$
- d) $2P(3) + Q(2)$.

15. Sievennä polynomifunktiot ja laske funktioiden arvot muuttujan arvoilla 1, -1 ja 3.

- a) $P(x) = (x^3 - 4x + 5) + (-x^3 + x^2 + 4x - 2)$
- b) $Q(x) = (2x^3 + x^2 - 10x) - (3x^3 - 4x^2 + 5x)$

16. Sievennä

- a) $(2x + 3) + x$
- b) $(3x - 1) + (-x + 1)$
- c) $(5x + 10) + (6x - 6) - (x + 3)$

17. Sievennä polynomifunktiot ja laske funktioiden arvot muuttujan arvoilla 1, -1 ja 3.

- a) $R(x) = 4(2x - 4) + (-x^3 + 1)$
- b) $S(x) = -(2x^2 - x + 8) + 6(x^5 - 3x^2 + 1) - 2(3x^5 - 10x^2)$

18. Sievennä.

- a) $x \cdot x^2$
- b) $5x \cdot 3x$
- c) $-2(-5x^3)$
- d) $3x^2 \cdot (-6x^4)$

19. Sievennä.

- a) $2(x + 3)$
- b) $x(x - 2)$
- c) $3x(1 - 2x)$
- d) $x^2(x + 5)$

20. Sievennä.

- a) $3(x + 2y - 4)$
- b) $(x + 2)(x + 3)$
- c) $(3 - x)(2x - 1)$

21. Sievennä lauseke $(x^2 + 1)(x^3 - 2x)$. Mikä on polynomin aste?

Hallitse kokonaisuus

22. Mitkä seuraavista polynomilausekkeista esittävät samaa polynomifunktiota kuin $x^3 + 2x + 1$?

- a) $2x + x^3 + 1$
- b) $x^2 + 2x + 1$
- c) $x + 2x^3 + 1 - (x^3 + x)$
- d) $15 + x^4 + 2x + x^3 - x^4 - 14$

23. Mitkä ovat seuraavien polynomifunktioiden asteet, ts. sievennettyjen muotojen asteet?

- a) $x + 5 - x$
- b) $x^2 + x - 2x^2$
- c) $4x^5 + x^2 - 4 - x^2$
- d) $x^4 - 2x^3 + x - 1 + x^3 - x^4 + x^3$

24. Pohdi ja määritä sulkuja avaamatta lausekkeen $(x^2 + 1)(x^3 - 2x)$

- a) aste
- b) vakiotermi.

25. Sievennä.

- a) $(-2x)(4x - 1) \cdot 3$
- b) $(-x^3)(10x - 2)$
- c) $5(-2x + 1)(-9x)$
- d) $2x(x - 3) + 1$

26. Sievennä.

- a) $(2y + 5)(y + 7)$
- b) $(x - 1)(x + 4)x$

27. Ensimmäisen asteen polynomiausekkeen yleinen muoto on $ax + b$, missä x on muuttuja, ja a ja b ovat (reaalisia) vakioita. Osoita, että jos P ja Q ovat ensimmäisen asteen polynomifunktioita, niin tällöin $P(Q(x))$ ja $Q(P(x))$ ovat myös ensimmäistä astetta.

Lisää tehtäviä

28. Sievennä.

- a) $(x - 3)(2x^3 - 3x + 4)$
- b) $(x^2 + 1)(x^3 - 2x - 4)$
- c) $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
- d) $(\frac{x}{5} - \frac{2}{3})(x^2 + x + 1)$

29. Sievennä $\sqrt{\frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{a^2 + b^2}}$.

30. Olkoon $P(x) = -x^4 + 2x$ reaalifunktio. Sievennä lausekkeet.

- a) $P(\sqrt{2})$
- b) $P(x)^2$
- c) $P(-x)$
- d) $P(2t)$

31. Olkoot $P(x) = x^2$ ja $Q(x) = x + 1$ reaalifunktioita. Sievennä lausekkeet.

- a) $P(x + 1)$
- b) $Q(x - 1)$
- c) $P(Q(x))$
- d) $Q(P(x))$

1.3 Muistikaavat



Opetus.tv: *muistikaavat* (8.05, 6.38 ja 9.08)

<http://opetus.tv/maa/maa2/muistikaavat/>

Joitakin polynomien kertolaskuja tarvitaan niin usein, että niitä kutsutaan **muistikaavoiksi**.

Muistikaavat

$$\text{Summan neliö} \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{Erotuksen neliö} \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{Summan ja erotuksen tulo} \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Nämä kaavat voidaan todistaa helposti laskemalla.

Summan neliö

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) && \text{neliön määritelmä} \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 && \text{osittelulaki} \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 && \text{vaihdannaisuus (ba = ab)} \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

Erotuksen neliö

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &= (a - b)(a - b) && \text{neliön määritelmä} \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 && \text{osittelulaki} \\ &= a^2 - ab - ab + b^2 && \text{vaihdannaisuus (ba = ab)} \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

Edellä todistettuja kahta muistikaavaa kutsutaan yhdessä nimellä **binomin neliö**. Toisinaan ne kirjoitetaan yhtenä yhtälönä:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

Kaavoissa useasti esiintyviä $\pm$ -merkkejä luetaan siten, että ylemmät ja alemmat täsmäävät keskenään. Ylempien merkkien (kaikki $+$:ia) valinta vastaa siis summan neliötä ja alempien merkkien (kaikki $-$:ia) valinta erotuksen neliötä.

Summan ja erotuksen tulo

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a^2 - ab + ba - b^2 && \text{osittelulaki} \\ &= a^2 - ab + ab - b^2 && \text{vaihdannaisuus (} ba = ab \text{)} \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

ESIMERKKI 1.29

Sievennä $(x + 5)^2$.

Käytetään muistikaavaa $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Nyt $a = x$ ja $b = 5$. Saadaan

$$(x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25.$$

ESIMERKKI 1.30

Sievennä $(3x - 2y)^2$.

Käytetään muistikaavaa $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Nyt $a = 3x$ ja $b = 2y$.
Saadaan

$$(3x - 2y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2.$$

ESIMERKKI 1.31

Laske ilman laskinta a) 995^2 b) $104 \cdot 96$.

Käytetään ovelasti muistikaavoja $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ja $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

$$\begin{aligned}\text{a) } 995^2 &= (1\,000 - 5)^2 = 1\,000^2 - 2 \cdot 1\,000 \cdot 5 + 5^2 = \\ &= 1\,000\,000 - 10\,000 + 25 = 990\,025\end{aligned}$$

■ b) $104 \cdot 96 = (100 + 4)(100 - 4) = 100^2 - 4^2 = 10\,000 - 16 = 9\,984.$

Huomaa, että kaikki polynomien kertolaskut voidaan sieventää käyttämällä osittelulakia. Muistikaavoja lukuun ottamatta ei ole tarkoitus opetella eri tapauksia erikseen (polynomin kertominen monomilla, polynomin kertominen polynomilla, ...), vaan oppia yleinen käytäntö.

Tehtäviä

Opi perusteet

32. Kerro sulut auki muistikaavan avulla.

- a) $(x + y)^2$
- b) $(x - y)^2$
- c) $(x + y)(x - y)$

33. Kerro sulut auki muistikaavan avulla.

- a) $(x + 3)^2$
- b) $(y - 5)^2$
- c) $(x - 4)(x + 4)$
- d) $(3x + 2)^2$

34. Osoita, että seuraavat laskukaavat eivät päde etsimällä esimerkki reaalityyppisistä a ja b , joilla yhtälö ei päde.

- a) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$
- b) $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- c) $\frac{3a}{3b + c} = \frac{a}{b + c}$

Hallitse kokonaisuus

35. Sievennä muistikaavojen avulla.

- a) $(x + 6)^2$
- b) $(3y - 1)^2$
- c) $(-3 - x)(x - 3)$

36. Sievennä muistikaavojen avulla.

- a) $(5 - x)^2$
- b) $(7x + 4)^2$
- c) $(9 - 7x)(9 + 7x)$
- d) $(8x - 8)(8x + 8)$

37. Osoita, että

- a) $(t + v)^2 + (t - v)^2 = 2t^2 + 2v^2$
- b) $(t + v)^2 - (t - v)^2 = 4tv$.

38. Esitä tulona, eli käytä muistikaavaa toiseen suuntaan.

- a) $a^2 + 2ab + b^2$
- b) $x^2 + 2x + 1$
- c) $y^2 - 4y + 4$
- d) $a^2 - 25$

39. Tiedetään, että $(a + b)^2 = 12$ ja $(a - b)^2 = 4$. Ratkaise tulon ab suuruus.

40. Tutkitaan funktiota f , jonka arvot lasketaan kaavalla $f(n) = n^2 + 2n + 2$, missä n on mielivaltainen kokonaisluku.

- a) Osoita, että f kuvaa parillisen kokonaisluvun aina uudeksi parilliseksi luvuksi.
- b) Tutki, mitä vastaavasti parittomille kokonaisluvuille käy.

41. (YO 1888/1) Mikä on a/b :n arvo, jos $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) : (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{2}$?

Lisää tehtäviä

42. Muistikaavat on opittava ulkoa ja niiden käytön tulee automatisoitua. Laske siis nämä käyttäen muistikaavoja. Tavoite on kirjoittaa vastaus suoraan ilman välivaiheita. Jos se ei vielä onnistu, yritä selvittää yhdellä välivaiheella.

- a) $(x + 2)^2$
- b) $(x - 5)^2$
- c) $(b + 4)(b - 4)$
- d) $(x - 1)^2$
- e) $(2x + 1)^2$
- f) $(1 - a)(1 + a)$
- g) $(x - 7)^2$
- h) $(y + 1)^2$
- i) $(x - 3y)^2$
- j) $(3x - 1)^2$
- k) $(2x + 1)(2x - 1)$
- l) $(t - 2)^2$
- m) $(2x + 3)^2$
- n) $(2 - a)^2$
- o) $(5x + 2)(5x - 2)$
- p) $(3 - c)(3 + c)$
- q) $(10x - 1)^2$
- r) $(2a + b)^2$
- s) $(x + 6)^2$

43. Muistikaavan mukaisen lausekkeen tunnistaminen on tärkeää. Tunnista edellisessä tehtävässä laskemasi muistikaavat ja esitä lausekkeet tulomuodossa.

- a) $1 - a^2$
- b) $a^2 - 4a + 4$
- c) $4x^2 + 4x + 1$
- d) $x^2 - 14x + 49$
- e) $100x^2 - 20x + 1$
- f) $4a^2 + 4ab + b^2$
- g) $y^2 + 2y + 1$
- h) $x^2 + 4x + 4$
- i) $4x^2 - 1$
- j) $t^2 - 4t + 4$
- k) $25x^2 - 4$
- l) $b^2 - 16$
- m) $x^2 - 2x + 1$
- n) $9 - c^2$
- o) $x^2 + 12x + 36$
- p) $4x^2 + 12x + 9$
- q) $x^2 - 10x + 25$
- r) $x^2 + 6xy + 9y^2$
- s) $9x^2 - 6x + 1$

44. Esitä tulona, eli käytä muistikaavaa toiseen suuntaan.

- a) $4b^2 - 4b + 1$
- b) $16t^2 - 9$
- c) $9x^2 + 12xy + 4y^2$
- d) $x^2 - x + \frac{1}{4}$
- e) $x^2 - 2$

45. Sievennä.

- a) $(x - 3)(2x^3 - 3x + 4)$
- b) $(x^2 + 1)(x^3 - 2x - 4)$
- c) $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
- d) $(\frac{x}{5} - \frac{2}{3})(x^2 + x + 1)$

46. Sievennä.

- a) $(a + b)^3$
- b) $(a + b)^4$
- c) $(a - b)^3$

47. Laske ovelasti muistikaavojen avulla:

- a) $101^2 = (100 + 1)^2 = \dots$
- b) 99^2
- c) $49 \cdot 51$
- d) $35^2 - 25^2$
- e) $170^2 - 30^2$

48. Sievennä. (Ohje: käytä summakaavoja.)

- a) $63^2 + 37^2$
- b) $101^2 + 99^2$

49. Yllättäviä yhteyksiä:

- a) Perustele, että $(2 + \sqrt{3})^{-1} = 2 - \sqrt{3}$.
- b) Perustele, että $(4 + \sqrt{3})^{-1} \neq 4 - \sqrt{3}$.
- c) ★ Etsi lisää a-kohdan kaltaisia lukuja. Mikä on niiden yleinen muoto?

50. Sievennä lauseke $(x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)$ muistikaavojen avulla.

51. ★ Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut x ja y , joille pätee $9x^2 - y^2 = 17$.

52. ★ Kahden luvun keskiarvo on 7. Kuinka suuri niiden tulo voi korkeintaan olla? Perustele. (Keksit vastauksen todennäköisesti helpommin kuin sen perustelun.)

1.4 Tulon nollasääntö & tulon merkkisääntö

TULON MERKKISÄÄNTÖ

Pitkän matematiikan 1. kurssilla on esitetty seuraava sääntö kahden reaaliluvun tulolle:

Tulon merkkisääntö kahdelle tulon tekijälle

- Jos tulon tekijät ovat samanmerkkisiä, tulo on positiivinen.
 - Kahden positiivisen luvun tulo on positiivinen.
 - Kahden negatiivisen luvun tulo on positiivinen.
- Jos tulon tekijät ovat erimerkkisiä, tulo on negatiivinen.
 - Positiivisen ja negatiivisen luvun tulo on negatiivinen.

Tulon merkkisäännöstä seuraa, että reaaliluvun neliö ei voi olla negatiivinen, koska kahden samanmerkkisen luvun tulo aina on positiivinen. Lyhyemmin ilmaistuna $x^2 \geq 0$, eli reaaliluvun neliö on aina **epänegatiivinen** positiivinen tai nolla.

ESIMERKKI 1.32

Osoita, että funktio $P(x) = x^2 + 7$ saa vain positiivisia arvoja.

Ratkaisu. Koska $x^2 \geq 0$, lausekkeen $x^2 + 7$ arvo on vähintään 7. Funktio saa siis vain positiivisia arvoja.

Tulon merkkisääntö yleistyy mille tahansa määrälle tulontekijöitä. Mikäli tulossa on pariton $(1, 3, 5, \dots)$ määrä negatiivisia tekijöitä, tulo on negatiivinen. Muulloin tulo on positiivinen, eli esimerkiksi parillisesta potenssista ei voi tulla negatiivista vastausta.

ESIMERKKI 1.33

Mikä on funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = -t^4 + 3$ suurin arvo?

Ratkaisu. Koska muuttuja t on reaalityyppinen, ei sen parillinen potenssi voi olla merkkisäännön mukaan negatiivinen, vaan t^4 :n arvo on vähintään 0. Tämän perusteella $-t^4$:n arvo on epäpositiivinen eli korkeintaan nolla. Jos $-t^4$:n suurin arvo on nolla, niin lisäämällä tähän luvun 3, saadaan funktion $f(t) = -t^4 + 3$ suurimmaksi mahdolliseksi arvoksi 3.

TULON NOLLASÄÄNTÖ

Reaalityyppinen voi olla vain joko positiivinen, nolla tai negatiivinen. Tulon merkkisäännöstä seuraa, että positiivisten ja negatiivisten lukujen tulo on aina positiivinen tai negatiivinen, ei koskaan nolla. Jos siis tulo on 0, tulon tekijöistä ainakin yhden täytyy olla 0. Toisaalta jos jokin tulon tekijöistä on 0, myös tulo on automaattisesti 0.

Nämä tiedot yhdistämällä saadaan **tulon nollasääntö**:

Tulon nollasääntö

Ainakin yksi tulon tekijöistä on 0. $\iff$ Tulo on 0.

Tulon nollasäännössä on olennaista, että päättely toimii *molempiin suuntiin*.

ESIMERKKI 1.34

Sievennä lauseke $(x^5 - 7) \cdot y \cdot 0 \cdot (3a - 5b)^2$.

Ratkaisu. Koska tulossa on tekijänä 0, vastaus on 0.

ESIMERKKI 1.35

Ratkaistaan yhtälö $(x + 5) \cdot x = 0$.

$$\begin{aligned}(x + 5) \cdot x &= 0 \quad \parallel \quad \text{tulon nollasääntö} \\ x + 5 &= 0 \text{ tai } x = 0 \\ x &= -5 \text{ tai } x = 0.\end{aligned}$$

Ratkaisuja on siis kaksi: $x = -5$ tai $x = 0$.

ESIMERKKI 1.36

Ratkaistaan yhtälö $2(x + 5) = 0$. Tulon nollasäännön perusteella tiedetään, että $2 = 0$ tai $x + 5 = 0$. Koska selvästi $2 \neq 0$, jää ainoaksi ratkaisuksi $x + 5 = 0$ eli $x = -5$. (Yhtälön voi ratkaista myös avaamalla sulkeet ja ratkaisemalla saatu ensimmäisen asteen yhtälö tavallisin yhtälönmuokkaamiskeinoin.)

ESIMERKKI 1.37

Mitä voidaan yhtälön $xyz = 0$ perusteella päätellä tuntemattomista x , y ja z ?

Ratkaisu. Tulon nollasäännön perusteella $x = 0$, $y = 0$ tai $z = 0$. Nollia voi siis olla 1–3 kappaletta.

ESIMERKKI 1.38

Millä ehdolla $(ab^3)^0$ on määritelty?

Ratkaisu. Nollas potenssi on määritelty, kun kantalukuna ei ole nolla. Siis tulo ab^3 ei saa olla nolla. Tämä toteutuu, kun kumpikaan tekijä a tai b^3 ei ole nolla. Siis lauseke on määritelty, a ei ole nolla eikä b myöskään ole nolla.

★TULON NOLLASÄÄNNÖN TODISTUS

Todistus. Annettuna joukko nollasta poikkeavia lukuja $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ asetetaan

$$x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 0 \quad \parallel \quad : (x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1})$$

koska kaikille x_i pätee $x_i \neq 0$

$$\frac{x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}} = \frac{0}{x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}} \quad \parallel \quad \frac{0}{x_i} = 0 \text{ kaikilla } x_i, x_i \neq 0$$

$$x_n = 0,$$

mikä on ristiriidassa todistuksessa asetetun vaatimuksen kanssa, että kaikkien lukujen piti olla nollasta poikkeavia. Näin alkuperäsen väitteen täytyy olla tosi. $\square$

Tehtäviä

Opi perusteet

53. Laske.

- a) $2 \cdot 3$
- b) $2 \cdot (-3)$
- c) $-2 \cdot 3$
- d) $-2 \cdot (-3)$
- e) $17 \cdot 666 \cdot 0 \cdot (-31)$

54. Olkoon $a > 0$, $b < 0$, ja $c = 0$. Mitä voit päätellä tulon merkistä?

- a) $a \cdot a$
- b) $b \cdot a$
- c) $b \cdot b$
- d) $b \cdot c$

55. Ratkaise seuraavat yhtälöt käyttämällä tulon nollasääntöä.

- a) $x(3 + x) = 0$
- b) $(x - 4)(x + 3) = 0$
- c) $0 = x^2(x - 5)$

Hallitse kokonaisuus

56. Olkoon $a > 0$. Mitkä vaihtoehdoista $b > 0$, $b < 0$ ja $b = 0$ ovat mahdollisia, jos tiedetään, että

- a) $a \cdot b > 0$
- b) $a \cdot b \leq 0$
- c) $b \cdot b > 0$
- d) $b \cdot b < 0$?

57. Ratkaise seuraavat yhtälöt käyttämällä tulon nollasääntöä.

- a) $y(y + 4) = 0$
- b) $(x - 2)(x - 1)(x + 5) = 0$
- c) $(x + 1)(x^2 + 2) = 0$

58. Osoita, että funktio $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1$ saa vain positiivisia arvoja.

Lisää tehtäviä

59. Olkoon $a \geq 0$, $b \leq 0$, ja $c = 0$. Mitä voit päätellä tulon merkistä?

- a) $a \cdot a$
- b) $b \cdot a$
- c) $b \cdot c$

60. Ratkaise seuraavat yhtälöt käyttämällä tulon nollasääntöä.

a) $(g - 2) \cdot (t + 1) = 0$

b) $x(x - 5) = 0$

c) $(2w + 2)^2 = 0$

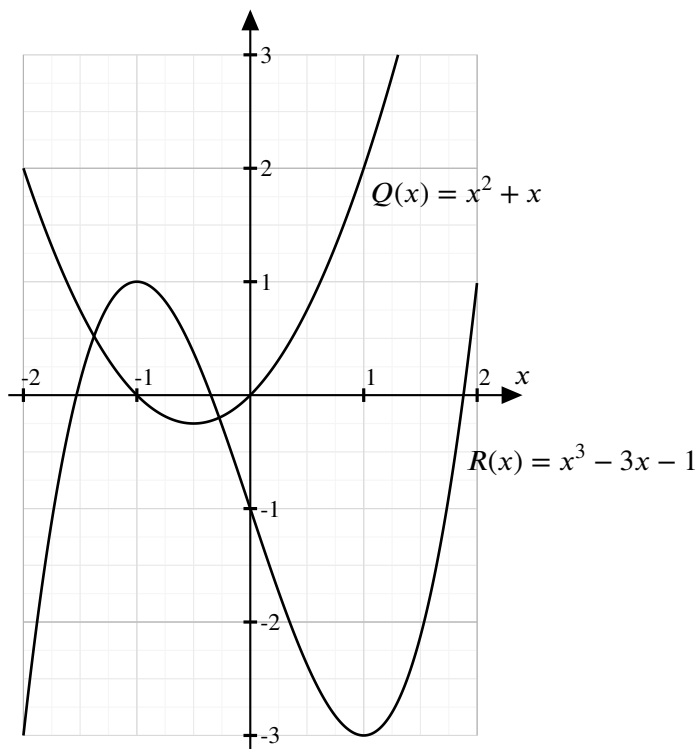
61. Sievennä seuraava lauseke: $(a-x) \cdot (b-x) \cdot (c-x) \cdot \dots \cdot (\mathring{a}-x) \cdot (\mathring{a}-x) \cdot (\mathring{o}-x)$.

62. Onko olemassa reaalilukua, jonka neliö on yhtä suuri kuin sen summa itsensä kanssa?

63. ★ (YO 1971/3, lyhyt oppimäärä) Oletetaan, että $a > b > 0$. Osoita, että $a^3 - b^3 > (a - b)^3$.

1.5 Polynomifunktion kuvaaja

Polynomifunktion käyttäytymistä eri muuttujan arvoilla voi havainnollistaa koordinaatistoon piirretyn kuvaajan avulla:



1.5.1 KUVAAJAN PIIRTÄMINEN



Opetus.tv: *suoran piirtäminen* (5:47)

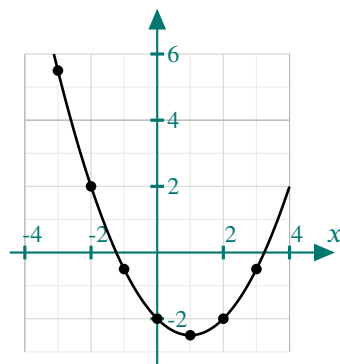
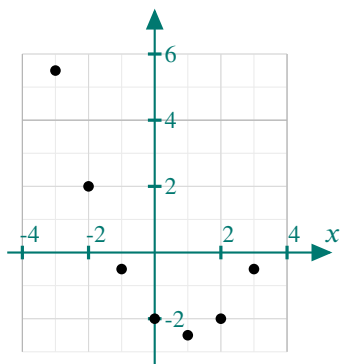
<http://opetus.tv/maa/maa2/suoran-piirtaminen/>

Funktioiden kuvaajia voi piirtää tietokoneella, graafisella laskimella tai käsin. Kussakin tapauksessa periaate on sama: valitaan joitakin muuttujan arvoja, lasketaan funktion arvot ja merkitään pisteet (x,y) -koordinaatistoon. Tietokoneet ja laskimet laskevat funktion arvoja niin tiheään, että näyttää syntyvän yhtenäinen kuvaaja. Käsin piirrettäessä tyydytään muutamaan pisteeseen ja hahmotellaan kuvaaja niiden avulla.

ESIMERKKI 1.39

Hahmotellaan polynomifunktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$ kuvaaja. Lasketaan ensin joitakin funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$ arvoja ja piirretään niitä vastaavat pisteet koordinaatistoon. Lopuksi hahmotellaan kuvaaja, joka kulkee pisteiden kautta.

x	$f(x)$
-3	5,5
-2	2,0
-1	-0,5
0	-2,0
1	-2,5
2	-2,0
3	-0,5

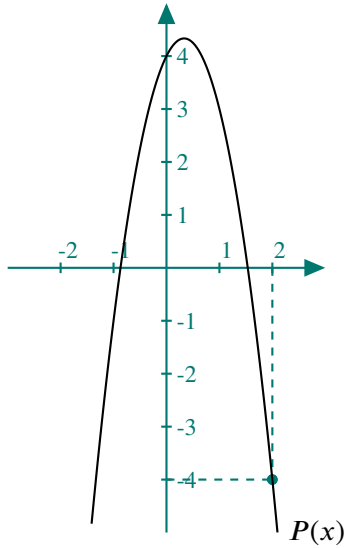


1.5.2 KUVAAJAN TULKINTAA

Kuvaajan avulla voidaan tehdä johtopäätöksiä funktion ominaisuuksista. Esimerkiksi funktion arvoja voidaan lukea kuvaajasta.

ESIMERKKI 1.40

Seuraavassa on esitetty polynomifunktion $P(x) = -3x^2 + 2x + 4$ kuvaaja.

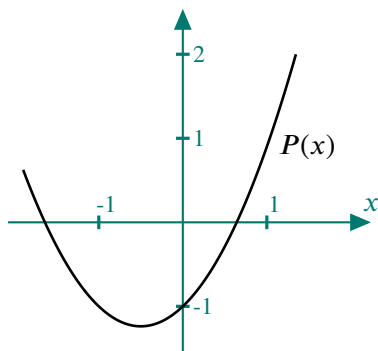


Kuvaajasta voi lukea funktion arvoja tai ainakin niiden likiarvoja. Kuvaajan perusteella näyttää siltä, että $P(2) = -4$. Näin todellakin on, sillä

$$P(1) = -3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 4 = 1.$$

ESIMERKKI 1.41

Kuvaajasta ei välttämättä näe tarkkoja arvoja. Seuraavassa on esitetty erään polynomifunktion $P(x)$ kuvaaja. Kuvaajan perusteella näyttäisi siltä, että $P(1) = 1$, mutta tarkkaa arvoa kuvaajasta ei voi päätellä.



Itse asiassa edellinen kuvaaja kuuluu funktiolle $P(x) = \frac{19}{20}x^2 + \frac{19}{20}x - 1$. Nyt tiedetään, että funktion $P(x)$ arvo kohdassa $x = 1$ on

$$\frac{19}{20} \cdot 1^2 + \frac{19}{20} \cdot 1 - 1 = \frac{9}{10}$$

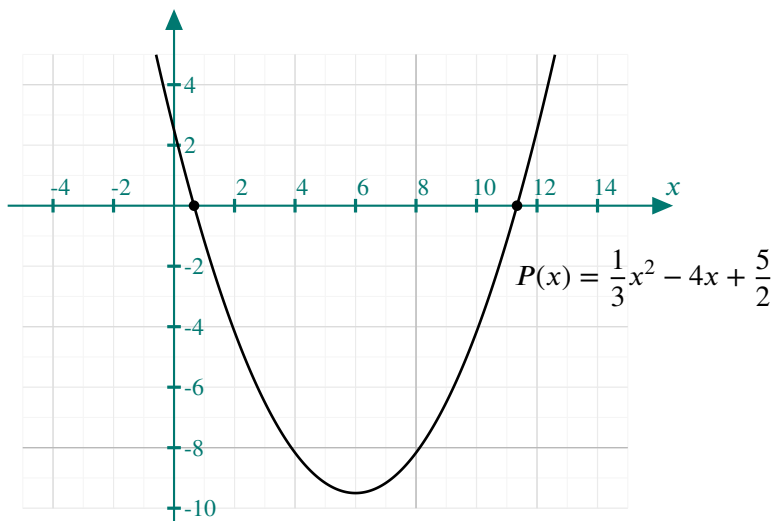
eikä 1, kuten kuvaajan perusteella voisi luulla. Kuvaajasta ei siis voi lukea tarkkoja tietoja funktiosta.

Funktion nollakohta Funktion **nollakohta** on sellainen muuttujan arvo, jolla funktio saa arvon nolla. Esimerkiksi funktiolla $Q(x) = x^2 - 1$ on nollakohdat -1 ja 1 , sillä $Q(-1) = 0$ ja $Q(1) = 0$.

Funktion kuvaaja antaa tietoa nollakohdista. Niiden kohdalla kuvaaja leikkaa muuttujakselin. (Yleensä x -akselin.)

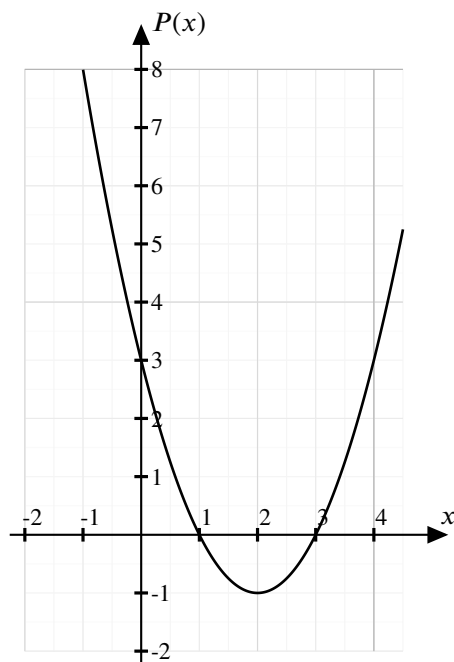
ESIMERKKI 1.42

Funktion $P(x) = \frac{1}{3}x^2 - 4x + \frac{5}{2}$ kuvaajasta nähdään, että funktiolla on ainakin kaksi nollakohtaa. Toinen niistä on lähellä lukua 1 ja toinen lukua 11.



Tehtäviä

Opi perusteet



64. Kuvassa on polynomifunktion P kuvaaja. Määritä on kuvaajan perusteella

- a) $P(-1)$
- b) $P(1)$
- c) $P(2)$
- d) polynomin P nollakohdat
- e) millä x :n arvoilla $P(x) = 3$.

65. Hahmottele polynomien kuvaajat koordinaatistoon käsin. Laske testipisteitä tarpeen mukaan. Tarkista tietokoneella tai graafisella laskimella.

- a) $P(x) = x - 2$
- b) $Q(x) = 4 - x^2$
- c) $R(x) = \frac{1}{4}x^3$

Hallitse kokonaisuus

66. Piirrä polynomifunktion kuvaaja ja päätele sen avulla polynomin nollakohdat. Käytä graafista laskinta, tietokonetta tai piirrä käsin.

- a) $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
- b) $Q(x) = x^2 - 6x + 2$

67. Piirrä funktion f kuvaaja, kun funktion arvot määritellään kaavalla $f(x) = 1 - x^2$, ja funktion määrittelyjoukko on

- a) $\mathbb{N}$
- b) $\mathbb{Z}$
- c) $\mathbb{R}$
- d) $\{0,1,2\}$

Lisää tehtäviä

68. Piirrä polynomien kuvaajat käsin.

- a) $x + 4$
- b) $2x - 3$
- c) 5
- d) $x^2 + x - 2$

69. Piirrä polynomien kuvaajat tietokoneella tai laskimella.

- a) $x^2 - 6x + 3$
- b) $\frac{1}{5}x^3 - x^2 + 2$
- c) $-0,5x^4 + 0,25x^3 + 2,5x^2 - 1$

70. ★ Monia funktioita voidaan esittää likimääräisesti polynomeina (ns. Taylorin polynomi). Esimerkiksi (kun $-1 < x < 1$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &\approx 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} \\ \sqrt{1+x} &\approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128}\end{aligned}$$

Piirrä alkuperäinen funktio ja polynomi samaan kuvaajaan tietokoneella tai graafisella laskimella. Kokeile, kuinka polynomin viimeisten termien pois jättäminen vaikuttaa tarkkuuteen. Mitä havaitset? (Termejä voi laskea lisäksi, mutta siihen ei puututa tässä.)

LUKU 2

Ensimmäinen aste

2.1 Epäyhtälöiden teoriaa

Epäyhtälöllä tarkoitetaan väitettä, jossa esitetään kahden lausekkeen arvon välinen suuruusjärjestys lukuunottamatta tilannetta, että ne ovat yhtä suuret. Suuruusjärjestyksien esittämiseen käytetään muun muassa seuraavia merkintöjä:

<i>Merkintä</i>	<i>Merkitys</i>
$a < b$	a on pienempi kuin b
$a > b$	a on suurempi kuin b
$a \leq b$	a on pienempi tai yhtäsuuri kuin b
$a \geq b$	a on suurempi tai yhtäsuuri kuin b
$a \neq b$	a ei ole yhtä suuri kuin b

Sama epäyhtälö voidaan kirjoittaa kahdella tavalla: $a < b$ tarkoittaa samaa kuin $b > a$, ja $a \leq b$ tarkoittaa samaa kuin $b \geq a$. Epäyhtälö $a < b$ pätee täsmälleen silloin, kun epäyhtälö $a \geq b$ ei päde. Kahden luvun välinen epäyhtälöriippuvuus eli -relaatio voidaan esittää myös kielteisesti: $a \not\leq b$.

Epäyhtälön totuusarvo voi riippua epäyhtälön puolilla esiintyvien muuttujien arvoista. Tämän perusteella epäyhtälöt voidaan jakaa kolmeen tyyppiin:

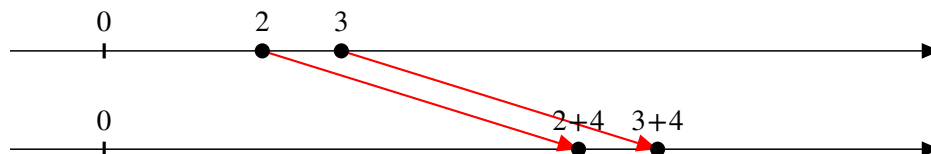
- *Aina tosi* – pätee kaikilla muuttujien arvoilla. Esimerkiksi epäyhtälöt $5 < 6$ tai $x + 1 \leq x + 3$ pätevät riippumatta muuttujan x arvosta.
- *Ehdollisesti tosi* – pätee vain joillain muuttujien arvoilla. Esimerkiksi epäyhtälö $x < 5$ pätee, kun $x = 4$, mutta ei päde, kun $x = 7$.

- *Aina epätosi* – ei päde millään muuttujien arvoilla. Esimerkiksi epäyhtälöt $3 < 1$ ja $x < x$ eivät päde koskaan.

2.1.1 EPÄYHTÄLÖIDEN MUOKKAAMINEN

Kuten yhtälöiden ratkaisemisessa, epäyhtälön ratkaisemisessa selvitetään ne muuttujien arvot, joilla epäyhtälö on tosi. Kuten yhtälöitä, myös epäyhtälöitä voidaan ratkaista muokkaamalla niitä sellaisilla operaatioilla, joilla muokattu epäyhtälö on yhtäpitävä alkuperäisen kanssa.

Kahden luvun kasvattaminen saman verran siirtää lukuja lukusuoralla, mutta säilyttää niiden keskinäisen järjestyksen:



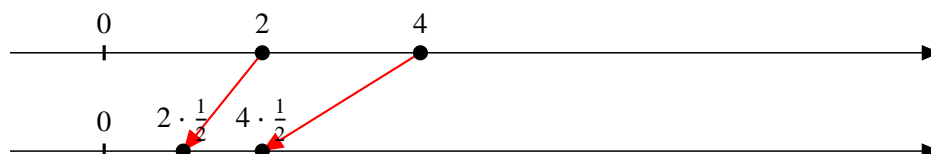
Tämän perusteella epäyhtälö, joka saadaan lisäämällä epäyhtälön molemmille puolille sama lauseke, on yhtäpitävä alkuperäisen epäyhtälön kanssa.

ESIMERKKI 2.43

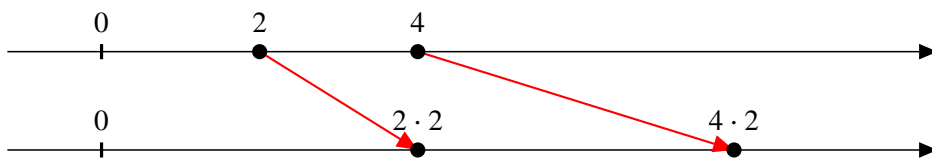
Luvun lisääminen epäyhtälöön.

$$\begin{array}{ll}
 3 - x < 5 - x & \parallel + x \\
 3 - x + x < 5 - x + x & \\
 3 < 5 & \text{tosi}
 \end{array}$$

Myös lukujen kertominen samalla positiivisella kertoimella säilyttää niiden keskinäisen järjestyksen. Jos kerroin on pienempi kuin yksi, luvut lähenevät toisiaan:



Jos kerroin on suurempi kuin yksi, luvut etääntyvät toisistaan:



Luvulla jakaminen on sama asia kuin jakajan käänteisluvulla kertominen, joten positiivisella luvulla jakaminen säilyttää järjestyksen kertolaskun tavoin. Näin ol-
len alkuperäisen epäyhtälön kanssa yhtäpitävä epäyhtälö saadaan kertomalla tai
jakamalla molemmat puolet positiivisella luvulla.

ESIMERKKI 2.44

Epäyhtälön kertominen lukua yksi pienemmällä positiivisella luvulla.

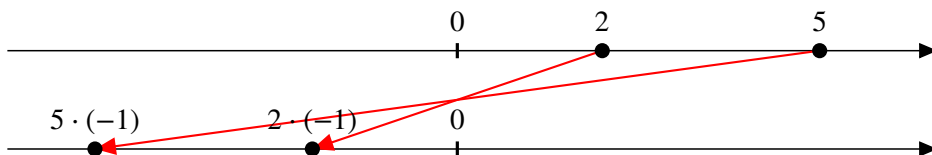
$$\begin{array}{ll}
 2 < 4 & \parallel \cdot \frac{1}{2} \\
 2 \cdot \frac{1}{2} < 4 \cdot \frac{1}{2} & \\
 1 < 2 & \text{tosi}
 \end{array}$$

ESIMERKKI 2.45

Epäyhtälön kertominen lukua yksi suuremmalla luvulla.

$$\begin{array}{ll}
 2 < 4 & \parallel \cdot 2 \\
 2 \cdot 2 < 4 \cdot 2 & \\
 4 < 8 & \text{tosi}
 \end{array}$$

Sen sijaan negatiivisella luvulla kertominen ei säilytä suuruusjärjestystä. Esimerkiksi
kun lukuja 2 ja 5 kerrotaan luvulla -1 , niiden suuruusjärjestys kääntyy:



Jos epäyhtälöä kerrotaan tai jaetaan negatiivisella luvulla, epäyhtälömerkin suunta
täytyy kääntää, jotta saataisiin yhtäpitävä epäyhtälö.

ESIMERKKI 2.46

Epäyhtälön kertominen negatiivisella luvulla.

$$\begin{array}{ll} 2 < 5 & \parallel \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-1) > 5 \cdot (-1) & \\ -2 > -5 & \text{tosi} \end{array}$$

Epäyhtälöstä saadaan yhtäpitävä epäyhtälö

- lisäämällä molemmille puolille sama lauseke,
- kertomalla tai jakamalla molemmat puolet samalla positiivisella luvulla tai
- kertomalla tai jakamalla molemmat puolet samalla negatiivisella luvulla ja kääntämällä epäyhtälömerkin suunta.

Kuten yhtälöiden tapauksessa, epäyhtälön kertominen puolittain nollalla ei tuota yhtäpitävää epäyhtälöä, sillä esimerkiksi epäyhtälöstä $a \leq b$ tulee $0 \leq 0$, joka on aina tosi, ja epäyhtälöstä $a < b$ tulee $0 < 0$, joka on aina epätosi.

ESIMERKKI 2.47

Muokataan epäyhtälöä $-2x + 4 < 6$ käyttämällä esitettyjä operaatioita.

$$\begin{array}{ll} -2x + 4 < 6 & \parallel - 4 \\ -2x < 2 & \parallel : (-2) \\ x > -1 & \end{array}$$

Tehdyt operaatiot tuottavat yhtäpitäviä epäyhtälöitä, joten epäyhtälö

$-2x + 4 < 6$ on yhtäpitävä epäyhtälön $x > -1$ kanssa. Voidaan päätellä, että lukua -1 suuremmat luvut ovat täsmälleen epäyhtälön ratkaisut.

2.1.2 REAALILUKUVÄLIT

Ratkaistaessa yhtälöitä ratkaisuksi saadaan yleensä pieni joukko lukuja. Epäyhtälöiden tapauksessa on tyypillistä, että ratkaisu on **väli**, eli kaikki kahden luvun väliset luvut.

Reaalilukuvälejä merkitään usein laittamalla välin ala- ja ylärajat hakasulkujen sisään. Esimerkiksi $[a, b]$ tarkoittaa lukuja x jotka toteuttavat kaksoisepäyhtälön $a \leq x \leq b$.

Mikäli ala- tai yläraja ei kuulu väliin, vastaava hakasulku käännetään. Esimerkiksi $[2,5[$ tarkoittaa lukuja x , joille pätee $2 \leq x < 5$.

Väliä kutsutaan **suljetuksi väliksi**, mikäli ala- ja yläraja kuuluvat väliin, ja **avoimeksi väliksi**, mikäli ala- ja yläraja eivät kuulu väliin. Jos vain toinen rajoista kuuluu väliin, väli on **puoliavoin**.

Väli voidaan piirtää lukusuoralle kahden luvun välisenä janana. Päätepisteet merkitään täytetyllä ympyrällä, mikäli luku kuuluu väliin, ja muuten tyhjällä ympyrällä. Esimerkiksi väli $[a, b[$ piirretään seuraavasti:



Jos halutaan, että väli ei ole alhaalta tai ylhäältä rajoitettu, merkitään rajaksi $-\infty$ tai ∞ . Koska ääretön ei ole reaaliluku eikä näin ollen kuulu väliin, on sitä vastaava hakasulku käännettävä, ja siten esimerkiksi väli $] -\infty, a[$ on avoin.

Seuraavaan taulukkoon on koottu reaalilukuvälien olennainen käsitteistö ja merkin-

Epäyhtälö- merkintä	Joukko- opillinen merkintä	Esitys lukusuoralla	Välin nimitys
$-3 < x < 5$	$x \in] - 3, 5[$		Avoin väli
$-3 < x \leq 5$	$x \in] - 3, 5]$		Puoliavoin väli
$-3 \leq x < 5$	$x \in [-3, 5[$		Puoliavoin väli
$-3 \leq x \leq 5$	$x \in [-3, 5]$		Suljettu väli
$-3 \leq x$	$x \in [-3, \infty[$		Puoliavoin väli
$-3 < x$	$x \in] - 3, \infty[$		Avoin väli
$x \leq 5$	$x \in]-\infty, 5]$		Puoliavoin väli
$x < 5$	$x \in]-\infty, 5[$		Avoin väli

ESIMERKKI 2.48

- a) Epäyhtälö $2 < x < 10$ vaatii, että x saa arvoja kahden ja kymmenen väliltä, mutta se ei koskaan saa täsmälleen näitä reuna-arvoja. Kyseessä on avoin väli kahdesta kymmeneen, $]2,10[$. Annetulle epäyhtälölle yhtäpitävä ilmaisu on $x \in]2,10[$.
- b) Epäyhtälö $0 \leq y \leq 2$ rajaa muuttujan y välille suljetulle välille $[0,2]$. Väli on suljettu, koska y voi myös saada täsmälleen arvot 0 ja 2.
- c) Joskus kirjallisuudessa näkee äärettömyyssymbolin käyttöä myös kaksoisepäyhtälöissä, esimerkiksi $3 < x < \infty$, mutta ilmaistaan yleisemmin muodossa $x \in]3,\infty[$. Kyseessä on avoin väli.
- d) Epäyhtälöt $-100 < k \leq 0$ ja $u \leq 90$ ovat puoliavoimia välejä, koska ne rajaavat muuttujan yhtäsuuruuden avulla vain toiselta puolelta.
- e) Kaksoisepäyhtälö $\frac{1}{5} \geq x > -\sqrt{3}$ tarkoittaa samaa kuin kaksoisepäyhtälö $-\sqrt{3} < x \leq \frac{1}{5}$. Kaksoisepäyhtälö vaatii, että muuttujalle x pätee erikseen sekä epäyhtälö $-\sqrt{3} < x$ että $x \leq \frac{1}{5}$.

ESIMERKKI 2.49

Merkitse väli

- a) $[-2,4]$
- b) $[4,5[$
- c) $]6,\infty[$

epäyhtälömerkintänä. Onko väli suljettu, avoin vai puoliavoin?

Ratkaisu.

- a) Kun $x \in [-2,4]$, pätee $-2 \leq x \leq 4$. Väli on suljettu, koska päätepisteet kuuluvat väliin.
- b) Kun $x \in [4,5[$, pätee $4 \leq x < 5$. Väli on puoliavoin.
- c) Kun $x \in]6,\infty[$, pätee $6 < x$. Väli on avoin, koska kumpikaan päätepiste ei kuulu väliin.

Joskus, erityisesti englanninkielisissä matematiikan teksteissä, käytetään avoimen välin merkintänä käännetyyn hakasulkeen sijasta tavallista kaarisuljetta. Merkintää ei suositella käytettävän, koska samaa merkintää käytetään kahdessa ulottuvuudessa sijaitsevan pisteen koordinaattien ilmaisuun.

ESIMERKKI 2.50



- a) Avoin väli $]1,9[$ kirjoitetaan joskus $(1,9)$.
- b) Puoliavoin väli $]3,4]$ kirjoitetaan joskus $(3,4]$.

Tehtäviä

71. Ovatko seuraavat väitteet tosi vai epätosia?

- a) $2 < 4$
- b) $4 > 2$
- c) $-1 \leq 10$
- d) $3 \geq 3$
- e) $0,666 \cdot 6 > 4$

72. Ovatko seuraavat väitteet tosi, epätosia vai ehdollisesti tosia?

- a) $10^4 < 10^3$
- b) $3^{-1} > 3^{-2}$
- c) $2^{10} \leq 10^3$
- d) $x \leq y$
- e) $x \geq x$
- f) $x \geq x + 1$

73. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia?

- a) $\pi = 3,14$
- b) $\pi \approx 3,14$
- c) $\pi \neq 3,14$
- d) $\pi > 3,14$
- e) $\pi < 3,14$
- f) $\pi \leq 3,14$
- g) $\pi \geq 3,14$

74. Esitä joukko-opillisilla merkinnöillä ja lukusuoralla.

- a) $-10 < x < 10$
- b) $-9 < x \leq 7$
- c) $5 \leq c$
- d) $5 \leq s \leq 7\frac{1}{2}$
- e) $5 \geq x > 1$

75. Kuuluvatko luvut välille $[0,1; 0,92]$?

- a) 0
- b) $\frac{1}{2}$
- c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- d) 1
- e) 0,1
- f) 0,92
- g) 0,09
- h) 0,9199
- i) 0,10

76. Monissa arkisissa ilmauksissa esitetään jonkinlaisia rajoja. Tarkoittavatko kyseiset ilmaisut aidon epäyhtälön tilannetta ($<$ tai $>$) vai sitä, että myös reuna-arvot ovat sallittuja ($\leq$ tai $\geq$)?

- a) ”Lasten ateriat 12-vuotiaaksi asti”
- b) ”Kauppa on auki jälleen kuun ensimmäisestä päivästä lähtien.”
- c) ”Loton kierros on auki klo 20 asti.”
- d) ”jäseniksi käyvät korkeintaan 29-vuotiaat”
- e) ”Lukekaa ensi tunnille kirjaa Potenssi-lukuun asti.”

Hallitse kokonaisuus

77. Säilyykö epäyhtälö totena, kun se korotetaan puolittain toiseen potenssiin?

- a) $0 \leq 2$
- b) $-2 < 2$
- c) $3 > -1$
- d) $5 \geq -10$
- e) $1 \neq 2$

78. Säilyykö epäyhtälö totena, kun siitä otetaan puolittain neliöjuuri?

- a) $0 \leq 2$
- b) $1 < 2$
- c) $999 < 1\,000$
- d) $50 \geq 25$
- e) $1 \neq 2$

79. Säilyykö epäyhtälö totena, kun epäyhtälön molemmille puolille käytetään 10-kantaista eksponenttifunktiota? (Eli epäyhtälön puolet sijoitetaan eksponenttifunktion muuttujan paikalle.)

- a) $0 \leq 2$
- b) $-2 < 2$
- c) $3 > -1$
- d) $5 \geq -10$
- e) $1 \neq 2$

80. Piirrä funktion P kuvaaja, kun funktion arvot määritellään kaavalla $P(x) = x^3 - x$, ja funktion määrittelyjoukko on

- a) $[0, 2]$
- b) $[-2, 2]$
- c) $] -\infty, 0]$
- d) $[-3, -2] \cup [2, 3]$

Lisää tehtäviä

81. Etsi jokin epätosi epäyhtälö, jonka totuusarvo muuttuu todeksi, kun puolittain suoritetaan jokin laskutoimitus.

82. ★ Osoita, että $m^2 + n^2 \geq mn$ kaikilla kokonaisluvuilla m, n .

83. ★ Tilapäivitys sosiaalisessa mediassa sanoo: ”Vaimollani, alle 30 vuotta, oli naurussa pitelemistä, kun hänelle valkeni, että täytän tänä vuonna 35. Nauran takaisin, kun hän täyttää 35 ja itse olen... yli neljäkymmentä.”Pitäkökö päättely välttämättä paikkansa?

84. ★ Osoita, että $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$, kun $x \neq 0$.

85. ★ Osoita, että kun $a \geq 0$ ja $b \geq 0$, pätee $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Milloin yhtäsuuruus on voimassa?

86. ★ Merkitse suuruusjärjestys luvuille 10_9 ja 9_{10} .

2.2 Kertausta: ensimmäisen asteen yhtälö

Yhtälöistä yksinkertaisin on ensimmäisen asteen yhtälö. Käydään se lyhyesti läpi kertauksen vuoksi.

Ensimmäisen asteen yhtälössä ratkaistavana on vain mahdollisesti vakiolla kerrottu muuttuja. Yhtälön ratkaisemiseksi riittää neljää peruslaskutoimitusta: yhteen-, vähennys-, kerto ja jakolasku. Yhtälöä muokataan tekemällä yhtälön kummallekin puolelle sama laskutoimitus.

ESIMERKKI 2.51

Ratkaise yhtälö $4x + 5 = 2 + 2x$.

Ratkaisu.

$$\begin{array}{ll} 4x + 5 = 2 + 2x & \parallel - 2x \\ 2x + 5 = 2 & \parallel - 5 \\ 2x = -3 & \parallel : 2 \\ x = -\frac{3}{2} & \end{array}$$

Vastaus. $x = -\frac{3}{2}$

ESIMERKKI 2.52

■ Ratkaise yhtälö $3x - 6 = 0$.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}3x - 6 &= 0 & \parallel & + 6 \\3x &= 6 & \parallel & : 3 \\x &= \frac{6}{3} = 2\end{aligned}$$

Vastaus. $x = 2$

ESIMERKKI 2.53

Ratkaise yhtälö $\frac{x}{2} - \frac{x+3}{2} = 3$.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}\frac{x}{2} - \frac{x+10}{2} &= 5 & \parallel & \cdot 2 \\x - (x+10) &= 10 \\x - x - 10 &= 10 \\-10 &= 10 & \text{ristiriita, ei ratkaisua.}\end{aligned}$$

Vastaus. ei ratkaisua

Yleisesti ensimmäisen asteen yhtälö on muotoa

$$ax + b = 0.$$

Kaikki 1. asteen yhtälöt voidaan muokata tähän yleiseen muotoon siirtämällä kaikki termit yhtälön vasemmalle puolelle ja sieventämällä.

Yleisen yhtälön $ax + b = 0$ ratkaisu on

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}.$$

$$\parallel -b$$

$$\parallel : a (\neq 0)$$

Tehtäviä

Opi perusteet

87. Ratkaise yhtälöt.

- a) $x + 5 = 47$
- b) $2x = 64$
- c) $3x - 5 = 16$

88. Ratkaise yhtälöt.

- a) $x + 8 = 2x - 1$
- b) $2x + 4 = 60$
- c) $3x - 5 = -x + 11$

89. Antero pitää hauskaa keksimällä luvun mielikuvituksessaan. Hän kirjoittaa luvun mielikuvituspaperille vaaleanpunaisella mielikuvituskynällä. Tämän jälkeen hän kertoo luvun silmiensä lukumäärällä ja vähentää siitä varpaidensa lukumäärän. Antero on innoissaan, sillä hän saa tulokseksi luvun 8, joka on hänen ikänsä vuosina. Selvitä yhtälönratkaisulla Anteron keksimä luku, kun oletetaan, että hänellä on yhtä monta silmää ja varvasta kuin hänen ikätovereillaan yleensä on.

90. Kun eräs luku kerrotaan kolmella, ja siihen sen jälkeen lisätään viisi, saadaan tulokseksi puolet alkuperäisestä luvusta. Kirjoita yhtälö ja selvitä kyseinen luku.

91. Muodosta tilannetta kuvaavat lausekkeet.

- a) Kuinka paljon maksaa hilavitkuttimen vuokraus x tunniksi, kun vuokra on 42 €/tunti. Vuokraajan tulee myös ottaa pakollinen 25 euron laitteistovakuutus.
- b) Kuinka monta euroa saa x dollarilla, kun 1 EUR vastaa 1,23 USD:a, ja halutaan vaihtaa dollareita euroiksi. Valuutanvaihtaja veloittaa lisäksi palvelumaksun 0,50 euroa.

Hallitse kokonaisuus

92. Ratkaise yhtälöt.

- a) $3(x + 7) = 7x$
- b) $2(3x - 1) = -7x$
- c) $3 - 2x - (4 - x) = 2$

93. Ratkaise yhtälöt.

- a) $-2 \cdot \frac{x-5}{3} - \frac{5}{7}(1-x) = 5x + 3$
- b) $\frac{4x-5}{3} - \frac{3}{2}(x-8) = -\frac{x+5}{6}$
- c) $3(x-3) + x = 4x - 9$

Lisää tehtäviä

94. ★ Suorakulmaisen kolmion sivujen pituuden kateettien pituudet ovat $x + 1$ ja 4. Hypotenuusan pituus $x + 3$. Mikä x on?
95. ★ Määritä sekunnin tarkkuudella se ajanhetki, kun kellotaulun minuutti- ja tuntiviisarit ovat päällekkäin ensimmäisen kerran klo 12.00:n jälkeen.

2.3 Ensimmäisen asteen epäyhtälö



Opetus.tv: *ensimmäisen asteen epäyhtälö* (14.55 ja 8.21)

<http://opetus.tv/maa/maa2/ensimmaisen-asteen-epayhtalo/>

Samoin kuin yhtälöiden kohdalla, epäyhtälö pyritään muuttamaan niin yksinkertaiseen muotoon kuin mahdollista, jotta yksinkertaisesta tilanteesta nähdään välittömästi, mitkä luvut kuuluvat ratkaisuun ja mitkä eivät. Tuntemattomat pyritään yhdistämään, ja epäyhtälöä muokataan niin, että tuntematon saadaan yksin omalle puolelleen yhtälöä.

ESIMERKKI 2.54

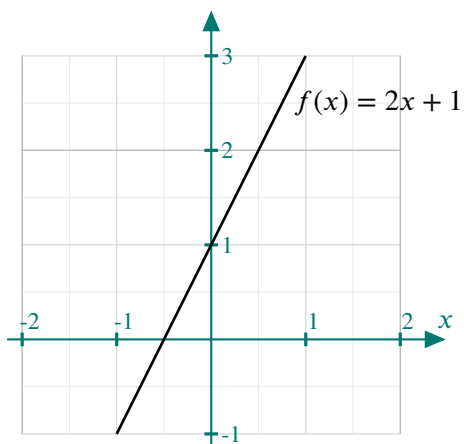
Ratkaise epäyhtälö $2x + 1 < 0$.

Ratkaisu.

$$\begin{array}{ll} 2x + 1 < 0 & \parallel - 1 \\ 2x < -1 & \parallel : 2 \\ x < -\frac{1}{2} \end{array}$$

Vastaus. $x < -\frac{1}{2}$. Ratkaisu voidaan esittää myös muodossa $x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[$.

Ratkaisua voidaan tulkita graafisesti tutkimalla lausekkeeseen $2x + 1$ liittyvää kuvaajaa:



Alkuperäinen epäyhtälö $2x + 1 < 0$ vaatii, että lausekkeen $2x + 1$ arvo on negatiivinen. Yhtälön ratkaisu on mahdollista nähdä katsomalla kuvasta, millä kaikilla x :n arvoilla funktion $2x + 1$ kuvaaja laskee vaaka-akselin alapuolelle. Tällöin funktio, siis toisaalta lauseke $2x + 1$, saa negatiivisia arvoja.

Ensimmäisen asteen epäyhtälö ratkaistaan muuten kuin yhtälö, mutta kun kerrotaan tai jaetaan negatiivisella luvulla, epäyhtälömerkki kääntyy.

ESIMERKKI 2.55

Ratkaise epäyhtälö $x < 5x - 8$.

Ratkaisu.

$$\begin{array}{ll}
 x < 5x - 8 & \parallel -5x \\
 -4x < -8 & \parallel : (-4), \text{ merkki kääntyy, } -4 < 0 \\
 x > 2 &
 \end{array}$$

Vastaus. $x > 2$.

Merkki kääntyy yleisemmin aina, kun yhtälön molemmille puolille sovelletaan jotain vähenevää funktiota – tästä lisää myöhemmillä kursseilla.

ESIMERKKI 2.56

Millä w :n arvoilla pätee $-8w - (8 - w) \geq \frac{1}{2}w + 5$?

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
-8w - (8 - w) &\geq \frac{1}{2}w + 5 \\
-8w - 8 + w &\geq \frac{1}{2}w + 5 \\
-7w - 8 &\geq \frac{1}{2}w + 5 & \| -\frac{1}{2}w \\
-\frac{15}{2}w - 8 &\geq 5 & \| +8 \\
-\frac{15}{2}w &\geq 13 & \| : (-\frac{15}{2}) \\
w &\leq 13 : (-\frac{15}{2}) \\
w &\leq -13 \cdot \frac{2}{15} \\
w &\leq -\frac{26}{15}
\end{aligned}$$

Vastaus. $w \leq -\frac{26}{15}$

ESIMERKKI 2.57

Ratkaise kaksoisepäyhtälö $1 \leq q + 7 < -5q - 2$.

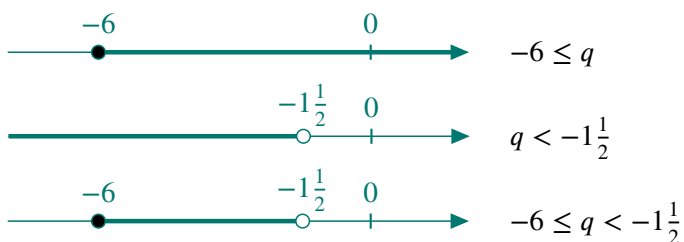
Ratkaisu. Ratkaistavana on itse asiassa kaksi epäyhtälöä: $1 \leq q + 7$ ja $q + 7 < -5q - 2$. Halutaan siis löytää ne q :n arvot, joilla molemmat epäyhtälöt pätevät.

$$\begin{aligned}
1 &\leq q + 7 & \| -7 \\
-6 &\leq q
\end{aligned}$$

Vastaavasti toiselle yhtälölle:

$$\begin{array}{rcl} q + 7 < -5q - 2 & \parallel & + 5q \\ 6q + 7 < -2 & \parallel & - 7 \\ 6q < -9 & \parallel & : 6 \\ q < -\frac{9}{6} = -1\frac{1}{2} \end{array}$$

Saatiin siis ehdot $-6 \leq q$ ja $q < -1\frac{1}{2}$, jotka täytyy yhdistää.



Ehdot ovat yhtä aikaa voimassa, kun $-6 \leq q < -1\frac{1}{2}$.

Vastaus. $-6 \leq q < -1\frac{1}{2}$.

Tehtäviä

Opi perusteet

96. Ratkaise seuraavat epäyhtälöt.

- a) $3x + 6 < 4x$
- b) $3x - 6 < 2x + 57$
- c) $5y - 2 < 12$
- d) $3 \leq y + 9$
- e) $z - 5 \geq -888$
- f) $2z + 5 \leq 42z - 995$

97. Maalipurkki sisältää 10 litraa maalia. Maalin riittoisuus on noin $6 \text{ m}^2/\text{l}$. Talon ulkoseinän korkeus on 4,5 m. Ulkoseinälle tulevat laudat on maalattava kahteen kertaan. Riittääkö maali, jos maalattavan seinän pituus on

- a) 5 m
- b) 10 m
- c) Kuinka pitkälle seinälle yhden purkillisen sisältämä maali riittää?

Hallitse kokonaisuus

98. Ratkaise seuraavat yhtälöt tai epäyhtälöt.

- a) $-2r + 6 = 0$
- b) $-2r + 6 \leq 0$
- c) $5y - 2 < y + 6$
- d) $8(x + 2) \geq -5(5 - x) + 3$
- e) $\frac{x+3}{2} + \frac{-2x+1}{3} > \frac{x-9}{4}$

99. Tietyn auton käyttövoimavero on 450 €/vuosi, ja keskimääräinen kulutus dieselöljyä käytettäessä on 5 litraa/100 km. Saman valmistajan vastaava bensiinikäyttöinen auto kuluttaa 8 litraa/100 km. Diesel maksaa 1,55 €/litra, ja bensiini maksaa 1,65 €/litra. Kun vain annetut tiedot huomioidaan, niin kuinka paljon esimerkin dieselajoneuvolla tulee vähintään ajaa vuodessa, jotta se on edullisempi? Autojen ostohintoja ei huomioida.

100. Ratkaise epäyhtälöt.

- a) $3x + 6 < 2x \leq 9 - x$
- b) $3x + 6 < 2x \leq 1 + 3x$

101. Millä x :n arvoilla luvut $2x - 5$, $-x$ ja $x + 4$ ovat erisuuria ja $2x - 5$ on luvuista

- a) suurin
- b) toiseksi suurin
- c) pienin?

Lisää tehtäviä

102. Ratkaise seuraavat epäyhtälöt.

- a) $33x + 2 \geq 27x + 6$
- b) $3x - 6 \geq 4x - 6$
- c) $5y + 5 \geq 15$
- d) $3y + 2 \geq 2y - 1$
- e) $z \geq 2z + 1\,000$
- f) $z - 1 \geq z + 1$

103. Lukion päättötodistuksessa aineen arvosana määräytyy aineen pakollisten ja syventävien kurssien keskiarvosta pyöristettynä kokonaisluvuksi tavallisten sääntöjen mukaan. Opiskelija haluaa filosofian päättöarvosanakseen 7 tai paremman. Opiskelija aikoo osallistua kolmelle filosofian kursseille. Kahden kurssin jälkeen hänen arvosanojensa keskiarvo on 6. Mikä arvosana on opiskelijan vähintään saatava kolmannesta kurssista? Kurssit arvioidaan asteikolla 4–10.

104. Ratkaise kaksoisepäyhtälö

$$2x - 1 < x \leq 3 + 5x.$$

LUKU 3

Toinen aste

3.1 Toisen asteen polynomifunktio ja sen kuvaaja



Opetus.tv: *toisen asteen polynomifunktio* (7.59)

<http://opetus.tv/maa/maa2/toisen-asteen-polynomifunktio/>

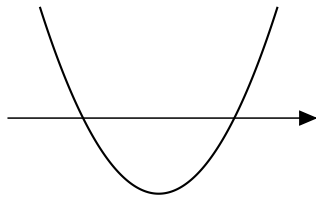
Toisen asteen polynomifunktio on muotoa

$$P(x) = ax^2 + bx + c,$$

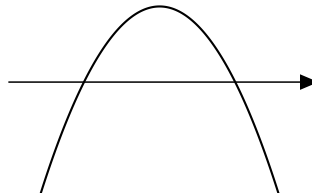
missä vakiot b ja c voivat olla mitä tahansa reaalilukuja ($b, c \in \mathbb{R}$) ja a voi olla mikä tahansa reaaliluku, paitsi luku nolla ($a \in \mathbb{R}, a \neq 0$).

Toisen asteen polynomifunktion kuvaajaa nimitetään **paraabeliksi**.

Funktion $P(x) = ax^2 + bx + c$ kuvaaja on joka ylös- tai alaspäin aukeava paraabeli. Paraabelin suuntaan vaikuttaa ainoastaan toisen asteen termin kerroin a : kun $a > 0$, paraabeli aukeaa ylöspäin, ja kun $a < 0$, paraabeli aukeaa alaspäin.

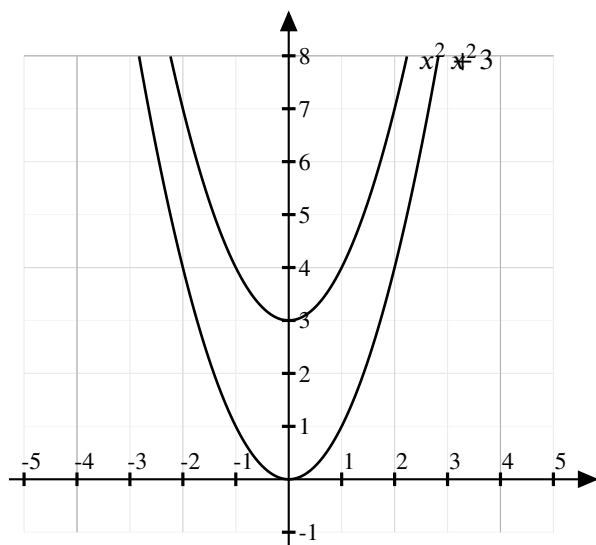


ylöspäin aukeava paraabeli,
 $a > 0$

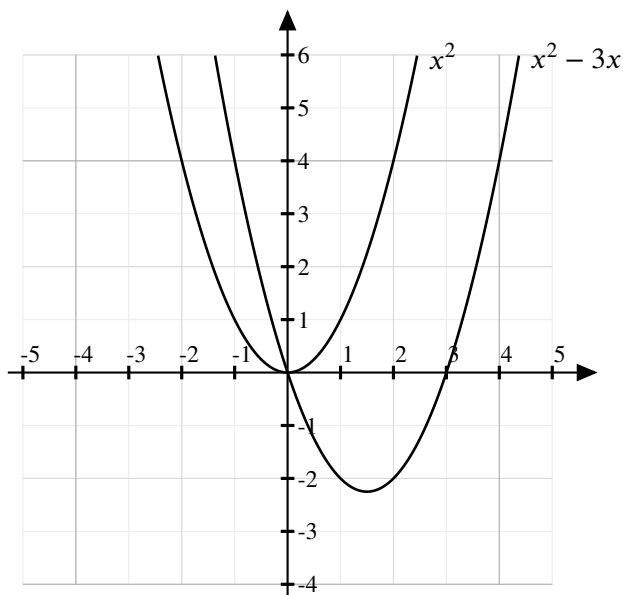


alaspäin aukeava paraabeli,
 $a < 0$

Vakiotermi c vaikuttaa kuvaajan korkeuteen.



Ensimmäisen asteen termin kerroin b vaikuttaa huipun sijaintiin sekä pysty- että vaakasuunnassa.



Tarkempi perustelu edellä esitetyille seikoille löytyy lisämateriaalista, sivulta 135.

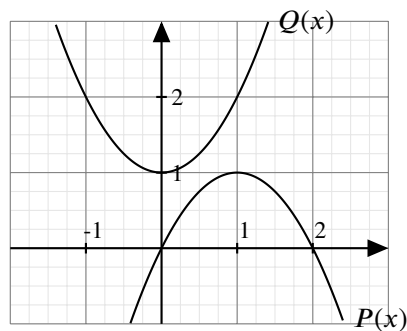
Tehtäviä

Opi perusteet

105. Aukeavatko seuraavat paraabelit ylös- vai alaspäin?

- a) $4x^2 + 100x - 3$
- b) $-x^2 + 1337$
- c) $5x^2 - 7x + 5$
- d) $-6(-3x^2 + 5)$
- e) $-13x(9 - 17x)$
- f) $100(1 - x^2)$

106. Funktiot $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat toisen asteen polynomeja.

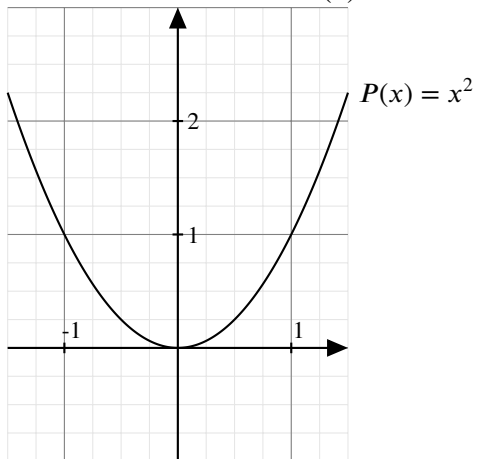


Päättele kuvaajan perusteella

- a) mihin suuntaan paraabelit aukeavat
- b) funktion P nollakohdat
- c) yhtälön $Q(x) = 2$ ratkaisu
- d) polynomin $Q(x)$ vakiotermi

Hallitse kokonaisuus

107. Kuvassa on funktion $P(x) = x^2$ kuvaaja.



Hahmottele kuvaajan avulla funktioiden

- a) $x^2 - 1$
- b) $2 - x^2$
- c) $\frac{1}{2}x^2$
- d) $(x - 2)^2$

kuvaajat.

3.2 Toisen asteen yhtälö



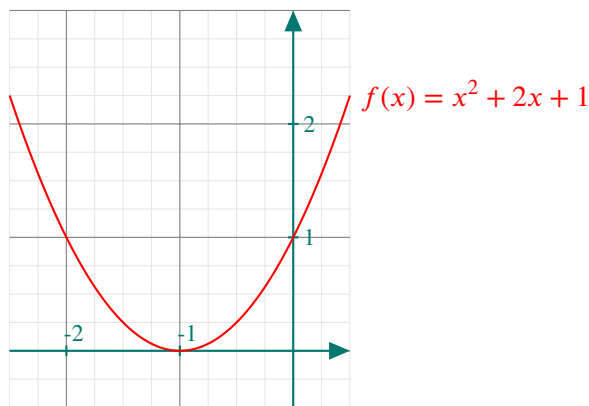
Opetus.tv: *toisen asteen yhtälö* (9.02, 11.09 ja 9.30)

<http://opetus.tv/maa/maa2/toisen-asteen-yhtalo/>

ESIMERKKI 3.58

Funktion f arvot määritellään kaavalla $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Selvitetään, milloin funktion f kuvaaja leikkaa x -akselin.

Funktion kuvaaja leikkaa x -akselin, kun $f(x) = 0$. Tätä muuttujan x arvoa kutsutaan funktion f **nollakohdaksi**. Piirretään funktion f kuvaaja ja etsitään ne kohdat, joissa funktio leikkaa x -akselin.



Kuvaajasta havaitaan, että funktion f nollakohta on $x \approx -1$. Tätä funktion nollakohdan ratkaisumenetelmää kutsutaan graafiseksi ratkaisemiseksi. Graafinen ratkaisu on aina likimääräinen eli arvio oikeasta ratkaisusta.

Määritettäessä toisen asteen polynomifunktion nollakohtia päädytään **toisen asteen yhtälöön**, joka on aina saatettavissa yleiseen muotoon

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

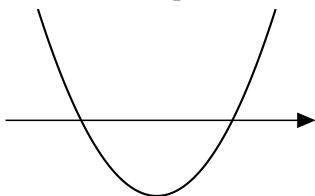
Toisen asteen yhtälöllä

$$ax^2 + bx + c = 0$$

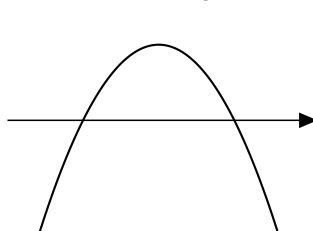
on reaalityyppisiä ratkaisuja joko 0, 1 tai 2 kappaletta.

Seuraavassa kuvat eri tapauksista:

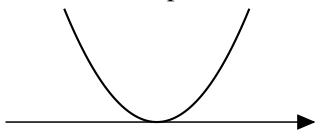
2 ratkaisua, a positiivinen



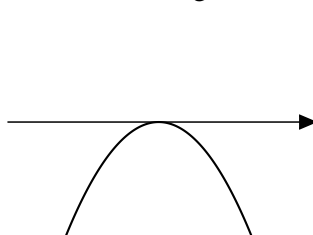
2 ratkaisua, a negatiivinen



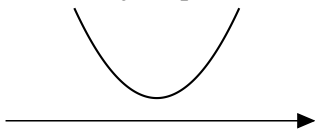
1 ratkaisu, a positiivinen



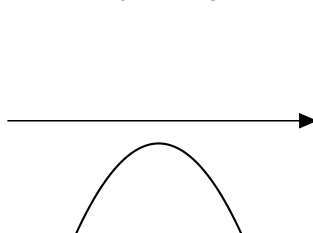
1 ratkaisu, a negatiivinen



ei ratkaisuja, a positiivinen



ei ratkaisuja, a negatiivinen



Graafisen ratkaisemisen sijasta toisen asteen yhtälö ratkaistaan yleensä laskemalla, mihin tutustutaan seuraavaksi.

3.2.1 VAILLINAISET YHTÄLÖT

Jos toisen asteen yhtälöstä $ax^2 + bx + c = 0$ puuttuu joko termi bx tai c , kyseessä on niin sanottu *vaillinainen toisen asteen yhtälö*. Se on muotoa

$$ax^2 + c = 0 \quad \text{tai} \quad ax^2 + bx = 0.$$

Vaillinaisten yhtälöiden ratkaiseminen on paljon yleistä tapausta yksinkertaisempaa.

Toisen asteen yhtälö $ax^2 + c = 0$ Muotoa $ax^2 + c = 0$ oleva toisen asteen yhtälö saadaan helposti ratkaistua neliöjuuren avulla.

ESIMERKKI 3.59

Ratkaistaan yhtälö $5x^2 - 45 = 0$.

$$\begin{array}{ll} 5x^2 - 45 = 0 & \parallel + 45 \\ 5x^2 = 45 & \parallel : 5 \\ x^2 = 9 & \text{ratkaistaan käyttäen neliöjuurta (9 > 0)} \\ x = \pm\sqrt{9} = \pm 3. & \end{array}$$

ESIMERKKI 3.60

Ratkaistaan yhtälö $13x^2 - 42 = -3$:

$$\begin{array}{ll} 13x^2 - 42 = -3 & \parallel + 42 \\ 13x^2 = 39 & \parallel : 13 \\ x^2 = 3 & \text{ratkaistaan käyttäen neliöjuurta (3 > 0)} \\ x = \pm\sqrt{3}. & \end{array}$$

ESIMERKKI 3.61

Ratkaistaan yhtälö $x^2 + 4 = 3$:

$$\begin{array}{ll} x^2 + 4 = 3 & \parallel - 4 \\ x^2 = -1 & \end{array}$$

■ Koska $x^2 \geq 0$ kaikilla x , yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx = 0$ Jos yhtälöstä $ax^2 + bx + c = 0$ puuttuu vakiotermi c , yhtälö saa muodon

$$ax^2 + bx = 0.$$

Tällainen yhtälö ratkeaa jakamalla tekijöihin ja käyttämällä tulon nollasääntöä:

$$\begin{array}{ll} ax^2 + bx = 0 & \parallel \text{ otetaan yhteinen tekijä} \\ x(ax + b) = 0 & \parallel \text{ tulon nollasääntö} \\ x = 0 \text{ tai } ax + b = 0 & \\ x = 0 \text{ tai } ax = -b & \\ x = 0 \text{ tai } x = -\frac{b}{a}. & \end{array}$$

ESIMERKKI 3.62

■ Ratkaise yhtälö $x^2 - 11x = 0$.

$$\begin{array}{ll} x^2 - 11x = 0 & \parallel \text{ otetaan yhteinen tekijä } x \\ x(x - 11) = 0 & \parallel \text{ tulon nollasääntö} \\ x = 0 \text{ tai } x - 11 = 0 & \\ x = 0 \text{ tai } x = 11 & \end{array}$$

ESIMERKKI 3.63

■ Ratkaise yhtälö $55x^2 + 8x = 0$.

$$\begin{array}{ll} 55x^2 + 8x = 0 & \parallel \text{ otetaan yhteinen tekijä} \\ x(55x + 8) = 0 & \parallel \text{ tulon nollasääntö} \\ x = 0 \text{ tai } 55x + 8 = 0 & \\ x = 0 \text{ tai } 55x = -8 & \\ x = 0 \text{ tai } x = -\frac{8}{55} & \end{array}$$

3.2.2 NELIÖKSI TÄYDENTÄMINEN

Toisen asteen yhtälöä $ax^2 + bx + c = 0$, jossa $a, b, c \neq 0$, kutsutaan täydelliseksi toisen asteen yhtälöksi. Tällaiset yhtälöt voidaan ratkaista muistikaavojen avulla täydentämällä ne neliöiksi. Tarkastellaan vaikkapa yhtälöä

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Yhtälön vasen puoli on melkein sama kuin binomin $x + 1$ neliö, sillä $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Vain vakiotermissä on eroa. Korjataan asia ja ratkaistaan yhtälö:

$$\begin{array}{ll} x^2 + 2x - 3 = 0 & \parallel + 4 \\ x^2 + 2x + 1 = 4 & \parallel \text{ muistikaava: } (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1. \\ (x + 1)^2 = 4 & \parallel \text{ neliöjuuri } (4 > 0) \\ x + 1 = \pm 2 & \\ x = \pm 2 - 1 & \\ x = 2 - 1 \text{ tai } x = -2 - 1 & \\ x = 1 \text{ tai } x = -3. & \end{array}$$

Miksi edellä osattiin ajatella juuri oikeaa muistikaavaa $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$? Syynä on se, että yhtälön vasemmalla puolella olevan polynomin alkuosaa $x^2 + 2x$ ei saada minkään muun binomin neliöstä. Neliöksi täydentäminen vaatii siis muistikaavojen hyvää hallintaa.

Kaikki toisen asteen yhtälöt voidaan ratkaista neliöksi täydentämällä. Yleensä sen sijasta tosin käytetään *toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa*, joka esitellään seuraavassa luvussa. Ratkaisukaava perustellaan neliöksi täydentämällä, minkä vuoksi neliöksi täydentäminen opetellaan ensin.

ESIMERKKI 3.64

Ratkaise yhtälö $x^2 + 4x - 16 = 0$.

Kirjoitetaan yhtälö muotoon $x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x - 16 = 0$ ja verrataan kahta ensimmäistä termiä muistikaavaan, jotta nähdään, minkä binomin neliöksi

lauseke voidaan muokata.

$$\begin{aligned}x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 &= (\quad + \quad)^2 \\a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 &= (a + b)^2\end{aligned}$$

Lausekkeita vertaamalla nähdään vastaavuus $a = x$, $b = 2$. Neliöstä puuttuva termi b^2 on siis $2^2 = 4$. Täydennetään nyt neliöksi:

$$\begin{aligned}x^2 + 4x - 16 &= 0 & \parallel & + 16 \\x^2 + 4x &= 16 & \parallel & + 4 \\x^2 + 4x + 4 &= 20 & \text{muistikaava: } x^2 + 4x + 4 &= (x + 2)^2 \\(x + 2)^2 &= 20 & \text{neliöjuuri } (20 > 0) & \\x + 2 &= \pm \sqrt{20} & \parallel & - 2 \\x &= -2 \pm \sqrt{20} & \parallel & \text{sievennetään vastaus} \\x &= -2 \pm 2\sqrt{5}.\end{aligned}$$

ESIMERKKI 3.65

Ratkaistaan yhtälö $4x^2 - 4x - 5 = 0$.

Toisen ja ensimmäisen asteen termit saadaan neliöstä $(2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$.

Rakennetaan se yhtälön vasemmalle puolelle:

$$\begin{aligned}4x^2 - 4x - 5 &= 0 & \parallel & + 6 \\4x^2 - 4x + 1 &= 6 & \text{muistikaava: } 4x^2 - 4x + 1 &= (2x - 1)^2 \\(2x - 1)^2 &= 6 & \\2x - 1 &= \pm \sqrt{6} & \parallel & + 1 \\2x &= 1 \pm \sqrt{6} & \parallel & : 2 \\x &= \frac{1 \pm \sqrt{6}}{2}.\end{aligned}$$

Tehtäviä

Opi perusteet

108. Ratkaise yhtälöt.

- a) $x^2 = 16$
- b) $x^2 = -16$
- c) $x^2 - 13 = 0$
- d) $3x^2 - 12 = 0$

109. Ratkaise yhtälöt.

- a) $x(x - 3) = 0$
- b) $x^2 + 4x = 0$
- c) $7x^2 - 3x = 0$

110. Kirjoita neliöksi tunnistamalla muistikaava

- a) $x^2 + 2x + 1$
- b) $x^2 + 6x + 9$
- c) $x^2 - 4x + 4$

111. Ratkaise yhtälö täydentämällä neliöksi

- a) $x^2 - 2x + 1 = 4$
- b) $x^2 + 4x = 5$
- c) $x^2 - 3x + 10 = 0$

Hallitse kokonaisuus

112. Ratkaise seuraavat yhtälöt.

- a) $x^2 - 100 = 0$
- b) $x^2 + 100 = 0$
- c) $x^2 - 10 = 0$
- d) $-x^2 - 25 = 0$
- e) $2x^2 - 98 = 0$

113. Ratkaise seuraavat yhtälöt.

- a) $x^2 - 72x = 0$
- b) $x^2 + 56x = 0$
- c) $-x^2 - 13x = 0$
- d) $2x^2 + 43x = 0$

114. Ratkaise seuraavat yhtälöt.

- a) $x^2 - 36 = 0$
- b) $x^2 - 85x = 0$
- c) $x^2 + 11x = -6x$
- d) $x^2 + 10x = -4x^2$

115. Ratkaise yhtälö täydentämällä neliöksi.

- a) $x^2 - 6x + 9 = 1$
- b) $x^2 + 2x + 4 = 0$
- c) $x^2 - 4x - 7 = 0$
- d) $x^2 + x = \frac{3}{4}$
- e) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

116. Toisen asteen yhtälön vakiotermi on 4 ja sen ratkaisut ovat 2 ja 3. Mikä yhtälö on kyseessä?

117. Ollessaan leirikoulussa Lapissa lukiolaisryhmä saapuu järvelle ja havaitsee, että järven halkaisijan suuntainen maiseman poikkileikkaus on likimain paraabelin $\frac{1}{2500}x^2 - \frac{1}{5}x$ muotoinen, jos x -akseli on vedenpinnan taso ja yksikkönä on metri. Kuinka pitkä matka vastarannalle on?

Lisää tehtäviä

118. Ratkaise yhtälöt käyttämällä tulon nollasääntöä.

- a) $(x^2 - 1)(x - 7) = 0$
- b) $(x^2 - 9)(x^2 - 16) = 0$
- c) $(x - 4) = x(x - 4)$

119. Ratkaise seuraavat yhtälöt.

- a) $x^2 - 9 = 0$
- b) $2x^2 + 8 = 0$
- c) $-x^2 + 11 = -5$
- d) $3 - x^2 = -1 + 3x^2$

120. Ratkaise yhtälöt.

- a) $x^2(4x^2 - 1)^2 = 0$
- b) $-x^4(3x - 1)^2 = 0$

121. Ratkaise seuraavat yhtälöt.

- a) $x^2 - 3x = 0$
- b) $10x + 2x^2 = 0$
- c) $2x^2 - x^3 = 0$
- d) $-3x^2 + 8x = -2x$

122. Elokuvasssa *Dredd* pudotetaan ihmisiä kuolemaan noin 1 kilometrin korkeudesta. Ennen pudotusta heille annetaan huumausainetta, joka hidastaa aikakäsityksen 1 prosenttiin normaalista. Vapaassa pudotuksessa pudotettu matka ajanhetkellä t on $\frac{1}{2}gt^2$, jossa g on putoamiskiihtyvyytenä tunnettu vakio, jolle voimme tässä hyvin käyttää arviota $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

- a) Olettaen, että huumausaineen vaikutus kestää koko putoamisen ajan, kuinka pitkältä aika pudotuksesta kuolemaan **uhrista** tuntuu? (Oleta annetut arvot tarkoiksi ja muodosta relevantti toisen asteen yhtälö.)
- b) ★ Mikä menee fataalistisesti pieleen, jos a-kohdan laskee suoraan kuvalla tavalla?

123. ★ Ratkaise x ja y yhtälöstä $y^2 + 2xy + x^4 - 3x^2 + 4 = 0$.

124. ★ Ratkaise x ja y yhtälöstä $2x^4 + 2y^4 = 4xy - 1$.

3.3 Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava



Opetus.tv: *toisen asteen ratkaisukaava* (9.03, 11.06 ja 10.09)

<http://opetus.tv/maa/maa2/toisen-asteen-yhtalon-ratkaisukaava/>

Edellisessä kappaleessa opittiin, että toisen asteen yhtälö voidaan aina ratkaista täydentämällä se neliöksi. Neliöksi täydentämistä käytetään kuitenkin harvoin, sillä saman ajatuksen voi ilmaista valmiina kaavana. Johdetaan seuraavassa toisen asteen yhtälön ratkaisukaava.

Lähdetään liikkeelle täydellisestä toisen asteen yhtälöstä $ax^2 + bx + c = 0$. Kuten edellisen kappaleen esimerkeissä, haluamme muokata sen muotoon, josta se on helppo täydentää binomin neliöksi. Huomataan binomin neliön muistikaavan sovelluksena, että $(\alpha x + \beta)^2 = \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2$; verrataan tätä toisen asteen yhtälöön:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 &= ? \end{aligned}$$

(Tässä käytetään kreikkalaisia kirjaimia sekaannuksen välttämiseksi, sillä a muistikaavassa $(a + b)^2$ ei välttämättä ole sama kuin toisen asteen yhtälön kerroin a .)

Nähdään että yhtälöt muistuttavat hieman toisiaan. Haluamme kuitenkin toisen asteen yhtälön vasemman puolen samanlaiseen muotoon kuin alemman:

$ax^2 + bx + c = 0$	vähennetään puolittain c
$ax^2 + bx = -c$	kerrotaan puolittain termillä $4a$
$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$	
$(2a)^2x^2 + 4abx = -4ac$	

Nyt voidaan täydentää vasen puoli neliöksi, mistä saadaan esimerkkien tapaan rat-

kaisu x :n suhteen.

$$\begin{aligned}
 (2a)^2 x^2 + 4abx &= -4ac && \text{lisätään puolittain termi } b^2 \\
 (2a)^2 x^2 + 2 \cdot 2a \cdot bx + b^2 &= b^2 - 4ac && \text{neliö: } (2a)^2 x^2 + 2 \cdot 2a \cdot bx + b^2 = (2ax + b)^2 \\
 (2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac && \text{otetaan puolittain neliöjuuri, jos } b^2 - 4ac \geq 0 \\
 2ax + b &= \pm \sqrt{b^2 - 4ac} && \text{vähennetään puolittain termi } b \\
 2ax &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} && \text{jaetaan puolittain termillä } 2a \neq 0 \\
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
 \end{aligned}$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava on siis

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

oletuksella, että $b^2 - 4ac \geq 0$. Oletus tarvitaan, koska negatiivisille luvuille ei ole reaaliluvuilla määriteltyä neliöjuurta.

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava

Yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$, missä $a \neq 0$ ja $b^2 - 4ac \geq 0$, ratkaisut ovat muotoa

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ESIMERKKI 3.66

Ratkaise yhtälö $x^2 - 8x + 16 = 0$.

Ratkaisu. Yhtälö on muodossa $ax^2 + bx + c = 0$:

$$\underbrace{1}_{=a} x^2 + \underbrace{(-8)}_{=b} x + \underbrace{16}_{=c} = 0$$

Sijoitetaan vakioiden $a = 1$, $b = -8$ ja $c = 16$ arvot toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$\begin{aligned}x &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} \\x &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} \\x &= \frac{8 \pm 0}{2} \\x &= 4\end{aligned}$$

Vastaus. $x = 4$

ESIMERKKI 3.67

Ratkaise yhtälö $15x^2 + 24x = -10$.

Ratkaisu. Siirretään kaikki termit samalle puolelle yhtälöä:

$$\underbrace{15}_{=a} x^2 + \underbrace{24}_{=b} x + \underbrace{10}_{=c} = 0$$

Sijoitetaan $a = 15$, $b = 24$ ja $c = 10$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$\begin{aligned}x &= \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 15 \cdot 10}}{2 \cdot 15} \\x &= \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 600}}{30} \\x &= \frac{-24 \pm \sqrt{-24}}{30}\end{aligned}$$

Koska juurettava on negatiivinen ($-24 < 0$), niin yhtälöllä ei ole reaalilukuratkaisuja.

Vastaus. Ei ratkaisua.

ESIMERKKI 3.68

Ratkaise yhtälö $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Ratkaisu. Sijoitetaan $a = 1$, $b = 2$ ja $c = -3$ ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x = -1 \pm 2$$

$$x = -1 + 2 \text{ tai } x = -1 - 2$$

$$x = 1 \text{ tai } x = -3$$

Vastaus. $x = 1$ tai $x = -3$.

ESIMERKKI 3.69

Kahden luvun erotus on 7 ja tulo 330. Mitkä luvut ovat kyseessä?

Ratkaisu. Olkoon pienempi luvuista x , jolloin suurempi on $x + 7$. Saadaan yhtälö

$$x(x + 7) = 330 \quad \parallel - 330$$

$$x^2 + 7x - 330 = 0 \quad \parallel \text{ 2. asteen yhtälön ratkaisukaava}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-330)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{1\,369}}{2} \quad \parallel \sqrt{1\,369} = 37$$

$$x = \frac{-7 \pm 37}{2}$$

$$x = \frac{-7 + 37}{2} \text{ tai } x = \frac{-7 - 37}{2}$$

$$x = 15 \text{ tai } x = -21$$

Koska x oli pienempi alkuperäisistä luvuista, suurempi on $15 + 7 = 22$ tai $-21 + 7 = -14$.

Vastaus. Luvut ovat 15 ja 22 tai -21 ja -14 .

Tehtäviä

Opi perusteet

125. Ratkaise

- a) $x^2 + 6x + 5 = 0$
- b) $x^2 - 2x - 3 = 0$
- c) $2x^2 + 3x + 5 = 0$.

126. Ratkaise

- a) $9x^2 - 12x + 4 = 0$
- b) $2x + x^2 = -4$
- c) $x^2 + 3x = 5$
- d) $3x^2 - 13x + 50 = -2x^2 + 17x + 5$.

127. Ratkaise

- a) $9x^2 - 15x + 6 = 0$
- b) $x^2 + 23x = 0$
- c) $4x^2 - 64 = 0$
- d) $6x^2 + 1 = -18x$.

Hallitse kokonaisuus

128. Ratkaise

- a) $-x^2 + 4x + 7 = 0$
- b) $x^2 - 13x + 1 = 0$
- c) $4x^2 - 3x - 5 = 0$
- d) $\frac{5}{6}x^2 + \frac{4}{7}x - 1 = 0$.

129. Kahden luvun summa on 8 ja tulo 15. Määritä luvut.

130. Suorakulmion muotoisen talon mitat ovat $6,0\text{ m} \times 10,0\text{ m}$. Talon kivijalan ympärille halutaan levittää tasalevyinen sorakerros. Kuinka leveä kerros saadaan, kun soraa riittää 20 m^2 alalle?

131. Jalkapallo potkaistiin ilmaan tasaiselta kentältä. Sivusta katsottuna pallon lentorata oli paraabeli, jonka yhtälö oli muotoa

$$y = -x^2 + 15x - 36,$$

missä x on etäisyys metreinä kenttää pitkin mitattuna ja y korkeus kentän pinnasta. Kuinka pitkän matkan pallon lensi?

132. Ratkaise yhtälö $(4t + 1)x^2 - 8tx + (4t - 1) = 0$ vakion t kaikilla reaaliarvoilla.

133. Viljami sijoittaa 1 000 € korkorahastoon, jossa korko lisätään pääomaan vuosittain. Rahasto perii aina koronmaksun yhteydessä 20 euron vuosittaisen hoitomaksun, joka vähennetään summasta koronlisäyksen jälkeen. Viljami laskee, että hän saisi yhteensä 2,4% lisäyksen pääomaansa kahden vuoden aikana.

- Mikä on rahaston korkoprosentti? Ilmoita tarkka arvo ja likiarvo mielekkäällä tarkkuudella.
- Paljonko rahaa Viljamin pitäisi sijoittaa, että hänen sijoituksensa kasvaisi yhteensä 5,0% kahden vuoden aikana?

134. Kun kappaleen kiihtyvyys a on vakio, pätee $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ ja $v = v_0 + at$, missä x on kuljettu matka, v_0 alkunopeus, v loppunopeus ja t aika.

- Kivi heitetään suoraan alas Olympiastadionin tornista (korkeus 72 metriä) nopeudella 3,0 m/s. Kuinka monen sekunnin kuluttua kivi osuu maahan? Putoamiskiihtyvyys on noin 10 m/s²
- Bussin nopeus on 20 m/s. Bussi pysähtyy jarruttamalla tasaisesti. Se pysähtyy 10 sekunnissa. Laske jarrutusmatka.

135. Johda neliöksi täydentämällä ratkaisukaava yhtälölle

$$x^2 + px + q = 0.$$

Tarkista sijoittamalla tavanomaiseen ratkaisukaavaan.

136. On olemassa viisi peräkkäistä positiivista kokonaislukua, joista kolmen ensimmäisen neliöiden summa on yhtä suuri kuin kahden jälkimmäisen neliöiden summa. Mitkä luvut ovat kyseessä?

Lisää tehtäviä

137. Ratkaise yhtälöt.

- $x^2 + 3x + 2 = 0$
- $2x^2 + 5x - 12 = 0$
- $3x^2 - 7x - 20 = 0$
- $x^2 + 3x - 5 = 0$
- $x^2 + 5x - 24 = 0$

138. Ratkaise yhtälöt.

- $x^2 + 3x - 5 = 4x + 8$
- $8x^2 - 5x + 1 = -36$
- $-3x^2 - 4x + 2 = -5x^2 + 3$
- $-3x^2 + 4x + 13 = -5x^2 + 10x + 9$

139. Ratkaise

- $-\frac{5}{7}x^2 + \frac{4}{11}x - \frac{1}{2} = 0$
- $\frac{2}{3}x^2 - \frac{18}{5}x + \frac{3}{10} = 0$

140. Neliön muotoisen taulun sivu on 36 cm. Taululle tehdään tasalevyinen kehys, jonka nurkat on pyöristetty neljännesympyrän muotoisiksi. Kuinka leveä kehys on, kun sen pinta-ala on puolet taulun pinta-alasta? Ympyrän pinta-ala on πr^2 .

141. (K93/T5) Ratkaise yhtälö $\frac{2x+a^2-3a}{x-1} = a$ vakion a kaikilla reaaliarvoilla.

142. Kultaisessa leikkauksessa jana on jaettu siten, että pidemmän osan suhde lyhyempään on sama kuin koko janan suhde pidempään osaan. Tämä suhde ei riipu koko janan pituudesta ja sitä merkitään yleensä kreikkalaisella aakkosella φ eli φ . Kulusta leikkausta on taiteessa kautta aikojen pidetty ”jumalallisena suhteena”.

- a) Laske kultaiseen leikkauksen suhteen φ tarkka arvo ja likiarvo.
- b) Napa jakaa ihmisvartalon pituussuunnassa suunnilleen kultaisen leikkauksen suhteessa. Millä korkeudella napa on 170 cm pitkällä ihmisellä?

143. (K96/T2b) Yhtälössä $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ korvataan luku a luvulla $a + 1$. Miten muuttuvat yhtälön juuret?

144. Ratkaise yhtälö $x - 3 = \frac{1}{x}$.

145. ★ Ratkaise yhtälö $(x^3 - 2)^2 + x^3 - 2 = 2$.

146. ★ Ratkaise yhtälö $(x^2 - 2)^6 = (x^2 + 4x + 4)^3$.

3.4 Diskriminantti



Opetus.tv: *diskriminantti 2. asteen yhtälölle* (7.56 ja 8.30)

<http://opetus.tv/maa/maa2/diskriminantti/>

ESIMERKKI 3.70

Ratkaistaan toisen asteen yhtälö $3x^2 - 5x + 10 = 0$.

Sijoitetaan $a = 3$, $b = -5$ ja $c = 10$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10}}{2 \cdot 3}$$

$$x = -\frac{5 \pm \sqrt{25 - 120}}{6}$$

$$x = -\frac{5 \pm \sqrt{-95}}{6}$$

Koska juurettava on negatiivinen, yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

Edellisen esimerkin tulokseen päästäisiin nopeamminkin. Koska ratkaisukaavassa esiintyvä lauseke $b^2 - 4ac$ on negatiivinen, ratkaisua ei ole.

Lauseketta $b^2 - 4ac$ kutsutaan **diskriminantiksi**. Sen arvo kertoo yhtälön ratkaisujen lukumäärän. Jos $D < 0$, ratkaisuja ei ole, sillä negatiivisella luvulla ei ole neliöjuurta. Jos $D = 0$, neliöjuuren arvoksikin tulee 0 ja ratkaisuja saadaan vain yksi ($\pm 0 = 0$). Jos $D > 0$, neliöjuuri saa positiivisen arvon ja ratkaisuja on kaksi.

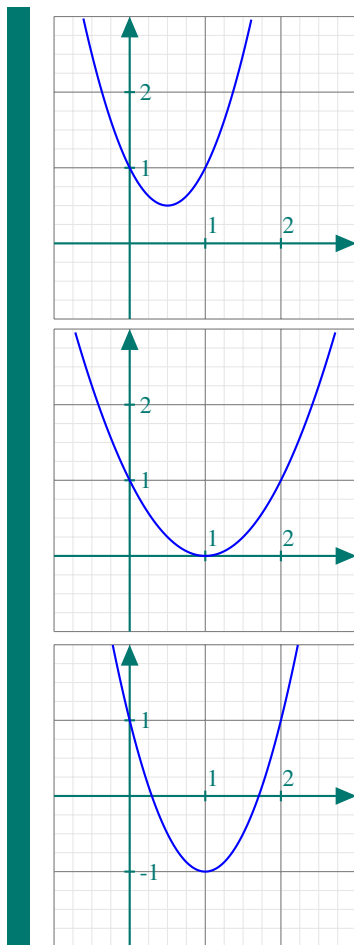
Diskriminantin avulla voidaan siis tutkia yhtälön ratkaisujen lukumäärää ilman että yhtälöä tarvitsee ratkaista.

Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisujen lukumäärä voidaan laskea diskriminantin $D = b^2 - 4ac$ avulla seuraavasti:

- Jos $D < 0$, yhtälöllä ei ole reaalisia ratkaisuja.
- Jos $D = 0$, yhtälöllä on tasan yksi reaalinen ratkaisu.
- Jos $D > 0$, yhtälöllä on kaksi erisuurta reaaliratkaisua.

Tapauksessa $D = 0$ yhtälön ainoa ratkaisua kutsutaan sen **kaksoisjuureksi**.

ESIMERKKI 3.71



$$2x^2 - 2x + 1 = 0:$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 4 - 8 = -4, \text{ eli}$$

$D < 0$. Ei reaalisia ratkaisuja.

$$x^2 - 2x + 1 = 0:$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0, \text{ eli}$$

$D = 0$. Yksi reaaliratkaisu.

$$2x^2 - 4x + 1 = 0:$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 16 - 8 = 8, \text{ eli}$$

$D > 0$. Kaksi eri reaaliratkaisua.

ESIMERKKI 3.72

Selvitetään, onko yhtälöllä $x^2 + x + 2 = 0$ ratkaisuja.

Tutkitaan diskriminanttia.

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7$$

Koska $D < 0$, yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

Jos yhtälön ratkaisemista yrittäisi ratkaisukaavan avulla, tulisi neliöjuuren alle negatiivinen luku.

ESIMERKKI 3.73

Millä k :n arvolla yhtälöllä $9x^2 + kx + 1$ on tasan yksi ratkaisu?

Jotta ratkaisuja olisi tasan yksi, on diskriminantin oltava 0.

$$D = 0$$

$$k^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$$

$$k^2 - 36 = 0$$

$$k^2 = 36$$

$$k = \pm 6$$

Yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu, kun $k = -6$ tai $k = 6$.

Tehtäviä

Opi perusteet

147. Laske diskriminanttien arvot. Kuinka monta ratkaisua yhtälöillä on?

- a) $3x^2 + 4x + 1 = 0$
- b) $x^2 + 2x + 5 = 0$
- c) $3x^2 - 6x + 3 = 0$
- d) $x^2 - 7x - 40 = 0$

148. Kuinka monta ratkaisua yhtälöillä on?

- a) $12x^2 + 12x - 4 = 0$
- b) $12x^2 + 12x + 4 = 0$

149. Tulkitse polynomifunktion lauseketta: Onko kyseessä ylös- vai alas-päin aukeava paraabeli? Kuinka monta nollakohtaa funktiolla on?

- a) $P(x) = -3x^2 + 9x - 5$
- b) $Q(y) = 5y^2 - 2y + 1$
- c) $R(z) = z^2 - 7z - 40$
- d) $S(w) = 3w^2 - 6w + 3$

150. Millä luvuilla c yhtälöllä $x^2 + 5x + c = 0$ ei ole ratkaisua?

Hallitse kokonaisuus

151. Kuinka monta ratkaisua yhtälöillä on?

- a) $10x^2 - 8x - 35 = 14x - 10$
- b) $-6x^2 + 15x - 59 = 5x + 17$
- c) $3x^2 + 7x = 2x^2 + x - 9$

152. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $(2a - 1)x^2 + (a + 1)x + 3 = 0$ on täsmälleen yksi juuri?

153. Osoita, että polynomi $-2x^2 + 6x - 6$ saa vain negatiivisia arvoja.

154. Mitä voit sanoa ratkaisujen lukumäärästä vaillinaisten yhtälöiden $ax^2 + c = 0$ ja $ax^2 + bx = 0$ tapauksessa? Oletetaan, että $a, b, c \neq 0$.

Lisää tehtäviä

155. Kuinka monta ratkaisua yhtälöillä on?

- a) $9x^2 + 12x - 4 = 0$
- b) $5x^2 + 4x - 10 = 0$
- c) $3x^2 - 12x + 12 = 0$
- d) $5x^2 + 10x - 30 = 0$

156. Millä vakion k arvoilla yhtälöllä $-x^2 - x - k = 0$ on ratkaisuja?

157. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $ax^2 + x = ax - 5$ on täsmälleen yksi ratkaisu?

158. Kuinka monta ratkaisua yhtälöillä on vakion a eri arvoilla?

a) $x^2 + 6x + a + 1 = 0$

b) $ax^2 + 4x - 1 = 0$

159. ★ Osoita, että diskriminantti on 0 jos ja vain jos yhtälö voidaan esittää muodossa

$(c_1x + c_2)^2 = 0$, missä c_1 ja c_2 ovat reaalilukuja.

3.5 Toisen asteen epäyhtälö



Opetus.tv: *toisen asteen epäyhtälö* (9.20 ja 10.19)

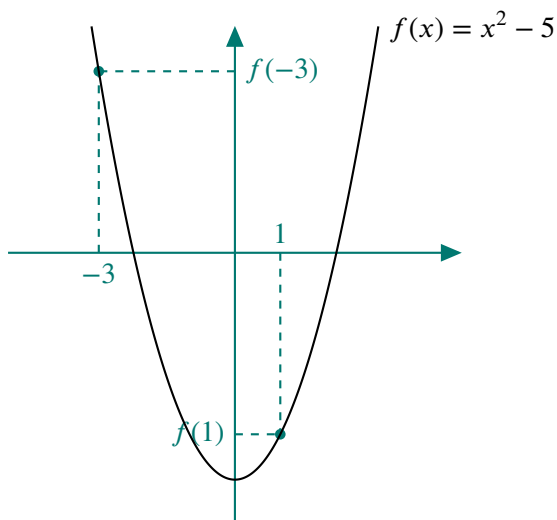
<http://opetus.tv/maa/maa2/toisen-asteen-epayhtalo/>

Toisen asteen epäyhtälön voi ratkaista tutkimalla toisen asteen polynomin kulkua.

ESIMERKKI 3.74

Ratkaise epäyhtälö $x^2 - 5 > 0$.

Ratkaisu: Tarkastellaan polynomifunktiota $f(x) = x^2 - 5$. Tehtävänanto voidaan nyt muotoilla uudelleen. On selvitettävä, millä muuttujan x arvoilla polynomifunktion $f(x) = x^2 - 5$ arvot ovat positiivisia.



- Funktion arvot ovat positiivisia, kun funktion kuvaaja on x -akselin yläpuolella.
- Funktion arvot ovat negatiivisia, kun funktion kuvaaja on x -akselin alapuolella.

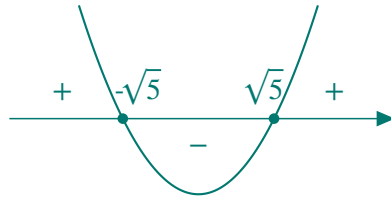
Kahden vierekkäisen nollakohdan välissä funktion kuvaaja on joko kokonaan

x -akselin alapuolella tai kokonaan x -akselin yläpuolella. Tällöin funktion arvot ovat aina joko pelkästään positiivisia tai pelkästään negatiivisia.

Funktion käyttäytymisestä saadaan siis paljon tietoa etsimällä sen nollakohdat:

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\x^2 - 5 &= 0 \\x^2 &= 5 \\x &= \pm\sqrt{5}\end{aligned}$$

Nyt tiedetään, että funktio leikkaa x -akselin kohdissa $x = -\sqrt{5}$ ja $x = \sqrt{5}$. Kuvasta nähdään, että funktion kuvaaja on x -akselin yläpuolella, kun $x < -\sqrt{5}$ tai $x > \sqrt{5}$. Siten funktion arvot ovat positiivisia, kun $x < -\sqrt{5}$ tai $x > \sqrt{5}$.



Vastaus: $x < -\sqrt{5}$ tai $x > \sqrt{5}$.

Toisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ arvot voivat vaihtaa merkkiään vain funktion nollakohdissa. Jos halutaan tietää, milloin toisen asteen polynomifunktion arvot ovat positiivisia tai negatiivisia, niin

1. Ratkaistaan funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ nollakohdat eli etsitään ne muuttujan x arvot, joilla $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Hahmotellaan funktion kuvaajan aukeamissuunta ja merkitään kuvaajaan funktion nollakohdat.
3. Päättellään hahmotelmasta milloin funktion arvot ovat positiivisia ja milloin negatiivisia.

Toisen asteen epäyhtälöitä voi toki ratkaista myös ilman paraabelien ominaisuuksiin vetoamista, mutta se ei ole sen helpompaa. Tästä lisää luvussa ??.

ESIMERKKI 3.75

Ratkaise epäyhtälö $x^2 - 6 < -5x$.

Ratkaisu: Muutetaan ensin epäyhtälö muotoon $x^2 + 5x - 6 < 0$ lisäämällä

molemmille puolille termi $5x$. Nyt tehtävä voidaan ratkaista tutkimalla, millä muuttujan arvoilla funktion $f(x) = x^2 + 5x - 6$ arvot ovat negatiivisia.

1. Ratkaistaan polynomifunktion $f(x) = x^2 + 5x - 6$ nollakohdat.

$$f(x) = 0$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

|| 2. asteen yhtälön ratkaisukaava

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

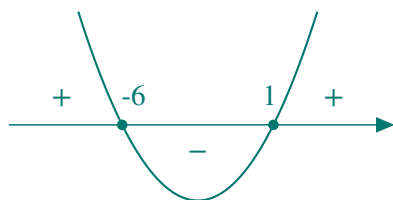
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{2}$$

$$x = -6 \text{ tai } x = 1$$

2. Hahmotellaan polynomifunktion kuvaaja. Se aukeaa ylöspäin, koska toisen asteen termin x^2 kerroin on positiivinen.



3. Kuvaajasta voidaan päätellä, että $f(x) < 0$, kun $-6 < x < 1$.

Vastaus. Alkuperäinen epäyhtälö toteutuu, kun $-6 < x < 1$.

ESIMERKKI 3.76

Ratkaise epäyhtälö $5x^2 + 13x + 3 < 0$.

Ratkaisu:

Tutkitaan funktiota $f(x) = 5x^2 + 13x + 3$. Nyt on selvitettävä, millä muuttujan x arvoilla funktion arvot ovat negatiivisia.

1. Ratkaistaan funktion nollakohdat, jotta tiedetään, missä kohdissa kuvaaja

leikkaa x -akselin.

$$f(x) = 0$$

$$5x^2 + 13x + 3 = 0$$

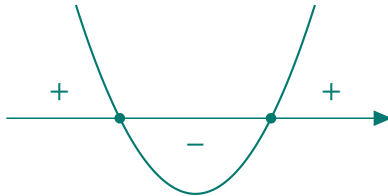
|| 2. asteen yhtälön ratkaisukaava

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3}}{2 \cdot 5}$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 60}}{10}$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{109}}{10}$$

2. Hahmotellaan funktion kuvaaja. Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin 5 on positiivinen.



3. Kuvaajasta voidaan päätellä, että $f(x) < 0$, kun $\frac{-13-\sqrt{109}}{10} < x < \frac{-13+\sqrt{109}}{10}$.

Vastaus: $\frac{-13-\sqrt{109}}{10} < x < \frac{-13+\sqrt{109}}{10}$

ESIMERKKI 3.77

Mikko rakentaa suorakulmion muotoista kaniaitausta lemmikkikanilleen. Aitaus rajoittuu yhdeltä sivulta Mikon taloon. Hänellä on yhteensä 14 metriä kaniverkkoa. Miten Mikon pitää valita aitauksensa mitat, jotta kaniaitauksen koko on vähintään 12 neliömetriä?

Ratkaisu

Olkoon talon suuntaisen sivun pituus y ja kahden päätysivun pituus x . Koska tiedämme, että $x + x + y = 14$, saadaan tästä ratkaistua talon suuntaisen sivun pituudeksi $y = 14 - 2x$. Aitauksen pinta-alaa kuvaa funktio $A(x) = x(14 - 2x) = 14x - 2x^2 = -2x^2 - 14x$. Halutaan, että $A(x) > 12$, josta saadaan epäyhtälö $-2x^2 + 14x > 12$. Tämä epäyhtälö saadaan vielä muotoon $-2x^2 + 14x - 12 > 0$.

Nyt ratkaistavana on epäyhtälö $-2x^2 + 14x - 12 > 0$. Tutkitaan funktiota

$f(x) = -2x^2 + 14x - 12$ ja selvitetään, milloin sen arvot ovat positiivisia.

Selvitetään ensin funktion nollakohdat:

$$-2x^2 + 14x - 12 = 0$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-12)}}{2 \cdot (-2)}$$

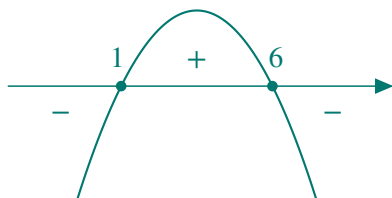
$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 96}}{-4}$$

$$x = \frac{-14 \pm 10}{-4}$$

$$x = \frac{-24}{-4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-4}{-4}$$

$$x = 6 \quad \text{tai} \quad x = 1$$

Hahmotellaan sitten funktion $f(x) = -2x^2 + 14x - 12$ kuvaaja. Koska 2. asteen termin kerroin -2 on negatiivinen, on kyseessä alaspäin aukeava paraabeli. Hahmotellaan sen kuvaaja:



Kuvasta nähdään, että funktion arvot ovat positiivisia, kun $1 < x < 6$. Siten epäyhtälö $-2x^2 + 14x - 12$ toteutuu, kun $1 < x < 6$. Tämä tarkoittaa, että aitauksen ala on suurempi kuin 12 neliömetriä, kun $1 < x < 6$.

Vastaus: Olkoon y aitauksen talonsuuntainen sivun ja x päätysivun pituus. Tällöin $1 < x < 6$ ja $y = 14 - 2x$. Toisin sanottuna, Mikko valitsee päätysivun pituudeksi (x) jotakin väliltä 1-6 m, jolloin talonsuuntaisen sivun pituus (y) metreinä saadaan sijoittamalla x lausekkeeseen $y = 14 - 2x$.

Tehtäviä

Opi perusteet

160. Ratkaise seuraavat epäyhtälöt.

- a) $x^2 - 4 < 0$
- b) $x^2 + x \geq 0$
- c) $x^2 + 1 < 0$
- d) $x^2 + 5x + 6 > 0$

161. Ratkaise seuraavat epäyhtälöt.

- a) $-x^2 + 5x + 8 > 0$
- b) $-2x^2 + 6x + 9 > 0$
- c) $4x^2 - 8x - 72 < 0$

162. Ratkaise seuraavat epäyhtälöt.

- a) $4x^2 + 13x \geq 0$
- b) $4x^2 - 776 \geq 0$
- c) $7x^2 - 8x \leq 0$
- d) $11x^2 - 12 \leq 0$

Hallitse kokonaisuus

163. Tutki, millä muuttujan x arvoilla seuraavat funktiot saavat positiivisia arvoja.

- a) $f(x) = x^2 - 4$
- b) $g(x) = -x^2 - 2x + 3$
- c) $h(x) = x^2 + 2x + 5$
- d) $i(x) = -x^2 - 1$

164. (K93/T3b) Autoilijan työmatkan kesto t riippuu liikennevirrasta m kaavan $t = 0,01m^2 + 0,03m + 18$ mukaisesti, missä t on ajoaika minuutteina ja m liikenteen mittauspisteen minuutissa ohittavien autojen määrä. Kuinka suuri saa liikennevirta enintään olla, jotta autoilijan työmatka kestäisi enintään puoli tuntia?

165. Osoita, että funktio $f(x) = x^2 - 6x + 10$ saa vain positiivisia arvoja.

166. Millä vakion t arvoilla yhtälöllä $6x^2 + 2tx + 2t = 0$ on kaksi juurta?

167. Jäätelökioskin päivittäiset kiinteät kulut ovat 400 euroa. Jokainen jäätelö maksaa kauppiaalle 0,50 euroa. Kun jäätelön myyntihinta on x euroa, sitä myydään $1\,000 - 200x$ kappaletta.

- a) Millä myyntihinnoilla jäätelön myynti on kannattavaa?
- b) Millä myyntihinnalla saadaan suurin tuotto? Kuinka suuri?

168. Ratkaise epäyhtälö $ax^2 + (a + 1)x + 1 > 0$ vapaan parametrin a funktiona.

169. Ratkaise seuraava epäyhtälö:

$$p + (3 - (2p - 6))^2 < \frac{2 + 9p}{3}(22 + 2)$$

Lisää tehtäviä

170. Ilmaan heitetyn pallon korkeus metreinä on $h = 20t - 5t^2$, missä t on aika sekunteina. Kuinka kauan pallo on yli 10 metrin korkeudella maasta?

171. Millä vakion r arvoilla yhtälöllä $rx^2 - rx - 1 = 0$ ei ole ratkaisua?

172. Ratkaise epäyhtälö $a^2x^2 + ax - 2 \geq 0$ vapaan parametrin a funktiona.

3.6 Polynomin jakaminen tekijöihin

3.6.1 POLYNOMIEN JAKOLAUSE



Opetus.tv: *polynomin jakaminen tekijöihin nollakohtiensa avulla* (6.48)

<http://opetus.tv/maa/maa2/polynomi-tekijoihin-nollakohtien-avulla/>

Polynomin $P(x) = (x - 2)(x - 3)$ nollakohdat ovat tulon nollasäännön nojalla $x = 2$ ja $x = 3$. Nollakohdat voi siis nähdä tekijöihin jaetusta polynomista suoraan. Tämä yhteys toimii myös toisin päin: nollakohtien avulla voi selvittää polynomin tekijät.

Yleisesti on voimassa polynomien jakolause:

Polynomien jakolause

Jos $x = b$ on polynomin nollakohta, $x - b$ on polynomin tekijä.

Polynomien jakolauseen todistus jätetään kurssiin 12.

ESIMERKKI 3.78

Jaa tekijöihin polynomi $P(x) = x^2 - 3x + 2$.

Ratkaisu. Ratkaistaan ensin polynomin nollakohdat.

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x = 1 \text{ tai } x = 2.$$

Nollakohtien perusteella $(x - 1)$ ja $(x - 2)$ ovat polynomin $P(x)$ tekijöitä.

Tarkistetaan: $(x - 1)(x - 2) = x^2 - 2x - x + 2 = x^2 - 3x + 2$.

■ **Vastaus.** $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Ensimmäisen asteen tekijöiden lisäksi saatetaan tarvita vakiokerroin:

ESIMERKKI 3.79

Jaa polynomi $-2x^2 - x + 1$ tekijöihinsä.

Ratkaisu. Ratkaistaan nollakohdat:

$$-2x^2 - x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-4}$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{-4}$$

$$x = -1 \text{ tai } x = \frac{1}{2}.$$

Jakolauseen mukaan $(x - \frac{1}{2})$ ja $(x - (-1))$ eli $(x + 1)$ ovat kyseisen polynomin tekijöitä. Ne keskenään kertomalla ei kuitenkaan saada oikeaa tulosta:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Puuttuu vielä korkeimman asteen termin kerroin -2 . Sillä kertomalla saadaan alkuperäinen polynomi: $-2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1) = -2x^2 - x + 1$.

Vastaus. $-2x^2 - x + 1 = -2(x - \frac{1}{2})(x + 1)$.

Toisen asteen polynomin tekijät Polynomien jakolauseen mukaan

Jos toisen asteen polynomin $ax^2 + bx + c$ nollakohdat ovat x_1 ja x_2 ,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Huomaa, että kerroin a on edellisessä yhtälössä kummallakin puolella sama. (Muuten korkeimman asteen termit eivät täsmää.)

ESIMERKKI 3.80

Jaetaan tekijöihin $P(x) = 2x^2 + 4x - 30$.

Ratkaistaan nollakohdat yhtälöstä

$$2x^2 + 4x - 30 = 0$$

toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Nollakohdat ovat $x_1 = 3$ ja $x_2 = -5$.

Saadaan siis

$$P(x) = 2(x - 3)(x - (-5)) = 2(x - 3)(x + 5).$$

ESIMERKKI 3.81

Toisen asteen polynomin P nollakohdat ovat $x = 1$ ja $x = 3$. Lisäksi $P(2) = 3$. Määritä $P(x)$.

Ratkaisu. Koska polynomin nollakohdat ovat $x_1 = 1$ ja $x_2 = 3$, polynomi on muotoa

$$P(x) = a(x - 1)(x - 3).$$

Lisäksi tiedetään $P(2) = 3$, joten saadaan

$$P(2) = a(2 - 1)(2 - 3) = 3$$

$$a \cdot 1 \cdot (-1) = 3 \qquad \| \quad : (-1)$$

$$a = -3.$$

Vastaus. $P(x) = -3(x - 1)(x - 3)$.

Jos toisen asteen polynomilla on vain yksi nollakohta, kyseessä on niin sanottu kaksinkertainen juuri. Voidaan tulkita, että nollakohdat x_1 ja x_2 ovat yhtäsuuret. Tällöin tekijöiksi saadaan $a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$.

ESIMERKKI 3.82

Jaa tekijöihin $P(x) = 2x^2 - 4x + 2$.

Ratkaisu. Ratkaistaan nollakohdat:

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{4 \pm 0}{4} = 1.$$

Yhtälöllä on vain yksi ratkaisu, joten se on kaksoisjuuri. Polynomi voidaan siis jakaa tekijöihin seuraavasti:

$$P(x) = 2(x - 1)(x - 1) = 2(x - 1)^2.$$

Vastaus. $P(x) = 2(x - 1)^2$.

Jos toisen asteen polynomilla ei ole nollakohtia, sitä ei voi jakaa ensimmäisen asteen tekijöihin. (Sillä ensimmäisen asteen tekijällä on aina nollakohta.) Esimerkiksi polynomia

$$x^2 + 4$$

ei voi jakaa tekijöihin.

Tehtäviä

Opi perusteet

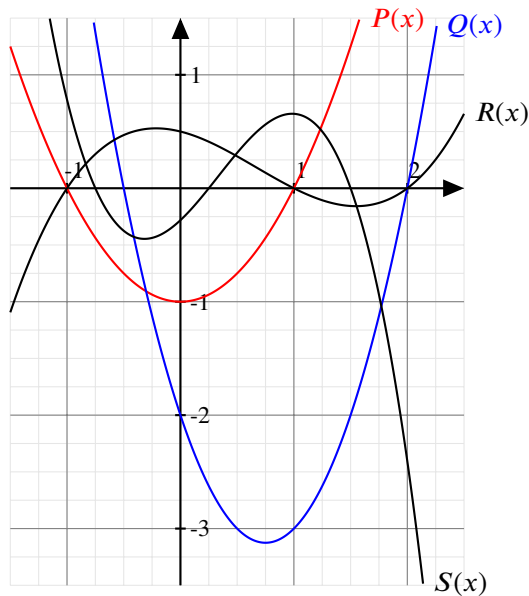
173. Ratkaise yhtälöt, ja jaa vastaavat polynomifunktiot (joiden nollakohdat olet juuri laskenut) tekijöihinsä.

- a) $x^2 + 6x - 6 = 0$
- b) $-8x^2 + 10x - 2 = 0$
- c) $x^2 - 4x + 4 = 0$

174. Jaa tekijöihin

- a) $x^2 - 2x - 15$
- b) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$
- c) $4x^2 + 2x + 2$

175. Millä seuraavista polynomeista on yhteisiä tekijöitä?



Hallitse kokonaisuus

176. Jaa tekijöihin helpoimmalla tavalla

- a) $x^2 - 9$
- b) $4x^2 - 4x + 1$
- c) $4x^2 - 4x - 8$

177. Toisen asteen polynomille P pätee $P(-3) = P(4) = 0$ ja $P(1) = 12$. Ratkaise $P(x)$.

178. Osoita, että jos toisen asteen polynomin toisen asteen termin kerroin on 1, niin sen vakiotermi on yhtä suuri kuin sen nollakohtien tulo.

179. Toisen asteen polynomille P pätee $P(0) = P(5) = 3$ ja $P(3) = -27$. Ratkaise $P(x)$.

180. Paraabelin kuvaajia katsomalla voidaan huomata, että paraabelin huippu löytyy aina nollakohtien puolivälistä. (Tarkempi perustelu saadaan esimerkiksi kurssilla MAA4.) Symmetrian nojalla huipun x -koordinaatti on siis nollakohtien x -koordinaattien keskiarvo.

- a) Etsi paraabelin $-10x^2 + 5x + 5$ huipun x - ja y -koordinaatit.
- b) Johda lauseke yleisen paraabelin $ax^2 + bx + c$ huipun x -koordinaatille.

Lisää tehtäviä

181. Jaa tekijöihin.

- a) $4x^2 + 4x + 1$
- b) $4x^2 + 4x + 4$
- c) $9 - x^2$

182. Jaa tekijöihin.

- a) $x^2 - x - 6$
- b) $(x - 4)^2 - 9$

183. Jaa tekijöihin

- a) $5x^2 + 10x - 15$
- b) $12x^2 - 10x + 2$
- c) $-8x^2 + 8x + 6$

184. Jaa tekijöihin

- a) $-10x^2 + 5x + 5$
- b) $8x^3 - 12x^2 + 4x$

185. Kolmannen asteen polynomille P pätee $P(-1) = P(2) = P(3) = 0$ ja $P(1) = -8$. Ratkaise $P(x)$.

186. Määritä toisen asteen yhtälö jonka juuret ovat yhtälön $x^2 + 7x + 49 = 0$

- a) juurien käänteisluvut
- b) juurien neliöiden käänteisluvut

187. ★ Tutki, onko seuraava väite totta vai ei: Jos polynomilla on nollakohta $x = 1$, sen kerrointen summa on 0.

188. ★ P on toisen asteen polynomi, jonka vakiotermi on 1. Polynomi Q määritellään lausekkeella $Q(x) = P(x + 1) - P(x)$ ja siitä tiedetään, että $Q(0) = 7$ ja $Q(1) = 13$. Määritä polynomin P lauseke.

LUKU 4

Korkeampi aste

4.1 Korkeamman asteen polynomifunktio



Opetus.tv: *N-asteinen polynomifunktio* (10.40)

<http://opetus.tv/maa/maa2/n-asteinen-polynomifunktio/>

Kaikki toisen asteen polynomien kuvaajat ovat aina paraabelejä, mutta korkeamman asteen polynomien kuvaajissa on enemmän vaihtelua. Yleisesti pätee kuitenkin seuraava tulos:

Polynomien ominaisuuksia

- Asteen n polynomilla on korkeintaan n nollakohtaa.
- Jos polynomin aste on pariton, sillä on vähintään yksi nollakohta.

Todistetaan näistä ensimmäinen tulos:

Todistus. Jos n asteen polynomilla P olisi yli n eri nollakohtaa, sillä olisi yli n ensimmäisen asteen tekijää. Polynomin P aste olisi siis yli n , mikä on ristiriita. Nollakohtia on siis korkeintaan n . $\square$

Toista tulosta ei todisteta tässä täsmällisesti, mutta valoitetaan asiaa esimerkin kautta. Tutkitaan esimerkiksi polynomia

$$P(x) = x^3 + bx^2 + cx + d.$$

Polynomia on käteväntä tarkastella muodossa, jossa x^3 on otettu yhteiseksi tekijäksi:

$$P(x) = x^3 \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{d}{x^3} \right)$$

Kun x on hyvin suuri positiivinen tai hyvin pieni negatiivinen luku, termit $\frac{b}{x}$, $\frac{c}{x^2}$ ja $\frac{d}{x^3}$ ovat hyvin pieniä, eli

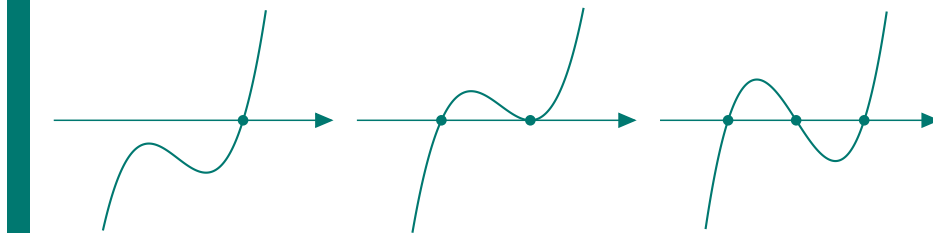
$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 \left(1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^3} \right) \\ &\approx x^3 (1 + 0 + 0 + 0) = x^3 \end{aligned}$$

Voidaan siis päätellä, että riippumatta kertoimista b , c , d polynomin P arvo on positiivinen, kun x on suuri positiivinen luku ja negatiivinen, kun x on pieni negatiivinen luku.

Koska P saa sekä positiivisia että negatiivia arvoja, sillä on jossakin niiden välissä nollakohta. (Tämän takaa jatkuvuus, josta lisää kurssilla 7.) Esimerkin mukaisilla kolmannen asteen polynomeilla on siis aina nollakohta. Yleisesti pätee, että kaikilla paritonasteisille polynomeilla on ainakin yksi nollakohta.

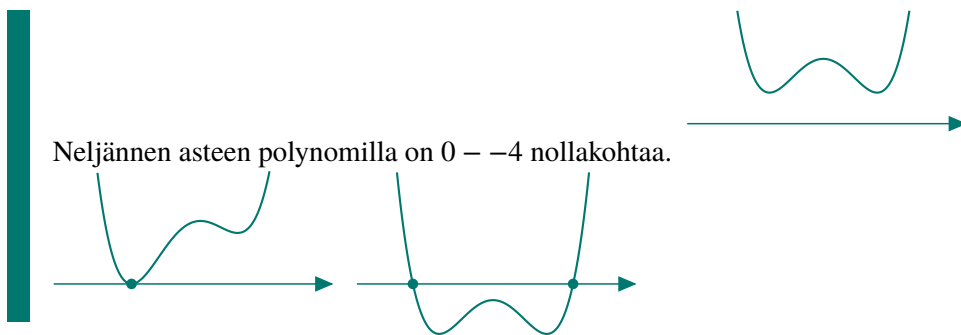
ESIMERKKI 4.83

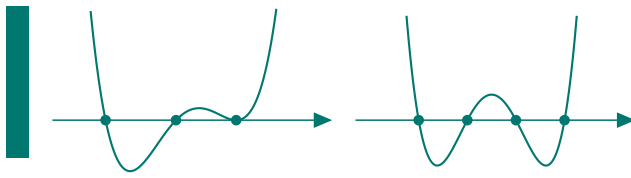
Kolmannen asteen polynomilla on 1–3 nollakohtaa.



ESIMERKKI 4.84

Neljännän asteen polynomilla on 0 – 4 nollakohtaa.





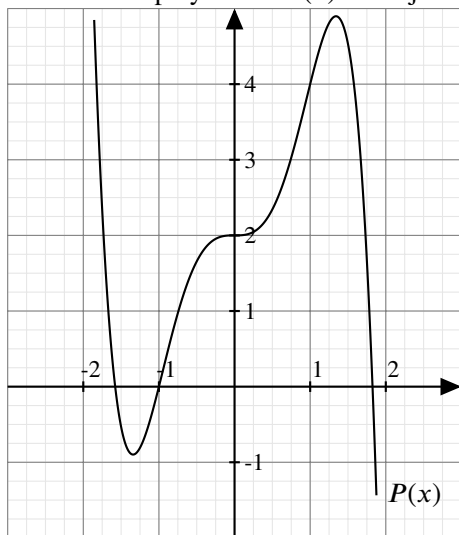
Tehtäviä

Opi perusteet

189. Anna esimerkki

- a) neljännen asteen polynomista, jolla on neljä nollakohtaa
- b) kolmannen asteen polynomista, jolla on kaksi nollakohtaa
- c) neljännen asteen polynomista, jolla on yksi nollakohta
- d) neljännen asteen polynomista, jolla ei ole nollakohtia

190. Alla on polynomin $P(x)$ kuvaaja.



Kaikki polynomin nollakohdat näkyvät kuvaajassa.

- a) Mitä voidaan sanoa polynomin P asteesta?
- b) Mikä on polynomin P vakiotermi?

Hallitse kokonaisuus

191. Mikä on se kolmannen asteen polynomi, jonka nollakohdat ovat $x = 2$, $x = -1$ ja $x = 3$, ja jonka vakiotermi on 3?

192. Kolmannen asteen polynomille P pätee $P(1) = P(2) = P(3) = -2$ ja $P(0) = 16$. Ratkaise $P(x)$.

193. ★ Osoita, että jos n asteen polynomeilla $P(x)$ ja $Q(x)$ on $n + 1$ yhteistä pistettä, ne ovat sama polynomi.

4.2 Korkeamman asteen yhtälöt



Opetus.tv: *N-asteinen polynomi yhtälö* (8.38, 6.20 ja 15.53)

<http://opetus.tv/maa/maa2/n-asteinen-polynomi yhtalo/>

Jos toisen asteen polynomi yhtälöllä on reaali lukuratkaisuja, ne löytyvät ratkaisukaavalla. Myös kolmannen ja neljännen asteen yhtälöille on olemassa ratkaisukaavat. Ne ovat kuitenkin niin monimutkaisia, että ne eivät juuri sovellu käsin laskettaviksi, eikä niitä siksi esitellä tässä. Korkeamman kuin neljännen asteen yhtälöille sen sijaan ei edes ole olemassa yleistä ratkaisukaavaa. Tämän osoitti norjalainen matemaatikko Niels Henrik Abel vuonna 1823.

Korkeamman kuin toisen asteen yhtälöt ratkaistaan käytännössä yleensä tietokoneen avulla. Niille yhtälöille, joille ei ole ratkaisukaavaa, ratkaiseminen onnistuu vain numeerisesti eli likiarvoja käyttäen. Joissain erikoistapauksissa korkeamman asteen yhtälön ratkaiseminen onnistuu nopeasti myös käsin. Seuraavassa tarkastellaan tällaisia yksinkertaisia erikoistapauksia.

4.2.1 POTENSSIYHTÄLÖ

Jos yhtälössä esiintyy vain yhtä muuttujan x potenssia, yhtälö ratkeaa lopulta potenssi vastaavan juuren avulla.

ESIMERKKI 4.85

Ratkaise yhtälö $x^5 + 7 = 0$.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}x^5 + 7 &= 0 & \parallel & -7 \\x^5 &= -7 & \parallel & \sqrt[5]{} \\x &= \sqrt[5]{-7} \\x &= -\sqrt[5]{7}\end{aligned}$$

Vastaus. $x = -\sqrt[5]{7}$.

4.2.2 TEKIJÖIHINJAKO

Polynomiyhtälöitä voidaan toisinaan ratkaista jakamalla polynomi tekijöihin.

ESIMERKKI 4.86

Ratkaise yhtälö $x^3 - 3x^2 + x = 0$.

Ratkaisu. Polynomissa $x^3 - 3x^2 + x$ ei ole vakiotermiä. Voidaan siis ottaa yhteiseksi tekijäksi x , jolloin polynomi tulee muotoon $x(x^2 - 3x + 1)$. Nyt yhtälön ratkaiseminen voidaan aloittaa soveltamalla tulon nollasääntöä:

$$\begin{aligned}x^3 - 3x^2 + x &= 0 \\x(x^2 - 3x + 1) &= 0 \\x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 3x + 1 &= 0\end{aligned}$$

Jäljelle jäävään toisen asteen yhtälöön $x^2 - 3x + 1 = 0$ voidaan käyttää ratkaisukaavaa:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Vastaus. $x = 0$ tai $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Jos polynomi siis osataan jakaa tekijöihin, yhtälön voi ratkaista tulon nollasäännön avulla. Sopiva tekijöihinjako voi kuitenkin olla vaikea löytää. Tarkastellaan vielä toista esimerkkiä.

ESIMERKKI 4.87

Ratkaise yhtälö $x^3 - 17x^2 - x + 17 = 0$.

Ratkaisu. Yhtälön vasemmalla puolella olevan polynomin voi jakaa tekijöihin ryhmittelemällä:

$$x^3 - 17x^2 - x + 17 = x^2(x - 17) + (-1)(x - 17) = (x^2 - 1)(x - 17).$$

Nyt yhtälö ratkeaa tulon nollasäännöllä:

$$\begin{aligned} x^3 - 17x^2 - x + 17 &= 0 \\ (x^2 - 1)(x - 17) &= 0 \\ x^2 - 1 = 0 \quad \text{tai} \quad x - 17 &= 0 \\ x^2 = 1 \quad \text{tai} \quad x &= 17 \\ x = \pm 1 \quad \text{tai} \quad x &= 17 \end{aligned}$$

Vastaus. $x = 17$, $x = 1$ tai $x = -1$

4.2.3 SIJOITUKSET

Joskus yhtälöt ratkeavat, kun niihin sijoitetaan jokin apumuuttuja. Tällöin puhutaan muuttujanvaihdesta.

ESIMERKKI 4.88

Ratkaise yhtälö $2x^4 + 14x^2 - 36 = 0$.

Ratkaisu. Koska $x^4 = (x^2)^2$, ratkaistava yhtälö voidaan kirjoittaa myös muodossa $2(x^2)^2 + 14x^2 - 36 = 0$. Kun nyt sijoitetaan lausekkeen x^2 paikalle y , eli merkitään $y = x^2$, saadaankin muuttujan y yhtälö

$$2y^2 + 14y - 36 = 0.$$

Tämä on toisen asteen yhtälö, joka osataan ratkaista esimerkiksi ratkaisukaavalla. Tällä tavoin saadaan

$$y = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-36)}}{2 \cdot 2} = \frac{-14 \pm 22}{4}.$$

Ratkaisut ovat siis $y = 2$ ja $y = -9$.

On kuitenkin vielä selvitettävä alkuperäisen muuttujan x arvot. Koska $x^2 = y$,

saadaan y :lle löydettyistä arvoista yhtälöt $x^2 = 2$ ja $x^2 = -9$. Reaaliluvun neliö ei kuitenkaan voi olla negatiivinen, joten ainoat ratkaisut ovat yhtälön $x^2 = 2$ ratkaisut. Ne ovat $x = \pm\sqrt{2}$.

Vastaus. $x = \sqrt{2}$ tai $x = -\sqrt{2}$

Muotoa $ax^4 + bx^2 + c = 0$ oleva yhtälö (eli ns. **bikvadraattinen yhtälö**) voidaan aina ratkaista sijoittamalla $y = x^2$. Yleisemmin muotoa $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ olevat yhtälöt voidaan ratkaista sijoituksella $y = x^n$.

ESIMERKKI 4.89

Ratkaise yhtälö $x^{10} + x^5 = 2$.

Ratkaisu. Muutetaan yhtälö muotoon $(x^5)^2 + x^5 - 2 = 0$ ja tehdään sijoitus $y = x^5$. Nyt yhtälö saa muodon $y^2 + y - 2 = 0$. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan yhtälön ratkaisuiksi $y = -2$ ja $y = 1$.

Nyt alkuperäisen yhtälön ratkaisut saadaan yhtälöistä $x^5 = -2$ ja $x^5 = 1$. Siten ratkaisut ovat $x = \sqrt[5]{-2}$ ja $x = 1$.

Vastaus. $x = \sqrt[5]{-2}$ tai $x = 1$

Tehtäviä

Opi perusteet

194. Ratkaise yhtälöt.

- a) $x(x+2)(x+17) = 0$
- b) $x^9 = -512$
- c) $x^6 - 7x^7 = 0$

195. Ratkaise yhtälöt.

- a) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$
- b) $x^4 - 16 = 0$
- c) $x^6 - x^4 = 0$

196. Ratkaise yhtälöt.

- a) $x^4 - 2x^2 - 24 = 0$
- b) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$
- c) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$

Hallitse kokonaisuus

197. Ratkaise yhtälöt.

- a) $x^5 - 3x^4 + 2x^3 = 0$
- b) $x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x = 0$
- c) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$

198. Ratkaise yhtälöt.

- a) $x^4 - 16 = 0$
- b) $2x^4 = 8x^2$
- c) $x^6 - 2x^3 = 3$
- d) $x^{100} - 2x^{50} + 1 = 0$

199. Kun kolme peräkkäistä kokonaislukua kerrotaan keskenään, ja tuloon lisätään keskimäinen luku, tulos on 15 kertaa keskimäisen luvun neliö. Mitkä luvut ovat kyseessä?

200. Ratkaise yhtälö $x^{627} - 6x^{514} + 5x^{401} = 0$.

201. Ratkaise yhtälöt.

- a) $x^5 - 2x^3 + x = 0$
- b) $x^8 + 4x^4 = 5x^6$

202. Ratkaise yhtälö $5^{x^3+4x^2+x} = 1$.

Lisää tehtäviä

203. Ratkaise yhtälöt.

a) $x^8 - 1 = 0$

b) $x^8 - x^4 = 0$

c) $x^8 - x^4 - 1 = 0$

204. Millä muuttujan x arvoilla funktio $f(x) = x^5$ saa saman arvon kuin funktio $g(x) = x^4$?

205. Ratkaise yhtälöt.

a) $x^4 + 7x^3 = 0$

b) $2x^3 - 16x^2 + 32x = 0$

c) $x^6 + 6x^5 = -9x^4$

d) $x^3 - 2x^5 = 0$

206. ★ (K94/T2a) Polynomien $P(x) = ax^3 - 31x^2 + 1$ eräs nollakohta on $x = 1$. Määritä a ja ratkaise tämän jälkeen yhtälö $P(x) = 0$.

207. ★ Ratkaise yhtälö $(x + \frac{1}{x})^2 - x - \frac{1}{x} - 6 = 0$.

208. ★ Ratkaise yhtälö $2^x - 1 = \frac{12}{2^x}$

4.3 Korkeamman asteen epäyhtälöt



Opetus.tv: *N-asteinen polynomiepäyhtälö* (16.19 ja 12.00)

<http://opetus.tv/maa/maa2/n-asteinen-polynomiepalyhtalo/>

Korkeamman asteen epäyhtälö, kuten epäyhtälö

$$x^3 - 6x \leq x^2$$

voiaan ratkaista siirtämällä kaikki termit epäyhtälön toiselle puolelle ja tutkimalla syntyvän polynomin merkkiä:

$$\begin{array}{rcl} x^3 - 6x \leq x^2 & & \parallel -x^2 \\ \underbrace{x^3 - x^2 - 6x}_{P(x)} \leq 0. & & \end{array}$$

Polynomin $P(x)$ merkin selvittämiseksi ratkaistaan sen nollakohdat:

$$\begin{array}{rcl} x^3 - x^2 - 6x = 0 & & \parallel x \text{ yhteiseksi tekijäksi} \\ x(x^2 - x - 6) = 0 & & \parallel \text{tulon nollasääntö} \\ x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - x - 6 = 0 & & \parallel \text{ratkaisukaava} \\ x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} \\ x = -2 \quad \text{tai} \quad x = 3. \end{array}$$

Polynomin P nollakohdat ovat siis 0, -2 ja 3. Tästä voidaan jatkaa kahdella eri tavalla.

Tapa 1: Tekijöihin jako.

Jaetaan polynomi tekijöihin nollakohtien avulla:

$$P(x) = x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6) = x(x + 2)(x - 3).$$

Tutkitaan kunkin tulon tekijän merkkiä:

$$x + 2 > 0 \quad \text{kun} \quad x > -2$$

$$x - 3 > 0 \quad \text{kun} \quad x > 3$$

$$x > 0 \quad \text{kun} \quad x > 0.$$

Kootaan tulokset **merkkikaavioon**. Merkitään ensin lukusuoralle polynomin P nollakohdat. Nämä kolme nollakohtaa jakavat lukusuoran neljään osaan. Taulukoidaan lukusuoran alle kunkin tekijän merkki kullakin välillä.

	-2	0	3	
$x + 2$	-	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	+
x	-	-	+	+
$x(x + 2)(x - 3)$	-	+	-	+

Merkkikaavion alin rivi saadaan tulon merkkisäännöstä: kolmen negatiivisen luvun tulo on negatiivinen, yhden positiivisen ja kahden negatiivisen tulo positiivinen ja niin edelleen. Kaavion viimeiseltä riviltä voidaan nyt lukea vastaus alkuperäiseen kysymykseen: $x^3 - x^2 - 6 \leq 0$, kun $x \leq -2$ tai $0 \leq x \leq 3$.

Tapa 2: Testipisteet.

Polynomit ovat jatkuvia funktioita. (Jatkuvuutta käsitellään tarkemmin vasta kurssilla 7.) Intuitiivisesti jatkuvuudessa on kyse siitä, että funktion kuvaaja on yhtenäinen viiva. Jatkuvuudesta seuraa, että polynomi ei voi vaihtaa merkkiä kulkematta nollakohdan kautta. Polynomin merkin nollakohtien välillä saa selville laskemalla funktion arvon jossakin väliltä otetussa testipisteessä.

Esimerkissä nollakohdat olivat -2 , 0 ja 3 . Valitaan niiden välistä ja ympäriltä testipisteiksi vaikkapa $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ ja $x = 4$. Tarkistetaan funktion merkki kussakin pisteessä:

Väli	Testipiste	$f(x) = x^3 - x^2 - 6x$	Funktion merkki
$x < -2$	$x = -3$	$(-3)^3 - (-3)^2 - 6(-3) = -18$	-
$-2 < x < 0$	$x = -1$	$(-1)^3 - (-1)^2 - 6(-1) = 4$	+
$0 < x < 3$	$x = 1$	$1^3 - 1^2 - 6 \cdot 1 = -6$	-
$3 < x$	$x = 4$	$4^3 - 4^2 - 6 \cdot 4 = 24$	+

Vastaukseksi saadaan sama kuin edellä: $x^3 - x^2 - 6 \leq 0$, kun $x \leq -2$ tai $0 \leq x \leq 3$.

ESIMERKKI 4.90

Ratkaise epäyhtälö $x^2 - x^4 \leq 0$.

Ratkaisu. Jaetaan ensin tekijöihin ja ratkaistaan nollakohdat.

$$\begin{aligned} x^2 + x^4 &= x^2(1 - x^2) & \parallel & \text{muistikaava} \\ &= x^2(1 - x)(1 + x) \end{aligned}$$

Nollakohdat ovat $x = 0$, $x = 1$ ja $x = -1$. Tehdään merkkikaavio:

	-1	0	1	
x^2	+	+	+	+
$1 - x$	+	+	+	-
$1 + x$	-	+	+	+
$x^2(1 - x)(1 + x)$	-	+	+	-

Merkkikaaviosta voidaan lukea, että $x^2(1 - x)(1 + x) < 0$, kun $x < -1$ tai $x > 1$. Lisäksi $x^2(1 - x)(1 + x) = 0$, kun $x = -1$, $x = 0$ tai $x = 1$.

Vastaus. $x \leq -1$, $x = 0$ tai $x \geq 1$.

Tehtäviä

Opi perusteet

209. Ratkaise

- a) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) \leq 0$
- b) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) > 0$
- c) $-3(x - 1)(x - 2)(x - 3) > 0$.

210. Ratkaise $x^3 - x^2 < 0$.

211. Ratkaise $x^4 \leq 1$.

Hallitse kokonaisuus

212. Ratkaise $(2x^3 + 4x^2 - 5x + 7)^2 < 0$.

213. Ratkaise $x^4 - 3x^2 - 18 \leq 0$.

214. Olkoon $a > 0$. Millä muuttujan x arvoilla funktion $P(x) = x^3 - ax$ arvot ovat positiivisia?

215. Koska tulolla ja osamäärällä on sama merkkisääntö, merkkikaavioita voidaan käyttää myös osamääriin. Ratkaise epäyhtälöt

- a) $\frac{(x+3)(x-2)}{x-5} \leq 0$
- b) $x \geq \frac{1}{x}$

216. Ratkaise $4x^5 + 9x^3 \leq 12x^4$.

217. Ratkaise $(x^5 - 2)(x^8 - 1) > 0$

218. Epäyhtälöiden ratkaisut/todistukset perustuvat usein tietoon, että epänegatiivisten lukujen summa on epänegatiivinen ja nolla jos, ja vain jos kaikki yhteenlaskettavat ovat nollia.

- a) Ratkaise $x^6 + x^2 + 1 > 0$
- b) Ratkaise $x^{10} + (x - 1)^{10} < 0$
- c) Todista, että kaikilla reaaliluvuilla x ja y

$$(xy - 1)^2 + (x^2 - y^2)^4 + (xy - x - y + 1)^6 \geq 0$$

ja että epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus jos, ja vain jos $x = y = 1$

Lisää tehtäviä

219. Ratkaise epäyhtälöt

- a) $x^3 + 2x^2 - 15x > 0$
- b) $x^3 - 2x^2 + x \leq 0$

220. Ratkaise $x + 2x^6 + x^{11} < 0$.

Kertausosio

Testaa tietosi!

OSAATKO SELITTÄÄ?

221. Miksi polynomin vakiotermin (tai vakiopolynomin) asteluku on nol-la?
222. Miksi puhutaan vain termien summasta, vaikka polynomeissa voi esiintyä miinusmerkkejä?
223. Miten usean muuttujan polynomin asteluku lasketaan?
224. Mitä tarkoitetaan tulon nollasäännöllä?
225. Kun polynomi jaetaan tekijöihin, mitä voit varmasti sanoa tekijäpoly-nomien asteista verrattuna alkuperäiseen polynomiin?
226. Miten selvität polynomin $(x^3 - 2x)^{15}$ asteen purkamatta sulkuja?
227. Miksi epäyhtälön ”suunta muuttuu”, kun se kerrotaan puolittain negatiivisella luvulla?

MONIVALINTA

Valitse kussakin monivalintatehtävässä yksi paras vastaus.

228. Mitkä ovat polynomin $x^4 - x^2 + \sqrt{2}x - 1$ 337 termien kertoimet neljännestä asteesta pienempään luetellen?
- a) 1, -1, $\sqrt{2}$ ja -1 337
 - b) 1, 0, -1, $\sqrt{2}$ ja -1 337
 - c) 1, 0, -1, $\sqrt{2}$ ja 1 337
 - d) 1, 1, $\sqrt{2}$ ja 1 337

229. Tulosta ab tiedetään, että $a = 0$. Mikä seuraavista väitteistä pitää välttämättä paikkansa?

- a) $b \geq a$
- b) $b = 0$
- c) $|b| \geq a$
- d) $ab = 0$

230. Mitkä ovat funktion $f(x) = (x + 3)(x - 50)$ nollakohdat?

- a) 3 ja -50
- b) -3 ja -50
- c) -3 ja 50
- d) 3 ja 50

231. Monettako astetta on kahden muuttujan polynomi $x^5y - x^4y^3 - 715517y$?

- a) 1.
- b) 3.
- c) 4.
- d) 5.
- e) 7.

232. Mikä on polynomin $P(x) = -x^3 - x^2 - x - 1$ arvo kohdassa $x = -1$?

- a) -4
- b) -2
- c) 0
- d) 1
- e) 2

233. Mikä polynomi saadaan, kun avataan sulut lausekkeesta $(2x - 1)^2$ ja sievennetään?

- a) $2x^2 + 1$
- b) $4x^2 + 1$
- c) $2x^2 - 1$
- d) $4x^2 - 1$
- e) $4x^2 - 4x + 1$
- f) $4x^2 + 4x + 1$
- g) $4x^2 - 4x - 1$

234. Määritellään kahden funktion arvot kaavoilla $f(x) = x^2 + 1$ ja $g(x) = x^2 - x$. Mikä väitteistä ei pidä paikkaansa?

- a) $f(x) + g(x) = 2x^2 - x + 1$
- b) $f(x) \cdot g(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$
- c) $f(0) = g(0)$
- d) $f(-1) = g(-1)$

235. Eräs reaalimuuttujan polynomi saa kahdella erillisellä, suljetulla reaalilukuvälillä negatiivia arvoja ja kaikkialla muualla epänegatiivisia arvoja. Kuinka monta nollakohtaa polynomilla on?

- a) nolla
- b) yksi
- c) kaksi
- d) kolme
- e) neljä

TOSI VAI EPÄTOSI?

Pitävätkö väitteet paikkansa?

- 236.
- a) Potenssifunktiot ovat polynomifunktioita.
 - b) Jos epäyhtälön molemmat puolet korotetaan kolmanteen potenssiin, epäyhtälö säilyy yhtäpitävänä.
 - c) Jos trinomin kertoo trinomilla, sulkeet avaamalla saadaan kuusi termiä (ennen mahdollista sieventämistä eli samanasteisten termien yhdistämistä)
 - d) Jos kolmannen asteen polynomi korotetaan kokonaisuudessaan kolmanteen potenssiin, saadaan tulomuotoinen yhdeksannen asteen polynomi.

Kertaustehtäviä

Tehtäviä

Polynomi

237. Laske.

- a) $x + x + x$
- b) $x \cdot x \cdot x$
- c) $-5x^2 - 5x^2$
- d) $2x \cdot 7x$
- e) $\frac{1}{2}x^2 \cdot (-6x^3)$

238. Laske.

- a) $-2x^3 + 4x - x^2 - x + 5x^3$
- b) $x - 3 - (5 - x)$
- c) $(x^2 + 5x + 2) - (-x^2 + 3x - 5)$
- d) $3x(x - 7)$
- e) $-2x^2(3x^5 - 12x^2 + 1)$

239. Kerro sulut auki.

- a) $(x - 2)(x + 4)$
- b) $(3a + b)(a - b)$
- c) $(a + 3)^2$
- d) $(x - 1)^2$
- e) $(4x + 1)(4x - 1)$

240. Jaa tekijöihin.

- a) $4x^2 + x$
- b) $5x^3y + 10xy^2$
- c) $y^2 - 9$
- d) $x^2 - 4x + 4$
- e) $x^4 - 5x^3 + 10x - 50$

241. Sievennä muistikaavan avulla

- a) $(x^2 - 1)^2$
- b) $(a^6 + 3b^3)^2$
- c) $(-12 - 3x)(12 - 3x)$
- d) $(x + \frac{1}{x})^2$

242. Ratkaise yhtälö

$$(x - 3)(x + 2)(x - 1) = 0.$$

243. Miksi polynomi $x^6 + 3x^2 + 5$ ei voi saada negatiivisia arvoja?

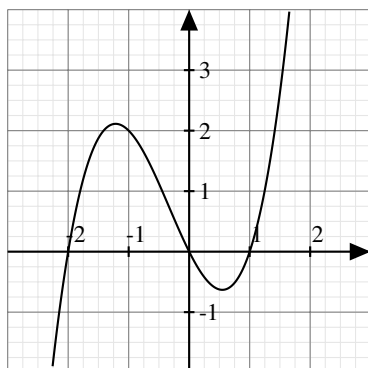
244. a) Osoita oikeaksi kaavat

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \text{ ja}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

b) Jaa $x^6 - y^6$ neljään tekijään.

245. Kuvassa on polynomin $P(x)$ kuvaaja.



- a) Mitkä ovat polynomin nollakohdat?
- b) Millä muuttujan x arvoilla $P(x) > 0$?
- c) Kuinka monta ratkaisua yhtälöllä $P(x) = 1$ on?

246. Jaa tekijöihin

$$(a + b)^2 - 16.$$

247. Sievennä:

a) $(a^2 - 1)^2 + (a^2 + 1)^2 - 2(a^4 + 1)$

b) $(x + y)^2 - 4xy$

Ensimmäinen aste

248. Ratkaise yhtälöt.

a) $3x - 5(x - 2) = 3 - (-x)$

b) $x(x - 6) = x^2 + 5$

c) $\frac{2x}{3} - \frac{x-3}{4} = 7$

249. Kirjoita joukko-opilliset ehdot epäyhtälöinä.

a) $x \in [2, 7]$

b) $y \in] - 3, 0]$

c) $z \in] - \infty, 5[$

250. Ratkaise epäyhtälöt.

a) $-3x < 6$

b) $5x - 2 > 7x + 3$

c) $-2(x + 3) \leq x - (5 - x)$

251. Polkupyörävuokraamo A laskuttaa pyörän vuokrasta 5 € ja 2,5 € jokaisesta täydestä tunnista. Vuokraamo B laskuttaa 11,50 € ja 1,5 € jokaisesta täydestä tunnista. Kuinka monen tunnin vuokrassa vuokraamo B on edullisempi?

252. Kirahvi kantaa suussaan karahvia ja kävelee vaa'alle, jonka toisella puolella on 7 karahvia ja sattuu niin, että vaaka on tasapainossa. Mikä on karahvin paino kirahveina?

253. Ratkaise epäyhtälö $ax \geq a - 2x$ parametrin a kaikilla arvoilla.

Toinen aste

254. Ratkaise yhtälöt.

a) $x^2 - 13 = 0$

b) $5x^2 + 2x = 0$

c) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

255. Ratkaise epäyhtälöt.

a) $x^2 - x - 6 < 0$

b) $x^2 \geq 5x$

256. Maijan ja Veeran ikien summa on 30. Ikien tulo on yli 186. Minkä ikäisiä tytöt voivat olla?

257. Millä vakion k arvolla yhtälöllä $kx^2 + kx = x - 3$ on tasan yksi ratkaisu?

258. Polynomilla $P(x) = x^2 - 3x + c$ on tekijä $x + 5$. Mikä on c ?

259. Suorakulmion A sivut ovat 9 ja $x^2 + 1$, suorakulmion B sivut $5x + 5$ ja $5 - x$. Millä luvun x arvoilla suorakulmion A ala on suurempi?

Korkeampi aste

260. Ratkaise yhtälö $2x^7 = 5x^2$.

261. Anna esimerkki (jos mahdollista)

a) 4. asteen yhtälöstä, jolla ei ole ratkaisua

b) 5. asteen yhtälöstä, jolla on tasan kaksi ratkaisua

c) 3. asteen yhtälöstä, jolla on tasan neljä ratkaisua

262. Ratkaise yhtälö $x^4 = x^2 + 6$.

263. Ratkaise yhtälö $x^7 = 5x^5 - x^6$.

264. Mitkä luvut ovat kuutiotaan suurempia?

265. Ratkaise epäyhtälöt

a) $x^4 < 5x$

b) $2x^3 \leq 3x - 5x^2$

266. Kuution tilavuus (kuutiometreinä) on sama kuin sen särmien pituuksien summa (metreinä). Kuinka pitkä on kuution särmä?

267. Ratkaise yhtälö $2x^5 - (x + 6)^5 = 0$.

268. Etsi yhtälön $x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 1 = 0$ kaikkien kolmen ratkaisun likiarvot laskimella tai tietokoneen avulla. Anna vastaukset kahden desimaalin tarkkuudella.

Harjoituskokeita

Seuraavissa harjoituskokeissa on kussakin kahdeksan tehtävää, jotka on suunniteltu niin, että jokaisesta (alakohtineen) saa korkeintaan kuusi pistettä.

HARJOITUSKOE 1

269. a) Perustele, onko $t^\pi + 1$ polynomi. (1 p.)
- b) Trinomi kerrotaan toisella trinomilla. Kuinka monta termiä syntyy neeseen uuteen polynomiin tulee (ennen mahdollista sieventämistä)? (0,5 p.)
- c) Mikä on tulomuodossa esitetyn polynomin $(x^2 + 1)^{10}(1 - x)^2$ aste? (0,5 p.)
- d) Mainitse jokin luku, joka kuuluu reaalityöväliä $]1,966; 1,967[$. (0,5 p.)
- e) Mikä on korkeimman asteen termin kerroin polynomiyhtälössä $9001k^2 - \frac{1}{4}k - \sqrt{2}k^3 = -k^2 + k^3$? (0,5 p.)
- f) Polynomi voidaan esittää tulomuodossa $(x - 2)x(x + 3)$. Mikä on kyseisen polynomin suurin nollakohta? (1 p.)
- g) Minkälainen (muoto & mahdollinen suunta) kuvaaja on polynomifunktiolla P , jonka arvot lasketaan yhtälöllä $P(t) = -100 - \frac{1}{2}t$? (1 p.)
- h) Jaa tekijöihin polynomi $x^2 + 2x + 1$. (1 p.)
270. a) Näytä, että polynomiyhtälöt $(t + 1)^2 = t + 1$ ja $t^2 = -t$ ovat samat.
- b) Osoita, että $\sqrt{11 + 4\sqrt{6}} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$.
271. Ratkaise epäyhtälöistä x .
- a) $\frac{2x}{3} - 1 \geq \frac{3}{2}x$
- b) $(\frac{1}{2}x - 1)^2 < 1 - (x - 1)^2$
272. Ratkaise yhtälöistä tuntematon reaalityö z .
- a) $(2 + \frac{\sqrt{2}}{2})z^2 - z = \sqrt{2}z^3$
- b) $z^4 - 2z^2 + 1 = 0$
273. Millä parametrin k arvoilla yhtälöllä $kx^2 - (k + 1)x + 1 = 0$ on kaksi erisuurta reaalityöä?

274. Sofie tallettaa 1 000 euroa uudelle pankkitilille vuoden alussa ja uudelleen saman verran vuoden kuluttua. Pankki maksaa talletukselle vuosikorkoa siten, että kahden vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksen tilillä on rahaa 2 100 euroa. Kuinka suuri on pankin tarjoama korkokanta prosentin kymmenesosan tarkkuudella? Inflaatiota ja korkotuotoista maksettavaa lähdeveroa ei oteta huomioon. Muita tilitapahtumia ei ole.

275. Mikä on funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pienin arvo, kun funktion arvot määritellään kaavalla $f(x) = 3x^2 - 12x + 6$?

276. a) Osoita, että kolmannen asteen polynomi $x^3 \pm y^3$ voidaan esittää tulomuodossa $(x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$. (2 p.)

b) Ratkaise epäyhtälö $z^3 - 8 \geq z - 2$. (4 p.)

HARJOITUSKOE 2

277. a) Perustele, onko $\frac{1}{t^2} + \pi$ polynomi. (1 p.)
- b) Binomi kerrotaan trinomilla. Kuinka monta termiä syntyneeseen uuteen polynomiin tulee (ennen mahdollista sieventämistä)? (0,5 p.)
- c) Mikä on tulomuodossa esitetyn polynomin $(x^3 + 1)^5(1 - x)^3$ aste? (0,5 p.)
- d) Esitä ehto $x \in] - \pi, 42]$ kaksoisepäyhtälönä. (0,5 p.)
- e) Jaa polynomi $y^2 - 2y + 1$ tekijöihin. (1 p.)
- f) Sievennä $\frac{x^2 - 10^{102}}{x - 10^{51}}$ (1 p.)
- g) Minkälainen (muoto & mahdollinen suunta) kuvaaja on polynomi-funktiolla P , jonka arvot lasketaan yhtälöllä $P(t) = 12,34^{56} - 789t^2$? (0,5 p.)
- h) Polynomi voidaan esittää tulomuodossa $(x - 32)x(x + 23)$. Mikä on kyseisen polynomin pienin nollakohta? (0,5 p.)
- i) Kuinka monta nollakohtaa voi korkeintaan olla kuudennen asteen polynomilla? (0,5 p.)

278. Ratkaise yhtälöistä reaalin tuntematon t .

- a) $(9 - t^2)(t - 1)t = 0$
- b) $(2t^2 - 1)(t - 1) = 1$

279. Millä parametrin a arvoilla yhtälöllä $x^2 - 4ax - a = 0$ on täsmälleen yksi reaaliratkaisu?

280. Reaaliluvuista a ja b tiedetään, että $a < b$. Osoita kyseistä epäyhtälöä muokkaamalla, että lukujen a ja b aritmeettinen keskiarvo on todellakin lukujen a ja b välissä.

281. Määritä pienin kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön $\frac{1}{4}n^4 < 240 + n^2$.

282. Karkkikauppias ostaa joka kuukausi irtokarkkeja tukusta hintaan 10 €/kg ja myy niitä tavallisesti asiakkailleen hintaan 12,9 €/kg. Makeisten ostamisen lisäksi kauppialla menee joka kuukausi 500 euroa niin sanottuihin kiinteisiin kustannuksiin. Kiinteät kustannukset ovat aina samat riippumatta myynnin määrästä. Kysynnän hän osaa arvioida niin hyvin, että mitään makeisia ei jää myymättä.

- a) Merkitään myynnin kuukausittaista määrää kilogrammoina q :lla. Muodosta lausekelle niin sanotulle voittofunktiolle P eli kuvaukselle myynnin määrästä tuottoon (euroina), josta on vähennetty kaikki myyntitoiminnan kustannukset. Funktion arvot määräävään lausekkeeseen ei tarvitse erikseen merkitä yksiköitä.
- b) Kauppias on pitkän myyntikokemuksen perusteella huomannut, että kilogrammahinnan kasvattaminen eurolla vähentää aina kuukausittaista myyntiä 50 kilogrammaa ja toisaalta kilogrammahinnan vähentäminen eurolla lisää aina kuukausittaista myyntiä samat 50 kilogrammaa. Mikä tulisi asettaa kilohinnaksi, jotta 180 kilogramman kuukausimyyntillä kauppias ei jäisi liiketoiminnassaan tappiolle?

283. a) Avaa sulut lausekkeesta $(a - b)^3$ ja sievennä tulos. (2 p.)
 b) Ratkaise reaaliluku x yhtälöstä $x^3 - 3x^2 + 3x = 9$. (4 p.)

284. Muodosta muuttujan a funktio f , joka antaa toisen asteen polynomin $ax^2 + 2x + 2a$ nollakohtien etäisyyden. Määritä funktion f laajin reaalinen määrittelyjoukko ja arvojoukko.

HARJOITUSKOE 3

285. a) Perustele, onko $\sqrt{k} + \sqrt{2}$ polynomi. (1 p.)
 b) Binomi kerrotaan trinomilla. Kuinka monta termiä syntyneeseen uuteen polynomiin tulee (ennen mahdollista sieventämistä)? (1 p.)
 c) Mikä on tulomuodossa esitetyn polynomin $(x^3 + 1)^5(1 - x)^3$ aste? (1 p.)
 d) Selitä, miksi kerrottaessa epäyhtälöä negatiivisella luvulla epäyhtälön merkki kääntyy. (1 p.)
 e) Esitä muuttujaa x koskeva kaksoisepäyhtälönä esitetty ehto $-\frac{2}{3} < x \leq 100$ joukko-opillisesti. (1 p.)
 f) Muuttujan x arvot ovat suoraan verrannollisia y :n arvoihin. Perustele, voiko x :n ja y :n välinen yhteys olla polynomiaalinen. (1 p.)

286. Olkoot a, b, c, d ja n lukuja. Osoita, että

$$(a^2 + nb^2)(c^2 + nd^2) = (ac + nbd)^2 + n(ad - bc)^2.$$

287. Tykin ammuksen lentokorkeus h ajanhetkellä t (sekunteina) laukaisun jälkeen noudattaa likimain yhtälöä $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, missä h_0 on laukaisukorkeus metreinä, v_0 ylöspäin suuntautuva pystysuora lähtönopeus yksikössä m/s, ja g on putoamiskiihtyvyys $9,81 \text{ m s}^{-2}$. Ammus poistuu laukaisussa tykin piipusta metrin korkeudelta ylöspäin suuntautuvalla nopeudella $15,5 \text{ m/s}$. Kuinka kauan kestää ennen kuin tykinkuula osuu maahan? Piirrä tilanteesta kuva.

288. Millä vakion t arvoilla yhtälöllä $tx^2 + tx - 6 = 0$ ei ole lainkaan reaalisia ratkaisuja?

289. Tutkitaan polynomifunktiota P , jonka arvot määritellään kaavalla $P(x) = x^3 - 2x^2 - x$. Millä x :n arvoilla polynomi saa positiivisia arvoja?

290. Ratkaise yhtälö $t^5 - t^4 = t^2 - t^3$.

291. Ratkaise yhtälöstä $y^{2n} = y^n$ molemmat reaalimuuttujat y ja n .

292. Polynomin Q muuttuja on x , ja polynomi voidaan esittää tulomuodossa $(ax - b)\left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}x - 1\right)(bx - a)$, missä a ja b ovat reaalisia vakioita, joille pätee $0 < a < b$. Perustele, mikä on funktion nollakohtien suuruusjärjestys.

HARJOITUSKOE 4

293. a) Perustele, onko $\frac{2t^0+5t}{3}$ polynomi. (1 p.)
b) Trinomi kerrotaan toisella trinomilla. Kuinka monta termiä syntyy neeseen uuteen polynomiin tulee (ennen mahdollista sieventämistä)? (0,5 p.)
c) Mikä on tulomuodossa esitetyn polynomin $2(1-2y)^2(y^2+2)^2$ aste? (0,5 p.)
d) Esitä muuttujaa t koskeva ehto $t \leq \pi$ joukko-opillisesti. (0,5 p.)
e) Polynomi voidaan esittää tulomuodossa $(x-2)x(x+3)$. Mikä on kyseisen polynomin suurin nollakohta? (0,5 p.)
f) Sievennä lauseke $\frac{x^3-4x^2-4x}{x^2-2x}$. (3 p.)

294. Polynomifunktion P arvot määritellään kaavalla $P(x) = (k^2 + 2k)x + 2k$. Määritä vakio k siten, että ehto $P(2) = 0$ pätee. Piirrä ehdon täyttävän polynomifunktion kuvaaja.

295. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $x^2 + ax - a = 0$ on kaksoisjuuri? Mikä tämä kaksoisjuuri tällöin on?

296. Erääseen ulkomaalaiseen matkapuhelinliittymään on saatavilla kaksi maksusuunnitelmaa mobiilidatan käyttöön. Tarjouksen A mukaan maksat kuukaudessa vakiohinnan 40 euroa riippumatta siitä, kuinka paljon dataa kulkee. Tarjouksen B mukaan kuukauden ensimmäiset 100 megatavua maksaa 25 euroa, minkä jälkeen ylimenevästä osasta maksetaan 0,12 euroa megatavua kohden. Millä kuukausittaisilla datamäärillä tarjous A on tarjousta B edullisempi? Hinnoittelussa ei tehdä eroa vastaanotetun ja lähetetyn datan välillä.

297. Ratkaise y yhtälöstä $\frac{1}{2}n^n y^2 - n^{2n} y - n^{3n+1} = 0$, kun $n = 50$. Esitä vastaus kymmenpotenssimuodossa kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

298. Ratkaise yhtälö $x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 2x = 0$.

299. Funktion y arvot määritellään kaavalla $y(t) = \frac{t^2 + \left(\frac{1}{3} + \pi\right)t - \frac{\pi}{3}}{t^2 + \left(\frac{1}{3} - \pi\right)t - \frac{\pi}{3}}$.

- a) Mikä on funktion määrittelyjoukko?
b) Määritä ne ty -koordinaatiston pisteet, joissa funktion kuvaaja leikkaa jomman kumman koordinaattiakselin.

300. Johda toisen asteen yhtälön ratkaisukaava lähtien yhtälön normaali-muodosta $ax^2 + bx + c = 0$, missä a , b ja c ovat reaalisia vakioita, ja $a \neq 0$.

Ylioppilaskoetehtäviä

Lyhyen oppimäärän tehtäviä 301. (s2013/1a) Ratkaise yhtälö $(x - 2)^2 = 4$.

302. (k2013/2)

- a) Millä muuttujan x arvoilla $4x + 17$ on suurempi kuin $2 - x$?
b) Ratkaise yhtälö $x^2 + 14x = -49$.

303. (s2012/1a) Ratkaise yhtälö $x^2 - 2x = 0$.

304. (k2012/1a) Ratkaise yhtälö $7x + 3 = 31$.

305. (s2011/1c)

Ratkaise yhtälö $x^2 - 3(x + 3) = 3x - 18$.

306. (k2011/1b) Sievennä lauseke $x^2 + x - (x^2 - x)$.

307. (k2011/2b)

Sievennä lauseke $(\sqrt{x} - 1)^2 + 2\sqrt{x}$.

Pitkän oppimäärän tehtäviä 308. (K2013/1b)
Ratkaise epäyhtälö $\frac{3}{5}x - \frac{7}{10} < -\frac{2}{15}x$.

309. (K2013/3a)

Laske lausekkeen $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ tarkka arvo, kun positiiviset luvut a ja b ovat toistensa käänteislukuja ja lukujen a ja b keskiarvo on 2.

310. (K2013/*14a)

- a) Jaa $P(x) = x^2 + x - 2$ ensimmäisen asteen tekijöihin. (2 p.)
b) Olkoon $P(x) = x^2 + x - 2$. Määritä sellaiset vakiot A ja B , että
$$\frac{1}{P(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$
 kaikilla $x \geq 2$. (2 p.)

311. (S2013/1a)

- a) Ratkaise yhtälö $x^2 + 6x = 2x^2 + 9$.
b) Ratkaise yhtälö $\frac{1+x}{1-x} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.
c) Esitä polynomi $x^2 - 9x + 14$ ensimmäisen asteen polynomien tulona.

312. (S2012/1a)

Ratkaise yhtälö $2(1 - 3x + 3x^2) = 3(1 + 2x + 2x^2)$.

313. (S2011/3b) Ratkaise epäyhtälö $\frac{2x+1}{x-1} \geq 3$.
314. (K2011/1b) Ratkaise epäyhtälö $x^2 - 2 \leq x$.
315. (S2010/1a) Sievennä lauseke $(a+b)^2 - (a-b)^2$.
316. (S2010/2a) Ratkaise epäyhtälö $x\sqrt{7} - 3 \leq 4x$.
317. (S2010/2c) Ratkaise yhtälö $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.
318. (K2010/1a) Ratkaise yhtälö $7x^7 + 6x^6 = 0$.
319. (K2010/1b) Sievennä lauseke $(\sqrt{a} + 1)^2 - a - 1$.
320. (K2010/1c) Millä x :n arvoilla pätee $\frac{3}{3-2x} < 0$?
321. (K2010/3b) Määritä toisen asteen yhtälön $x^2 + px + q = 0$ kertoimet p ja q , kun yhtälön juuret ovat $-2 - \sqrt{6}$ ja $-2 + \sqrt{6}$.
322. (S2009/1a) Ratkaise yhtälö $(x-2)(x-3) = 6$.
323. (S2009/1b) Ratkaise yhtälö $\frac{x}{x-3} - \frac{1}{x} = 1$.
324. (S2009/2a) Ratkaise epäyhtälö $6(x-1) + 4 \geq 3(7x+1)$.
325. (K2009/1b) Ratkaise epäyhtälö $(x-3)^2 > (x-1)(x+1)$.
326. (S2008/1a) Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{2} - \frac{x}{3} > \frac{3}{4}$.
327. (S2008/3b) Ratkaise yhtälö $4x^3 - 5x^2 = 2x - 3x^3$.
328. (K2008/1a) Ratkaise yhtälö $2x^2 = x + 1$.
329. (S2007/1a) Ratkaise epäyhtälö $2 - 3x > 4x$.
330. (K2007/1a) Ratkaise yhtälö $7x^2 - 6x = 0$.
331. (S2006/1a) Sievennä lauseke $(1+x)^3 - (1-x)^3$.
332. (S2006/1b) Ratkaise yhtälö $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x+1}$.
333. (S2005/1b) Ratkaise reaali lukualueella yhtälö $x + 2 = \frac{1}{x-2}$.
334. (S2005/4) Millä a :n arvoilla funktio $f(x) = -x^2 + ax + a - 3$ saa vain negatiivisia arvoja?
335. (K2005/1a) Sievennä lauseke $\frac{x}{1-x} + \frac{x}{1+x}$.
336. (K2005/1b) Ratkaise x yhtälöstä $x^2 - ax - a^2 = 0$.
337. (S2004/1a) Ratkaise epäyhtälö $2x - 3 < 3 - 2x$.

338. (S2004/1b) Ratkaise epäyhtälö $(x + 1)^2 \leq 1$.

339. (S2004/1c) Ratkaise epäyhtälö $x^3 < x^2$.

340. (K2004/1c) Olkoon $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$ ja $g(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$.
Ratkaise yhtälö $f(x) = g(x)$.

341. (K1988/3) Millä a :n arvoilla yhtälön $x^2 + (3a + 1)x + 81 = 0$ juuret ovat reaaliset?

Lisämateriaalia

Paraabeli

TOISEN ASTEEN POLYNOMIN KUVAAJA

Tässä liitteessä perustellaan, miksi kaikkien toisen asteen polynomifunktioiden kuvaajat näyttävät samalta. Lisäksi tarkastellaan, mitkä tekijät vaikuttavat kuvaajien muotoon.

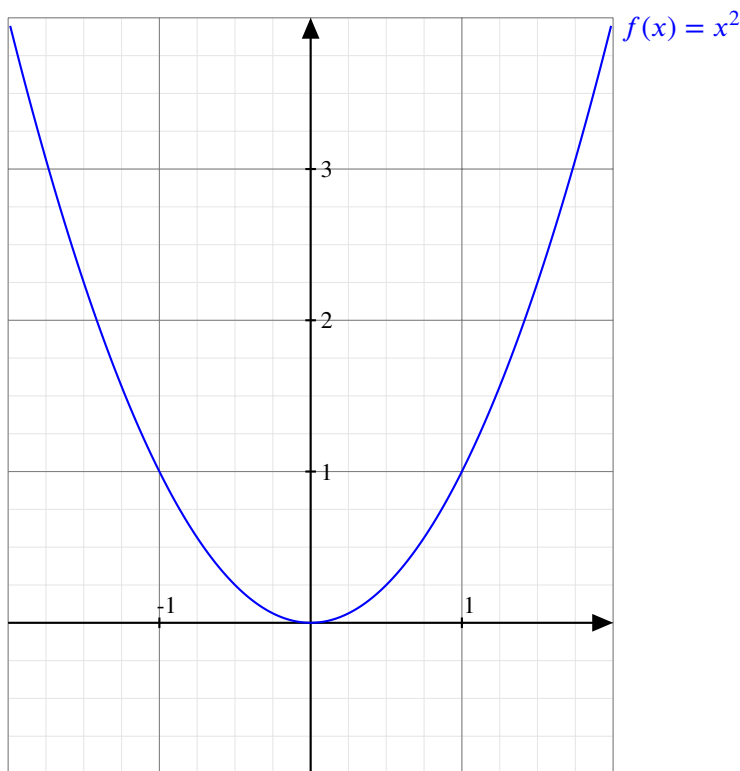
Funktio $P(x) = x^2$

Aloitetaan funktiosta $P(x) = x^2$. Mitä tiedämme siitä piirtämättä kuvaajaa?

- Algebrallisen päättelyn avulla voimme todeta, että funktion pienin arvo on $P(0) = 0$, sillä tulon merkkisäännön perusteella lauseke x^2 ei voi saada negatiivisia arvoja – ei ole olemassa sellaista reaalilukua x , jonka neliö olisi negatiivinen. (Kompleksiluvuilla tällaista rajoitusta ei ole, tästä lisää liitteessä.) Kuvaajan alin kohta sijoittuu siis origoon ja kuvaajan kaikki muut pisteet sen yläpuolelle.
- Kun $x > 0$, lauseke x^2 on sitä suurempi, mitä suurempi x on. Tästä tiedämme, että nolasta oikealle siirryttäessä funktion kuvaaja nousee.
- Koska $(-x)^2 = x^2$, kuvaaja on symmetrinen y -akselin suhteen.

Näiden tietojen avulla voimme päätellä, että funktion kuvaaja koostuu kahdesta identtisestä haarasta, jotka kohtaavat, kun $x = 0$. Mitä kauempana x on nolasta, sitä suurempia ovat funktion arvot. Tämän kaiken voi päätellä jo ennen kuvaajan piirtämistä.

Merkitsemällä koordinaatistoon yhtälön $y = x^2$ toteuttavia pisteitä, muodostuu lopulta funktion kuvaaja:



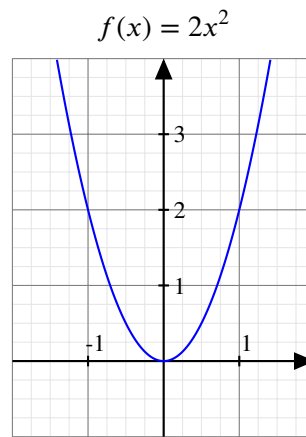
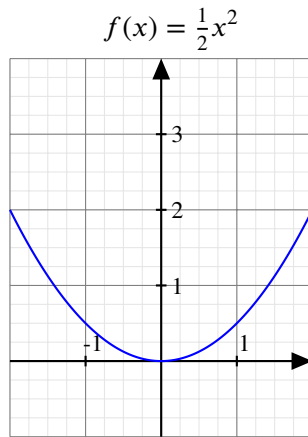
Kuvaajan muoto on geometriselta nimeltään *paraabeli*. Paraabeleja esiintyy monessa yhteydessä: esimerkiksi polttopeilin ja radioteleskoopin pinta kaareutuu paraabelin muotoisena. Samoin ilmaan heitetyn kappaleen rata on likimain alaspäin aukeava paraabeli, kun ilmanvastus on pieni.

Funktio $P(x) = ax^2$, $a \neq 0$

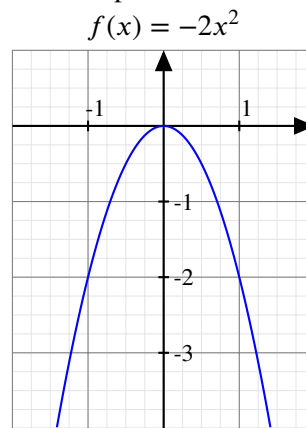
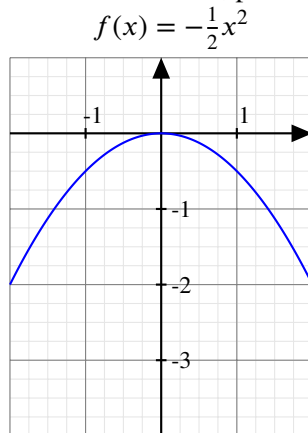
Polynomien $P(x) = ax^2$ arvot ovat lausekkeeseen x^2 nähden a -kertaisia. Muuten paraabelin symmetrisyys ja muut keskeiset ominaisuudet säilyvät.

- Kun $a > 0$, myös $ax^2 \geq 0$, joten pienin arvo on yhä 0.
Paraabeli on **ylöspäin aukeava**.
- Kun $a < 0$, tulon merkkisäännön nojalla $ax^2 \leq 0$.
Nyt $P(0) = 0$ onkin suurin arvo, ja funktion arvot ovat sitä pienempiä, mitä enemmän x poikkeaa nolasta.
Paraabeli on **alaspäin aukeava**.
- Mitä enemmän a poikkeaa nolasta, sitä nopeammin funktion arvot muuttuvat x :n muuttuessa ja sitä kapeampi paraabeli on.

$a > 0$, paraabeli aukeaa ylöspäin:



$a < 0$, paraabeli aukeaa alaspäin:



Funktio $P(x) = ax^2 + c$

Lisäämällä vakiotermi c saadaan $P(x) = ax^2 + c$. Vakion lisääminen nostaa tai laskee funktion kuvaajaa (riippuen siitä, onko $c > 0$ tai $c < 0$), joten kuvaajan muoto ei muutu.

Funktio $P(x) = ax^2 + bx + c$

Miksi sitten täydellisen toisen asteen polynomin $P(x) = ax^2 + bx + c$ kuvaaja on

myös paraabeli? Muokataan lauseketta, aloitetaan ottamalla yhteinen tekijä:

$$\begin{aligned}
 P(x) &= ax^2 + bx + c \\
 &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c && \text{lavennetaan } \frac{b}{a} \text{ kahdella} \\
 &= a \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} \right) + c && \text{täydennetään neliöksi lisäämällä } \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \\
 &= a \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) + c \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2} \\
 &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c && \text{kerrotaan sulut auki} \\
 &= a \underbrace{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2}_{\text{neliö}} - \underbrace{\frac{b^2}{4a}}_{\text{vakio}} + c
 \end{aligned}$$

Tästä neliöksi täydennetyksi muodosta nähdään, että $P(x)$ on muotoa $a \cdot \text{neliö} + \text{vakio}$.

Kuvaaja on siis samanlainen kuin tapauksessa $ax^2 + c$, huippu on vain siirtynyt.

Koska neliö ≥ 0 , saadaan

- Kun $a > 0$, kyseinen vakio on polynomin pienin arvo ja kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.
- Kun $a < 0$, kyseinen vakio on suurin arvo ja kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

Paraabelin **huippu** (eli kuvaajan piste, jossa suurin tai pienin arvo saavutetaan) on aina kohdassa $x = -\frac{b}{2a}$, koska silloin neliö on nolla.

Koottuna:

Toisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ kuvaaja on

- ylöspäin aukeava paraabeli, kun $a > 0$
- alaspäin aukeava paraabeli, kun $a < 0$
- sitä kapeampi, mitä suurempi $|a|$ on.

Vastaukset

1.

- a) Ei ole.
- b) On.
- c) Ei ole.
- d) On.
- e) On.
- f) Ei ole.
- g) On.
- h) On. (Sieventämällä saadaan $2y - \frac{1}{2}$.)
- i) Ei ole.

2.

- a) 5
- b) $x^5, -3x^3, 2x, -1$
- c) $-3x^3$
- d) 1
- e) -1

3.

polynomi	termien lukumäärä	korkeimman asteen termin kerroin	polynomin asteluku	vakiotermi
$-2x^2 + 6x$	2	-2	2	0
$7x^3 - x - 15$	3	7	3	-15
$-9x^2 + 5$	2	-9	2	5
$-5x^{99}$	1	-5	99	0

4.

- a) 9
- b) 0
- c) 54
- d) -2

5.

- a) 2
- b) 1
- c) 8
- d) 5

6.

- a) 2
- b) 13
- c) 22
- d) 1
- e) $4x^2 + 6x + 4$

7.

polynomi	termien lukumäärä	korkeimman asteen termin kerroin	polynomin asteen kerroin	polynomin asteen termin kerroin
$x + xy^2 + 6y^2 - 1$	4	1	3	1
$ax^6 + y^4 - 4by^2 + \sqrt{2}$	4	a	6	4b
$100x + ix^3y^4 - 99y$	3	i	7	0
$8y - \frac{\sqrt{15}}{2}x^3$	2	$-\frac{\sqrt{15}}{2}$	3	0
$\sqrt{3}xy^6 + y^8 - 4x^2$	3	1	8	0

b) $3y^3 + 3y^2$

c) $2z^{10} + 2z^8 - 4z^6 + z^2 + 1$

14.

a) $x^3 + x^2 - 7x + 5$

b) $-x + x^2 + 13x + 3$

c) $x^3 + x^2 - 13x - 3$

15.

a) $P(x) = x^2 + 3$, $P(1) = 4$,

$P(-1) = 4$ ja $P(3) = 12$

b) $Q(x) = -x^3 + 5x^2 - 15x$,

$Q(1) = 21$, $Q(-1) = -9$ ja

$R(3) = -27$

8.

a) $f(-1,2) = (-1) \cdot 2^2 + (-1)^2 \cdot 2 = -4 + 2 = -2$

b) Kyllä.

9. $x^2 + y$, $x^2 + xy$, $y^2 + x$, $y^2 + xy$,
 $x^2 + y^2$

10. $R(0, \sqrt{2}, \frac{\pi}{2}) =$

$0 + 2 \cdot 2^4 - 0 + \pi - 2\pi = 32 - \pi$

11.

a) $8x$

b) $11x^2$

c) $-4y$

d) $5x$

12.

a) $7x + 5$

b) $3x - 4y$

c) $3x^2 - 4x$

d) $5y^3 - 2y^2 - y$

13.

a) $-x + 1$

16.

1. $3x + 3$

2. $2x$

3. $10x + 1$

17.

a) $R(x) = -x^3 + 8x - 15$, $R(1) = -8$,

$R(-1) = -22$ ja $R(3) = -18$

b) $S(x) = -2$, $S(1) = -1$,

$S(-1) = -3$ ja $S(3) = 1$

18.

a) x^3

b) $15x^2$

c) $10x^3$

d) $-18x^6$

19.

a) $2x + 6$

b) $x^2 - 2x$

c) $3x - 6x^2$

d) $x^3 + 5x^2$

20.

- a) $3x + 6y - 12$
- b) $x^2 + 5x + 6$
- c) $-2x^2 + 7x - 3$

21. Lauseke sievenee muotoon

$x^5 - x^3 - 2x$. Polynomien aste on 5.

22. a) ja d)

23.

- a) 0
- b) 2
- c) 5
- d) 1

24.

- a) Polynomien aste on kunkin tekijän korkeimpien asteiden summa, tässä siis $2 + 3 = 5$.
- b) Polynomien vakiotermi on kunkin tekijän vakiotermien tulo, tässä siis $1 \cdot 0 = 0$.

25.

- a) $-24x^2 + 6x$
- b) $-10x^4 + 2x^3$
- c) $90x^2 - 45x$
- d) $2x^2 - 6x + 1$

26.

- a) $2y^2 + 19y + 35$
- b) $x^3 + 3x^2 - 4x$

27. Voidaan merkitään $P(x) = ax + b$ ja

$Q(x) = cx + d$, koska molemmat funktiot ovat ensimmäisen asteen polynomifunktioita. (Käytämme kertoimien merkitsemiseen eri kirjaimia,

sillä lausekkeiden vakiot saattavat olla

keskenään erisuuret.) Sievennetään

$$P(Q(x)): P(Q(x)) = P(cx + d) =$$

$$a(cx + d) + b = acx + ad + b. \text{ Todetaan,}$$

että jos a ja c ovat reaalityyppisiä luvkuja,

niin myös niiden tulo on reaalityyppinen luku.

Sama pätee vakioille a ja d , joiden tulo

ja myös kyseisen tulon ja b :n summa on

vakio. Merkitään havainnollistamisen

vuoksi $ac = e$, ja $ad + b = f$. Nyt

lauseke $acx + ad + b$ voidaan kirjoittaa

uudelleen muodossa $ex + f$, josta

nähdään selvästi kyseessä olevan

ensimmäisen asteen polynomi.

Väite osoitetaan järjestykselle $Q(P(x))$

samalla tavalla, minkä jälkeen väite on

todistettu.

28.

- a) $2x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 13x - 12$
- b) $x^5 - x^3 - 4x^2 - 2x - 4$
- c) $x^5 - 1$
- d) $\frac{1}{5}x^3 - \frac{7}{15}x^2 - \frac{7}{15}x - \frac{2}{3}$

29. $\sqrt{2}$

30.

- a) $-4 + 2\sqrt{2}$
- b) $x^8 - 4x^5 + 4x^2$
- c) $-x^4 - 2x$
- d) $-16t^4 + 4t$

31.

$$\text{a) } P(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$\text{b) } Q(x-1) = (x-1) + 1 = x$$

$$\text{c) } P(Q(x)) = P(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

d) $Q(P(x)) = Q(x^2) = x^2 + 1$

32.

- a) $x^2 + 2xy + y^2$
- b) $x^2 - 2xy + y^2$
- c) $x^2 - y^2$

33.

- a) $x^2 + 6x + 9$
- b) $y^2 - 10y + 25$
- c) $x^2 - 16$
- d) $9x^2 + 12x + 4$

34.

a) Kaava ei päde, sillä esimerkiksi $(1 + 2)^2 = 3^2 = 9$, mutta $1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$. b) Kaava ei päde, sillä esimerkiksi $\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, mutta $\sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2$. c) Kaava ei päde, sillä esimerkiksi

$$\frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{6}{5}$$

, mutta

$$\frac{2}{1 + 1} = 1$$

35.

- a) $x^2 + 12x + 36$
- b) $9y^2 - 6y + 1$
- c) $9 - x^2$

36.

- a) $x^2 - 10x + 25$
- b) $49x^2 + 56x + 16$
- c) $-49x^2 + 81$
- d) $64x^2 - 64$

37. Sievennetään yhtälöiden vasempia puolia:

- a) $(t + v)^2 + (t - v)^2 = t^2 + 2tv + v^2 + t^2 - 2tv + v^2 = 2t^2 + 2v^2$.
- b) $(t + v)^2 - (t - v)^2 = t^2 + 2tv + v^2 - t^2 + 2tv - v^2 = 4tv$.

38.

- a) $(a + b)^2$
- b) $(x + 1)^2$
- c) $(y - 2)^2$
- d) $(a + 5)(a - 5)$

39. $ab = 2$

40.

- a) Parilliset luvut voidaan aina kirjoittaa muodossa $2k$, missä k on jokin kokonaisluku. Sijoitetaan lauseke muuttujan paikalle, niin funktion arvoksi saadaan $f(2k) = (2k)^2 + 2 \cdot 2k + 2 = 4k^2 + 4k + 2 = 2(2k^2 + 2k + 1)$. Koska k :n neliö on kokonaisluku, k kerrottuna toisella kokonaisluvulla on kokonaisluku, ja kokonaislukujen summat ovat kokonaislukuja, on $2k^2 + 2k + 1$ myös kokonaisluku. Funktion arvo saatiin siis kirjoitettua muodossa ”kaksi kertaa kokonaisluku”, joten mielivaltaisesta parillisesta luvusta tuli funktion arvoksi myös parillinen luku.
- b) Mielivaltaisen parittoman luvun voi kirjoittaa muodossa $2k + 1$, missä k on kokonaisluku. Nyt

funktion arvoksi saadaan

$$\begin{aligned}f(2k+1) &= (2k+1)^2 + 2(2k+1) + 2 \\&= 4k^2 + 4k + 1 + 4k + 2 + 2 = \\&= 4k^2 + 8k + 5 = 2(2k^2 + 4k + 2) + 1.\end{aligned}$$

Sulkeissa oleva lauseke on

a-kohdan päättelyllä aina

kokonaisluku, joten funktion arvo

on muotoa ”kaksi kertaa

kokonaisluku plus yksi”, eli aina

pariton luku. Parittomasta luvusta

tulee siis funktion arvona aina

pariton luku.

41. $(3 - 2\sqrt{2}) : (3 + 2\sqrt{2})$

42.

- a) $x^2 + 4x + 4$
- b) $x^2 - 10x + 25$
- c) $b^2 - 16$
- d) $x^2 - 2x + 1$
- e) $4x^2 + 4x + 1$
- f) $1 - a^2$
- g) $x^2 - 14x + 49$
- h) $y^2 + 2y + 1$
- i) $x^2 + 6xy + 9y^2$
- j) $9x^2 - 6x + 1$
- k) $4x^2 - 1$
- l) $t^2 - 4t + 4$
- m) $4x^2 + 12x + 9$
- n) $a^2 - 4a + 4$
- o) $25x^2 - 4$
- p) $9 - c^2$
- q) $100x^2 - 20x + 1$
- r) $4a^2 + 4ab + b^2$
- s) $x^2 + 12x + 36$

43.

- a) $(1 - a)(1 + a)$
- b) $(a - 2)^2$
- c) $(2x + 1)^2$
- d) $(x - 7)^2$
- e) $(10x - 1)^2$
- f) $(2a + b)^2$
- g) $(y + 1)^2$
- h) $(x + 2)^2$
- i) $(2x + 1)(2x - 1)$
- j) $(t - 2)^2$
- k) $(5x + 2)(5x - 2)$
- l) $(b + 4)(b - 4)$
- m) $(x - 1)^2$
- n) $(3 - c)(3 + c)$
- o) $(x + 6)^2$
- p) $(2x + 3)^2$
- q) $(x - 5)^2$
- r) $(x - 3y)^2$
- s) $(3x - 1)^2$

44.

- a) $(2b - 1)^2$
- b) $(4t + 3)(4t - 3)$
- c) $(3x + 2y)^2$
- d) $(x - \frac{1}{2})^2$
- e) $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

45.

- a) $2x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 13x - 12$
- b) $x^5 - x^3 - 4x^2 - 2x - 4$
- c) $x^5 - 1$
- d) $\frac{1}{5}x^3 - \frac{7}{15}x^2 - \frac{7}{15}x - \frac{2}{3}$

46.

- a) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 b) $(a+b)^4 =$
 $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
 c) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

47.

- a) $(100+1)^2 =$
 $100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10\,201$
 b) $99^2 = (100-1)^2 =$
 $100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 9\,801$
 c) $49 \cdot 51 = (50-1)(50+1) =$
 $50^2 - 1^2 = 2\,500 - 1 = 2\,499$
 d) $35^2 - 25^2 = (35+25)(35-25) =$
 $60 \cdot 10 = 600$
 e) $170^2 - 30^2 = (170+30) \cdot (170-30) =$
 $200 \cdot 140 = 28\,000$

48.

- a) $63^2 + 37^2 =$
 $(50+13)^2 + (50-13)^2 =$
 $2 \cdot 50^2 + 2 \cdot 13^2 = 2 \cdot 2\,500 + 2 \cdot 169 =$
 $5\,000 + 338 = 5\,338$
 b) $101^2 + 99^2 =$
 $(100+1)^2 + (100-1)^2 =$
 $2 \cdot 100^2 + 2 \cdot 1^2 = 2 \cdot 10\,000 + 2 \cdot 1 =$
 $20\,000 + 2 = 20\,002$

49.

- a) Tutki lukujen $2 + \sqrt{3}$ ja $2 - \sqrt{3}$ tuloa.
 b) Lukujen $4 + \sqrt{3}$ ja $4 - \sqrt{3}$ tulo on 13, joten ne eivät ole käänteislukuja.
 c) Yleisesti
 $\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)^{-1} = a - \sqrt{a^2 - 1}$

50.

$$\begin{aligned}(x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy) \\&= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 \\&= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 \\&= x^4 + 4y^4\end{aligned}$$

(Yhtälöä

$(x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy) =$
 $x^4 + 4y^4$) kutsutaan *Sophie Germainen*
 identiteetiksi.)

51. Ainoa ratkaisu on $x = 3$, $y = 8$.

Opastus: jaa yhtälön vasen puoli tekijöihin muistikaavalla.

52. 49. Perustelu muistikaavoilla: Jos lukujen keskiarvo on 7, ne ovat muotoa $7 + a$ ja $7 - a$. Lasketaan tulo:
 $(7 + a)(7 - a) = 7^2 - a^2 = 49 - a^2 \geq 49$.
 Siis 49 on suurin mahdollinen.

53.

- a) 6
 b) -6
 c) -6
 d) 6
 e) 0

54.

- a) tulo > 0
 b) tulo < 0
 c) tulo > 0
 d) tulo on 0

55.

- a) $x = 0$ tai $x = -3$
 b) $x = 4$ tai $x = -3$

c) $x = 0$ tai $x = 5$

56.

- a) $b > 0$
- b) $b < 0$ ja $b = 0$
- c) $b > 0$ ja $b < 0$
- d) Mikään vaihtoehto ei kelpaa.

57.

- a) $y = 0$ tai $y = -4$
- b) $x = 2$, $x = 1$ tai $x = -5$
- c) $x = -1$

58. $x^4 \geq 0$ ja $x^2 \geq 0$, joten $f(x) \geq 1$.

59.

- a) tulo ≥ 0
- b) tulo ≤ 0
- c) tulo on 0

60.

- a) $g = 2$ tai $t = -1$. Tehtävässä ei ole selvää, minkä muuttujan suhteen yhtälö pitäisi ratkaista, joten se on ratkaistu molempien muuttujien suhteen.
- b) $x = 0$ tai $x = 5$
- c) $w = -1$

61. Tulossa esiintyy tekijänä $(x - x) = 0$.

Niinpä tulon nollasäännön mukaan

$$(a - x) \cdot (b - x) \cdot (c - x) \cdot \dots \cdot (x - x) \cdot \dots \cdot (\ddot{a} - x) \cdot (\ddot{o} - x) \\ = (a - x) \cdot (b - x) \cdot (c - x) \cdot \dots \cdot 0 \cdot \dots \cdot (\ddot{a} - x) \cdot (\ddot{o} - x) \\ = 0$$

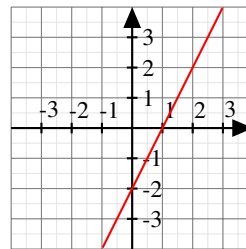
62. On, esimerkiksi luku 2. (Saadaan yhtälön $x^2 = 2x$ eräänä ratkaisuna.)

63. Binomin kuutio $(a - b)^3$ kehitettynä polynomiksi on $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, joka järjesteltynä uudelleen on $a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$. Nyt riittää osoittaa, että vertailukohteesta $a^3 - b^3$ poikkeava osa $-3a^2b + 3ab^2$ on negatiivinen. Jaetaan tekijöihin: $-3a^2b + 3ab^2 = 3ab(-a + b) = 3ab(b - a)$, mistä tulos seuraa, koska lähtöoletuksen perusteella $3ab$ on positiivinen ja $b - a$ negatiivinen, jolloin koko lausekekin on.

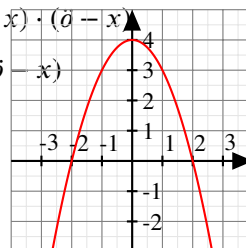
64.

- a) 8
- b) 0
- c) -1
- d) Nollakohdat ovat $x = 1$ ja $x = 3$.
- e) Kun $x = 0$ tai $x = 4$.

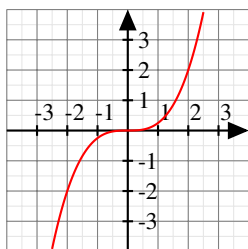
65.



a)



b)



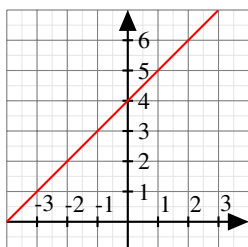
c)

66.

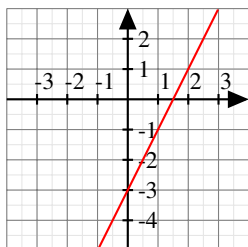
a) $x = -1$

b) $x \approx 0,35$ ja $x \approx 5,65$

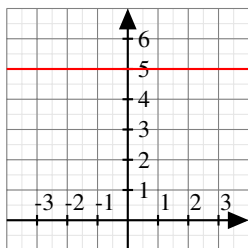
68.



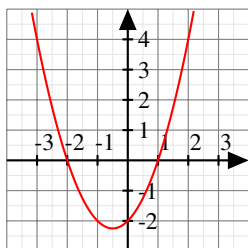
a)



b)

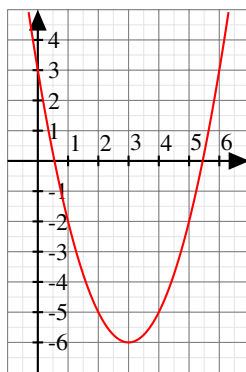


c)

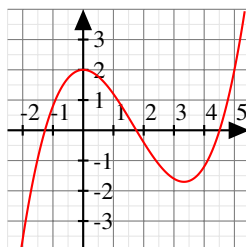


d)

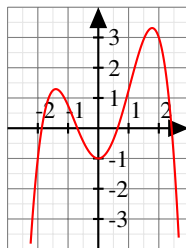
69.



a)



b)



c)

70. Mitä enemmän termejä, sitä parempi vastaavuus.

71.

- a) tosi
- b) tosi
- c) tosi
- d) tosi
- e) epätosi

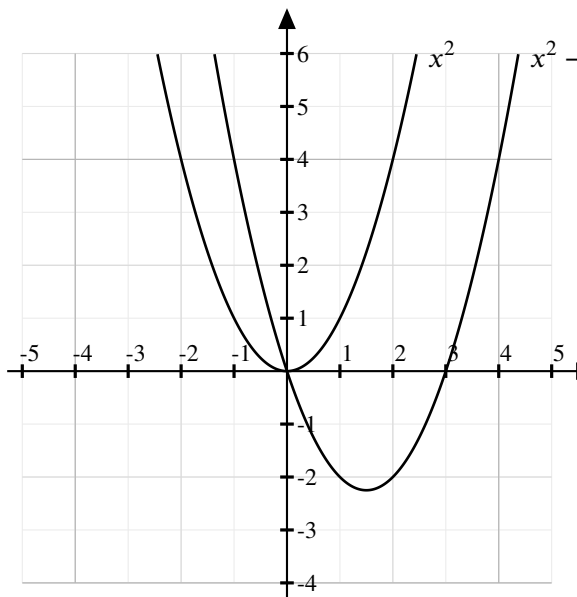
72.

- a) epätosi
- b) tosi
- c) epätosi
- d) ehdollisesti tosi
- e) ehdollisesti tosi

- f) epätosi, mikään luku ei voi olla suurempi kuin luku+1.

73.

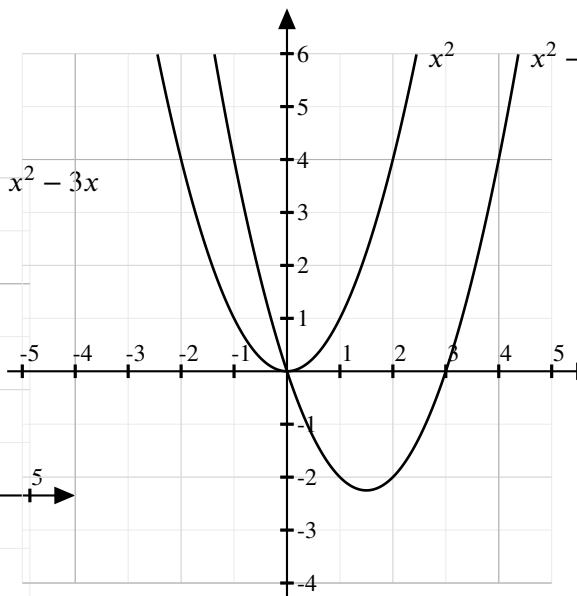
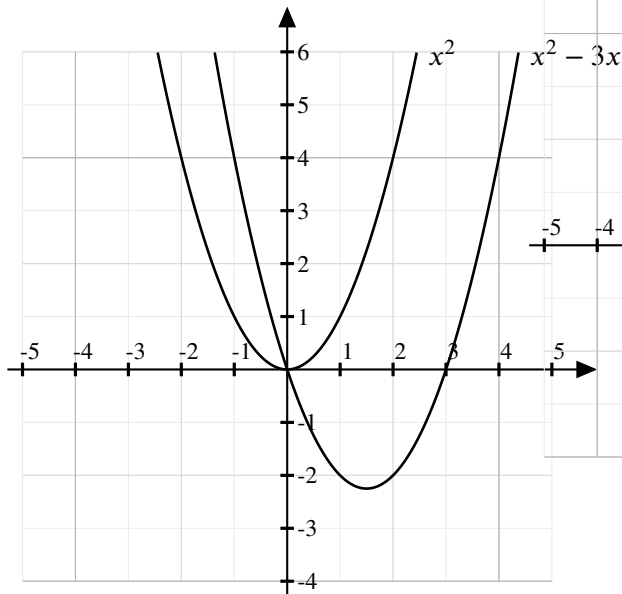
- a) epätosi
b) tosi (mutta subjektiivista)
c) tosi
d) tosi
e) epätosi
f) epätosi
g) tosi



74.

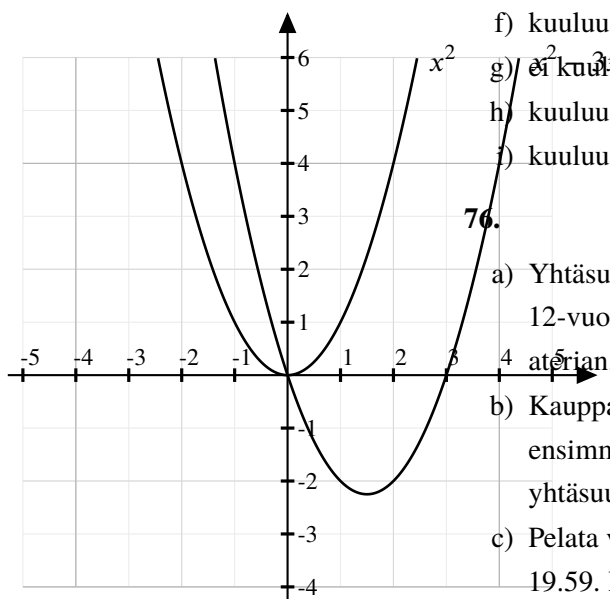
c) $c \in [5, \infty[$

a) $x \in]-10, 10[$

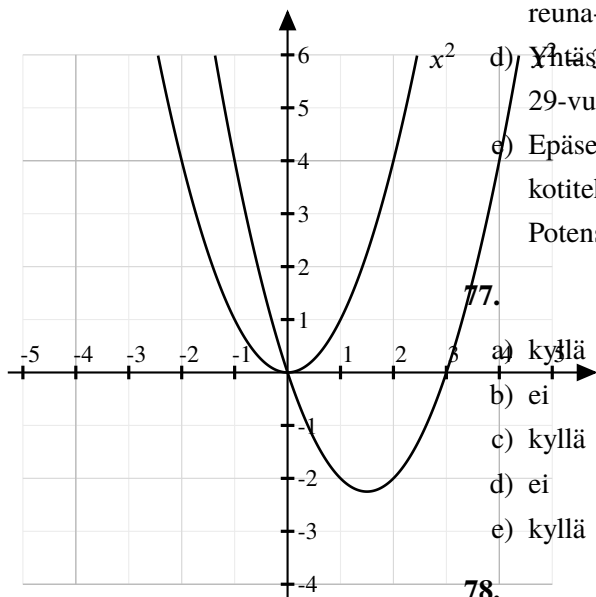


b) $x \in]-9, 7]$

d) $s \in [5, 7\frac{1}{2}]$



e) $x \in]1,5]$



75.

- a) ei kuulu
- b) kuuluu
- c) kuuluu
- d) ei kuulu
- e) kuuluu

- f) kuuluu
- g) ei kuulu
- h) kuuluu
- i) kuuluu

76.

- a) Yhtäsuuruus on mukana, eli 12-vuotiaatkin saavat lasten aterian.
- b) Kauppa on auki myös kuun ensimmäisenä päivänä, eli yhtäsuuruus on mukana.
- c) Pelata voi vielä, kun kello on 19.59. Klo 20.00 on jo myöhäistä, joten ilmaisun ei käsitetä sisältävän reuna-arvoaan.

- d) Yhtäsuuruus on mukana, myös 29-vuotiaat kelpaavat jäseniksi.
- e) Epäselvää. Se, pitääkö kotitehtävänä lukea myös Potenssi-luku, riippuu opettajasta.

77.

- a) kyllä
- b) ei
- c) kyllä
- d) ei
- e) kyllä

78.

- a) kyllä
- b) kyllä
- c) kyllä
- d) kyllä
- e) kyllä

79.

- a) kyllä
- b) kyllä
- c) kyllä
- d) kyllä
- e) kyllä

81. Esimerkiksi väite $-2 > 1$ on epätosi. Jos kuitenkin epäyhtälön molemmat puolet korotetaan parilliseen potenssiin, esimerkiksi toiseen, saadaankin tosi väite: $(-2)^2 > 1^2 \Rightarrow 4 > 2$.

82. Käsitellään erilaiset tilanteet kolmessa eri osassa: Jos joko m tai n on nolla, niin $0^2 + n^2 \geq 0 \cdot n$ eli $n^2 \geq 0$, mikä pitää paikkansa kaikilla kokonaisluvuille n . Symmetrian vuoksi sama pätee myös tapaukselle $m = 0$. Jos sekä m että n ovat nollia, saadaan $0 \geq 0$, mikä on myös tosi epäyhtälö. Jos m ja n ovat erimerkkiset, niin epäyhtälön vasenpuoli on edelleen neliöönkorotuksien vuoksi positiivinen. Epäyhtälön oikea puoli on kertolaskun merkkisäännön perusteella varmasti negatiivinen. Koska kaikki negatiiviset luvut ovat kaikkia positiivisia lukuja pienempiä, epäyhtälö pätee tässä tapauksessa.

Viimeinen tapaus: m ja n on samanmerkkiset. Epäyhtälön $m^2 + n^2 \geq mn$ vasen puoli muistuttaa binomin neliötä. Täydennetään se vähentämällä molemmilta puolilta epäyhtälöä lauseke $2mn$, jolloin saadaan: $m^2 + n^2 - 2mn \geq mn - 2mn$ eli $m^2 - 2mn + n^2 \geq -mn$, minkä voi

kirjoittaa binomin neliön kaavalla muodossa $(m - n)^2 \geq -mn$. Neliöönkorotus varmistaa, että epäyhtälön vasen puoli on aina epänegatiivinen. Koska oletuksen mukaan m ja n ovat samanmerkkiset, tulo $-mn$ on negatiivinen. Jälleen epäyhtälö pitää paikkansa, ja kaikki mahdolliset $m:n$ ja $n:n$ yhdistelmät on käsitelty.

83. Merkataan vaimon ikää v :llä ja puolisonsa ikää p :llä. Näiden avulla voimme kirjoittaa kaksoisepäyhtälön $v < 30 < p$. Huomataan myös, että $p = 34$. Alle kolmekymppinen täyttää 35 vuotta aikaisintaan kuuden vuoden kuluttua. Lisätään kaksoisepäyhtälöön puolittain $+6$, jolloin saadaan $v + 6 < 36 < p + 6$. Koska $p = 34$, niin $v + 6 < 36 < 40$, eli puolisonsa on välttämättäkin täyttänyt 40 vuotta.

84. Aloita tiedosta $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0$ ja sievennä.

85. Opastus: Aloita tiedosta $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ ja sievennä. Yhtäsuuruus pätee, kun $a = b$.

86. $10_9 = 9_{10}$

87.

- a) $x = 42$
- b) $x = 32$
- c) $x = 7$

88.

- a) $x = 9$
- b) $x = 28$

c) $x = 4$

89. $2x - 10 = 8 \Leftrightarrow 2x = 18 \Leftrightarrow x = 9$.

Vastaus: Antero keksi luvun 9.

90. $3x + 5 = \frac{1}{2}x$, $x = -2$.

91.

a) $42x + 25$

b) $\frac{1}{1,23}x + 0,5$

92.

a) $x = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

b) $x = \frac{2}{13}$

c) $x = -3$

93.

a) $x = -\frac{1}{13}$

b) ei ratkaisuja

c) yhtälö on toteutuu kaikilla reaaliluvuilla

94. $x = 2$

95. Kello 13.05.27

96.

a) $x > 6$

b) $x < 63$

c) $y < 2,8$

d) $y \geq -6$

e) $z \geq -883$

f) $z \geq 25$

97.

a) riittää ($22,5 \text{ m}^2 < 30 \text{ m}^2$)

b) ei riitä ($45 \text{ m}^2 > 30 \text{ m}^2$)

c) noin 6,7 m seinälle

98.

a) $r = 3$

b) $r \geq 3$

c) $y < 2$

d) $x = -12\frac{2}{3}$

e) $x < 9\frac{4}{5}$

99. 8 257 km

100.

a) $x < -6$

b) ei ratkaisua

101.

a) $x > 9$

b) $\frac{5}{3} < x < 9$

c) $x < \frac{5}{3}$

102.

a) $x \geq \frac{2}{3}$

b) $x \leq 0$

c) $y \geq 2$

d) $y \geq -3$

e) $z \leq -1000$

f) ei ratkaisuja

103. Muodostettava epäyhtälö on

muotoa $\frac{2 \cdot 6 + n}{3} \geq 6,5$, missä

$n \in 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, josta ratkaisuna

saadaan $n \geq 7,5$. Opiskelija tarvitsee siis vähintään arvosanan 8.

104. $-\frac{3}{4} \leq x < 1$

105.

a) Ylös

b) Alas

c) Ylös

d) Ylös

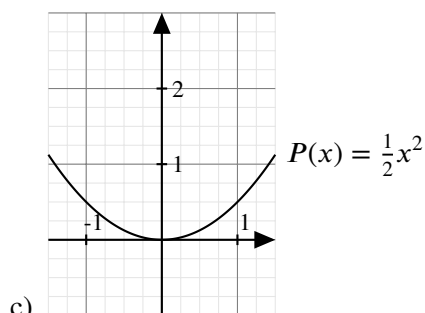
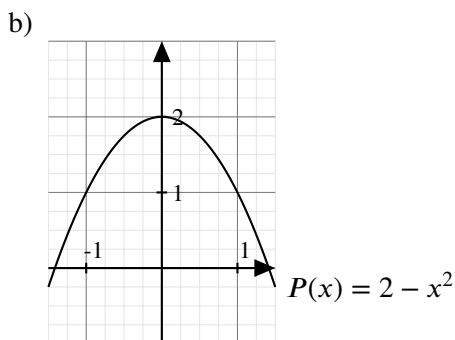
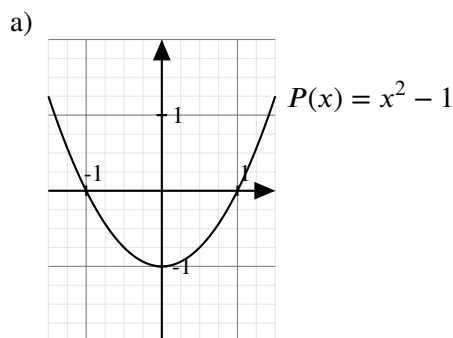
e) Ylös

f) Alas

106.

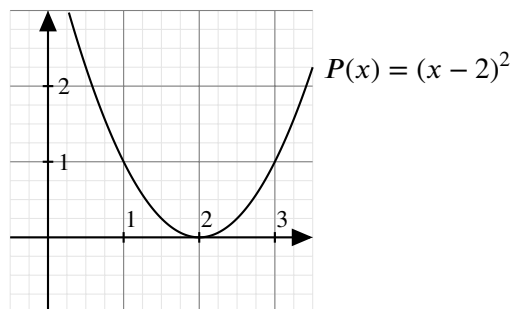
- a) P alaspäin, Q ylöspäin.
- b) nollakohdat: $x = 0$ ja $x = 2$
- c) $x = -1$ tai $x = 1$
- d) 1, sillä kun $x = 0$, $Q(x) = 1$.

107.



c)

d)



108.

- a) $x = \pm 4$
- b) Ei ratkaisuja.
- c) $x = \pm \sqrt{13}$.
- d) $x = \pm 2$

109.

- a) $x = 0$ tai $x = 3$
- b) $x = 0$ tai $x = -4$.
- c) $x = 0$ tai $x = \frac{3}{7}$

110.

- a) $(x + 1)^2$
- b) $(x + 3)^2$.
- c) $(x - 2)^2$

111.

- a) $x = 3$ tai $x = -1$. Neliöksi täydennettynä $(x - 1)^2 = 4$
- b) $x = -5$ tai $x = 1$. Neliöksi täydennettynä $(x + 2)^2 = 9$
- c) Ei ratkaisua. Neliöksi täydennettynä $(x - 3)^2 = -1$

112.

- a) $x = \pm 10$
- b) Ei ratkaisuja.
- c) $x = \pm \sqrt{10}$
- d) Ei ratkaisuja.

e) $x = \pm 7$

113.

- a) $x = 0$ tai $x = 72$
- b) $x = -56$ tai $x = 0$
- c) $x = -13$ tai $x = 0$
- d) $x = -21,5$ tai $x = 0$

114.

- a) $x = \pm 6$
- b) $x = 0$ tai $x = 85$
- c) $x = 0$ tai $x = -17$
- d) $x = 0$ tai $x = -2$

115.

- a) $x = 4$ tai $x = 2$. Neliöksi täydennettynä $(x - 3)^2 = 1$.
- b) Ei ratkaisua. Neliöksi täydennettynä $(x + 1)^2 = -3$
- c) $x = 2 \pm \sqrt{11}$ Neliöksi täydennettynä $(x - 2)^2 = 11$.
- d) $x = \frac{1}{2}$ tai $x = -1\frac{1}{2}$ Neliöksi täydennettynä $(x + \frac{1}{2})^2 = 1$.
- e) $x = -2$ tai $x = \frac{1}{2}$. Neliöksi täydennettynä $(x + \frac{3}{4})^2 = \frac{25}{16}$.

116. Olkoon yhtälö muotoa

$$ax^2 + bx + 4 = 0.$$

Muodostetaan yhtälöpari:

$$\begin{cases} a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 4 = 0 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 4 = 0 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuna saadaan $a = \frac{2}{3}$ ja

$$b = -3\frac{1}{3}. \text{ Yhtälö on siis } \frac{2}{3}x^2 - 3\frac{1}{3}x + 4 = 0.$$

Vastauksen voi saada myös ilmaisemalla

polynomiyhtälön tekijämuodossa

$$a(x - 2)(x - 3) = 0. \text{ Tässä tarvitaan}$$

kuitenkin juurten ja tekijöiden välistä

yhteyttä, joka opetetaan vasta

myöhemmin tässä kirjassa.

117. 500 metriä

118.

- a) $x = -1$, $x = 1$ tai $x = 7$
- b) $x = -4$, $x = -3$, $x = 3$ tai $x = 4$
- c) $x = 1$ tai $x = 4$

119.

- a) $x = \pm 3$
- b) Ei ratkaisuja
- c) $x = \pm 4$
- d) $x = \pm 1$

120.

- a) $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ tai $x = -\frac{1}{2}$
- b) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{3}$

121.

- a) $x = 0$ tai $x = 3$
- b) $x = 0$ tai $x = -5$
- c) $x = 0$ tai $x = 2$
- d) $x = 0$ tai $x = \frac{10}{3}$

122.

a) Vastaukseksi saadaan

$$1\,414\text{ s} = 23\text{ min } 34\text{ s. Käytännössä}$$

hyvä vastaustarkkuus voisi olla

esimerkiksi 25 min.

b) Tehtävä ei huomioi ilmanvastusta.

Ihminen saavuttaa korkeimmillaan

$$\text{rajanopeuden } v_{raja} \approx 55 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tehtävän mallissa putoavan ihmisen nopeus nousee $v_{\max} \approx 141 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ asti. Todellisuudessa putoaminen siis kestää vieläkin kauemmin.

123. $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ tai $x = -\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$

124. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ tai $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

125.

- a) $x = -5$ tai $x = -1$
- b) $x = 3$ tai $x = -1$
- c) Ei ratkaisuja.

126.

- a) $x = \frac{2}{3}$
- b) Ei ratkaisua
- c) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$
- d) $x = 3$

127.

- a) $x = 1$ tai $x = \frac{2}{3}$
- b) $x = 0$ tai $x = -23$
- c) $x = 4$ tai $x = -4$
- d) $x = \frac{-9 \pm 5\sqrt{3}}{6}$

128.

- a) $x = 2 \pm \sqrt{11}$
- b) $x = \frac{13 \pm \sqrt{165}}{2}$
- c) $x = \frac{3 \pm \sqrt{89}}{8}$
- d) $x = \frac{-12 \pm \sqrt{1614}}{35}$

129. Luvut ovat 3 ja 5.

130. 58 cm levyinen

131. Paraabelin nollakohdat ovat $x = 3$ ja $x = 12$, joten pallo lensi $12 - 3 = 9$ metriä.

132.

Kun $t = -\frac{1}{4}$, toisen asteen termin kerroin on 0, ja aina
Kun $t \neq -\frac{1}{4}$ kyseessä on toisen asteen yhtälö ja ratkaisu

133.

a) Merkitään korkokerrointa x :llä.

$$(1\,000x - 20)x - 20 = 1,024 \cdot 1\,000$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{10\,441}}{100} \approx 1,03181211580212$$

Vastaus: 3,2%

b) Merkitään Viljamin sijoittamaa summaa a :lla.

$$(ax - 20)x - 20 = 1,050a$$

$$a(x^2 - 1,050) = 20x + 20$$

$$a = \frac{20x + 20}{x^2 - 1,050} \approx 2\,776,41224$$

Vastaus: 2 800 €

134.

a) Jarrutusmatka on 100 metriä.

b) Noin 3,5 sekunnin kuluttua.

(Todellisuudessa putoamisessa kestää kauemmin, sillä lasku ei huomioi ilmanvastusta.)

135. $x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

136. $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. (Jos negatiivisetkin luvut sallittaisiin, $(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1^2 + 2^2$ kävisi myös.) Löytyykö vastaava 4 + 3 luvun sarja? Entä pidempi?

137.

- a) $x = -2$ tai $x = -1$
- b) $x = 3/2$ tai $x = -4$
- c) $x = 4$ tai $x = -5/3$
- d) $x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$
- e) $x = 3$ tai $x = -8$

138.

- a) $\frac{1 \pm \sqrt{53}}{2}$
- b) Ei ratkaisua reaalitylukujen joukossa.
- c) $1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$
- d) $x = 1$ tai $x = 2$

139.

- a) Ei ratkaisuja.
- b) $\frac{27 \pm \sqrt{684}}{10} = \frac{27 \pm 6\sqrt{19}}{10}$

140. 7,7 cm

141.

- 1. $x = a$, jos $a \neq 2$ ja $a \neq 1$
- 2. $x \neq 1$, jos $a = 2$
- 3. ei ratkaisua, jos $a = 1$

142.

- a) $\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,618$
- b) Noin 105 cm:n korkeudella.

143. Toinen kasvaa kahdella ja toinen ei muutu.

144. $x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

145. Kirjoitetaan yhtälö muotoon

$$(x^3 - 2)^2 + (x^3 - 2) - 2 = 0 \text{ ja}$$

sovelletaan ratkaisukaavaa niin, että

ratkaistaan pelkän x sijaan yhtälöstä

$$\text{lauseke } x^3 - 2. \text{ Näin saadaan } x^3 - 2 = 1$$

tai $x^3 - 2 = -2$, joista voidaan edelleen ratkaista $x = \sqrt[3]{3}$ tai $x = 0$.

146. $x = -1$, $x = 0$ tai $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

147.

- a) $D = 4$, eli kaksi ratkaisua.
- b) $D = -1$, eli ei ratkaisuja.
- c) $D = 0$, eli 1 ratkaisu
- d) $D = 209$, kaksi ratkaisua

148.

- a) Kaksi.
 $D = 12^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-4) = 336 > 0$
- b) Ei yhtään.
 $D = 12^2 - 4 \cdot 12 \cdot 4 = -48 < 0$

149. Nollakohtien määrä voidaan päätellä diskriminantin arvosta.

- a) alaspäin, 2 nollakohtaa
- b) ylöspäin, ei yhtään nollakohtaa
- c) ylöspäin, 2 nollakohtaa
- d) ylöspäin, 1 nollakohta

150. $c > \frac{25}{4} = 6,25$. (Halutaan $D < 0$, eli $5^2 - 4 \cdot 1 \cdot c < 0$.)

151.

- a) Kaksi. $D = (-22)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-25) = 1484 > 0$
- b) Nolla. $D = 10^2 - 4 \cdot (-6) \cdot (-76) = -1724 < 0$
- c) Yksi. $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$

152. Sopivat a :n arvot ovat $\frac{1}{2}$, $11 + 6\sqrt{3}$ ja $11 - 6\sqrt{3}$.

153. Tutkitaan nollakohtia diskriminantin avulla:

$D = 6^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-6) = 36 - 48 = -12 < 0$, joten polynomilla ei ole nollakohtia. Se ei siis voi vaihtaa merkkiä missään. Korkeimman asteen termin kerroin on negatiivinen, joten polynomin kuvaaja on alaspäin avautuva paraabeli. Koska nollakohta ei diskriminantin perusteella ole, on paraabelin huippu x -akselin alapuolella, ja siten kaikki polynomin arvot negatiivisia.

154.

$ax^2 + c = 0$ Joko kaksi ratkaisua tai ei yhtään ratkaisua. ($D \neq 0$)

$ax^2 + bx = 0$ Aina kaksi ratkaisua. ($D > 0$)

155.

a) Kaksi.

$$D = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-4) = 288 > 0$$

b) Kaksi.

$$D = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-10) = 216 > 0$$

c) Yksi. $D = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 0$

d) Kaksi.

$$D = 10^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-30) = 700 > 0$$

156. Pitää olla

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-k) \geq 0. \text{ Siis } k \leq \frac{1}{4}.$$

$$\mathbf{157.} \quad a = 11 \pm 2\sqrt{30}.$$

158.

a) Kaksi, kun $a < 8$, yksi, kun $a = 8$, ja nolla, kun $a > 8$.

b) Kaksi, kun $-4 < a$ ja $a \neq 0$; yksi, kun $a = -4$ tai $a = 0$, ja nolla, kun

$$a < -4.$$

159. Suunta " $\Rightarrow$ ": $(c_1x + c_2)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$c_1^2x^2 + 2c_1c_2x + c_2^2 = 0 \Rightarrow D =$$

$$(2c_1c_2)^2 - 4c_1^2c_2^2 = 4c_1^2c_2^2 - 4c_1^2c_2^2 = 0$$

Suunta " $\Leftarrow$ ":

$$D = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow b^2 = 4ac \Leftrightarrow$$

$$c = \frac{b^2}{4a} \Rightarrow ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 0 \Leftrightarrow (2ax + b)^2 = 0$$

160.

a) $-2 < x < 2$

b) $x \geq 0$ tai $x \leq -1$

c) ei ratkaisuja

d) $x > -2$ tai $x < -3$

161.

a) $\frac{5-\sqrt{57}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{57}}{2}$

b) $\frac{3-3\sqrt{3}}{2} < x < \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$

c) $1 - \sqrt{19} < x < 1 + \sqrt{19}$

162.

a) $x \geq 0$ tai $x \leq -3,25$

b) $x \geq \sqrt{194}$ tai $x \leq -\sqrt{194}$

c) $0,875 \geq x \geq 0$

d) $2\sqrt{\frac{3}{11}} \geq x \geq -2\sqrt{\frac{3}{11}}$

163.

a) $x \leq -2$ tai $x \geq 2$

b) $-3 \geq x \leq 1$

c) Kaikilla x :n arvoilla.

d) Ei millään x :n arvoilla.

164. 33 autoa/minuutti

165. Funktiolla ei ole nollakohtia ($D < 0$) ja sen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Helpompi tapa:

$$f(x) = (x - 3)^2 + 1 > 0.$$

166. Juuria on kaksi, kun

$D = 4t^2 - 48t > 0$. Tämä toteutuu, kun $t < 0$ tai $t > 12$.

167.

a) $1,00 \text{ €} < \text{myyntihinta} < 4,5 \text{ €}$.

b) $2,75 \text{ €}$, jolloin voitto on $612,50 \text{ €}$.

168. $a < 0$: $-\frac{1}{a} > x > -1$

$a = 0$: $x > -1$

$1 > a > 0$: $x > -1$ tai $x < -\frac{1}{a}$

$a = 1$: $x \neq -1$

$a > 1$: $x \in \mathbb{R}$

169.

$$p < \frac{-167 - \sqrt{205\,705}}{372} \quad \text{tai} \quad p > \frac{-167 + \sqrt{205\,705}}{372}$$

170. $2,8 \text{ s}$

171. Pitää olla

$$D = (-r)^2 - 4 \cdot r \cdot (-1) = r^2 + 4r < 0.$$

Siis $-4 < r < 0$.

172. $a < 0$: $x \geq -\frac{2}{a}$ tai $x \leq \frac{1}{a}$

$a = 0$: ei ratkaisuja

$a > 0$: $x \geq \frac{1}{a}$ tai $x \leq -\frac{2}{a}$

173.

a) nollakohdat $x = 1$ ja $x = -6$,

$$P(x) = (x - 1)(x + 6)$$

b) nollakohdat $x = \frac{1}{4}$ ja $x = 1$,

$$P(x) = -2(4x - 1)(x - 1)$$

c) nollakohta $x = 2$, $P(x) = (x - 2)^2$

174.

a) $(x - 5)(x + 3)$

b) $\frac{1}{3}(x - 3)^2$

c) $2(2x^2 + x + 1)$, ei jakaudu 1. asteen tekijöihin.

175. $P(x)$:llä ja $R(x)$:llä on kaksi

yhteistä tekijää, koska on kaksi kohtaa, jossa molemmat saavat arvon nolla.

Vastaavasti $Q(x)$:llä ja $R(x)$:llä on yksi yhteinen tekijä. $S(x)$:llä ei ole yhteisiä tekijöitä minkään muun polynomin kanssa.

176.

a) $(x + 3)(x - 3)$ (muistikaava)

b) $(2x - 1)^2$ (muistikaava)

c) $4(x - 2)(x + 1)$

177.

$$P(x) = -(x + 3)(x - 4) = -x^2 + x + 12$$

178. Kirjoitetaan polynomi tekijämuodossa ja kerrotaan auki:

$(x - a)(x - b) = x^2 - 2(a + b)x + ab$. Nyt syntyneen polynomin vakiotermi on ab .

179.

$$P(x) = 5x(x - 5) + 3 = 5x^2 - 25x + 3$$

180.

a) $x = \frac{1}{4}$ ja $y = 5\frac{5}{8}$.

b) $x = -\frac{b}{2a}$

181.

a) $(2x + 1)^2$

b) $4(x^2 + x + 1)$

c) $(3 + x)(3 - x)$

182.

a) $(x - 3)(x + 2)$

b) $(x - 1)(x - 7)$

183.

a) $5(x + 3)(x - 1)$

b) $2(2x - 1)(3x - 1)$

c) $-2(2x - 3)(2x + 1)$

184.

a) $-5(2x + 1)(x - 1)$

b) $(4x)(2x - 1)(x - 1)$

185. $P(x) = -2(x + 1)(x - 2)(x - 3) = -2x^3 + 8x^2 - 2x - 2$

186.

a) $k(49x^2 + 7x + 1) = 0$

b) $k(7x^2 \pm x\sqrt{7} + 1) = 0$

187. Totta, sillä polynomin $P(x)$ kerrointen summa on $P(1)$. (Koska $1^n = 1$.)

188. $P(x) = 3x^2 + 4x + 1$

189. Esimerkiksi

a) $P(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$
(nollakohdat $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ ja $x = 3$)

b) $P(x) = x^2(x - 1)$ (nollakohdat $x = 0$ ja $x = 1$)

c) $Q(x) = x^4$ (nollakohta $x = 0$)

d) $R(x) = x^4 + 1$

190.

a) Nollakohtia on kolme, joten polynomin aste on vähintään 3. (Itse asiassa todellinen aste on 5, mutta sitä on vaikea päätellä silmämääräisesti kuvaajasta.)

b) Vakiotermi on 2, koska $P(0) = 2$

191. $P(x) = \frac{1}{2}(x - 2)(x + 1)(x - 3)$

192.

$P(x) = -3(x - 1)(x - 2)(x - 3) - 2 = -3x^3 + 18x^2 - 33x + 18$

193. Tarkastele polynomien erotuksen nollakohtia.

194.

a) $x = 0$ tai $x = -2$ tai $x = 17$

b) $x = -2$

c) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{7}$

195.

a) $x = 0$ tai $x = 2$ tai $x = 3$

b) $x = \pm 2$

c) $x = 0$ tai $x = \pm 1$

196.

a) $x = \pm\sqrt{6}$

b) $x = \pm\sqrt{5}$

c) $x = \pm\sqrt{3}$ tai $\pm\sqrt{5}$

197.

a) $x = 0$ tai $x = 1$ tai $x = 2$

b) $x = 0$ tai $x = -5$ tai $x = \pm 1$

c) $x = 4$ tai $x = \pm 2$

198.

a) $x = \pm 2$

b) $x = 0$ tai $x = \pm 2$

c) $x = \sqrt[3]{3}$ tai $x = -1$

d) $x = \pm 1$

199. Luvut ovat -1 , 0 ja 1 tai 14 , 15 ja 16 .

200. $x = 0$, $x = 1$ tai $x = \sqrt[113]{5}$

201.

a) $x = 0$ tai $x = \pm 1$

b) $x = 0$ tai $x = \pm 1$ tai $x = \pm 2$

202. $x = 0$ tai $x = -2 + \sqrt{3}$ tai $x = -2 - \sqrt{3}$

203.

- a) $x = \pm\sqrt{1}$
- b) $x = 0$ tai $x = \pm\sqrt{1}$
- c) $x = \pm\sqrt[4]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (= \pm\sqrt[4]{\varphi})$ (luku φ on kultaisena leikkauksena tunnettu vakio)

204. Muuttujan arvoilla 0 ja 1

205.

- a) $x = 0$ tai $x = -7$
- b) $x = 0$ tai $x = 4$
- c) $x = 0$ tai $x = -3$
- d) $x = 0$ tai $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

206. $a = 30$. Yhtälön ratkaisut ovat $1, \frac{1}{5}$ ja $-\frac{1}{6}$. (Vihje: kirjoita kolmannen asteen polynomi mielivaltaisen, tuntemattoman toisen asteen polynomin ja binomin $x - 1$ tulona ja avaa tulosta sulkeet. Vertaa kolmannen asteen polynomin kertoimiin.)

207. $x = -1, x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

208. $x = 2$

209.

- a) $x \leq 1$ tai $2 \leq x \leq 3$
- b) $1 < x < 2$ tai $x > 3$
- c) $x < 1$ tai $2 < x < 3$

210. $x < 0$ tai $0 < x < 1$

211. $-1 \leq x \leq 1$

212. Ei ratkaisuja.

213. $-\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$

214. $P(x) > 0$ kun $x > \sqrt{a}$ tai $-\sqrt{a} < x < 0$.

215.

- a) $x \leq -3$ tai $2 \leq x < 5$
- b) $-1 \leq x < 0$ tai $x \geq 1$

216. $x \leq 0$ tai $x = \frac{3}{2}$

217. $x > \sqrt[5]{2}$ tai $-1 < x < 1$

218.

- a) $x \in \mathbb{R}$
- b) Epäyhtälöllä ei ole ratkaisuja
- c) Vinkki: Käytä tehtävänannon havaintoa ja tutki, millä x :n ja y :n arvoilla summattavat saavat arvon 0

219.

- a) $-5 < x < 0$ tai $3 < x$
- b) $x < 0$ tai $x = 1$

220. $x < -1$ tai $-1 < x < 0$

221. Koska mielivaltaisen vakion a voidaan aina tulkita olevan kerroin muuttujan potenssille x^0 .

222. Vähennyslasku määritellään $a - b = a + (-b)$, eli vastaluvun avulla kaikki vähenyslaskut voidaan tulkita yhteenlaskuina.

223. Niin kuin yhdenkin muuttujan polynomin tapauksessa, korkein termin aste eli muuttujan potenssin eksponentti määrää koko polynomin asteen. Jos termissä on kerrottuna eri muuttujia keskenään, termin asteluku on näiden

muuttujien potenssien eksponenttien summa.

224. *Kahta* asiaa: toisaalta mikä tahansa tulo, jossa tekijänä on nolla, on arvoltaan nolla. Toisaalta, jos tulo on nolla, niin tiedetään, että varmasti ainakin yksi tulon tekijöistä on nolla.

225. Tekijät ovat alhaisempaa astetta kuin alkuperäinen polynomi, kunhan tekijänä ei ole vakiopolynomi.

226. Potenssiinkorotettava lausekkeen suurin aste määrää koko polynomin termin. Koska sulkeita avattaessa x^3 lopulta korotettaisiin potenssin 15, sinne tulisi korkeimmaksi termiksi $x^{3 \cdot 15} = x^{45}$. Asteen saa siis selville kertomalla korkeimman asteen termin eksponentit potenssilla, johon sulkeisiin laitettu polynomi korotetaan.

227. Epäyhtälö (muu kuin $\neq$) kuvaa järjestystä, ja kahden toisistaan poikkeavan reaali-luvun keskinäinen järjestys muuttuu aina, jos molemmat muutetaan vastaluvuikseen (eli on kerrottu negatiivisella luvulla) – aiemmin pienemmästä luvusta on tullutkin nyt suurempi. Totuusarvon säilyttämiseksi tulee sen vuoksi kääntää epäyhtälömerkin suunta.

228. b) 1, 0, -1, $\sqrt{2}$ ja -1 337

229. d) $ab = 0$

230. c) -3 ja 50

231. e) 7.

232. c) 0

233. e) $4x^2 - 4x + 1$

234. c) $f(0) = g(0)$

235. e) neljä

236.

- a) Tosi
- b) Tosi
- c) Epätosi
- d) Tosi

237.

- a) $3x$
- b) x^3
- c) $-10x^2$
- d) $14x^2$
- e) $-3x^5$

238.

- a) $3x^3 - x^2 + 3x$
- b) $2x - 8$
- c) $2x^2 + 2x + 7$
- d) $3x^2 - 21x$
- e) $-6x^7 + 24x^4 - 2x^2$

239.

- a) $x^2 + 2x - 8$
- b) $3a^2 - 2ab - b^2$
- c) $a^2 + 6a + 9$
- d) $x^2 - 2x + 1$
- e) $16x^2 - 1$

240.

- a) $x(4x + 1)$
- b) $5xy(x^2 + 2y)$
- c) $(y + 3)(y - 3)$
- d) $(x - 2)^2$

e) $(x^3 + 10)(x - 5)$

241.

a) $x^4 - 2x^2 + 1$

b) $a^{12} + 6a^6b^3 + 9b^6$

c) $-(144 - 9x^2) = 9x^2 - 144$

d) $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

242. $x = 3$ tai $x = -2$ tai $x = 1$.

243. Koska $x^6 \geq 0$ ja $x^2 \geq 0$. (Parilliset potenssit.)

244.

a) Opastus: Kerro sulut auki.

b) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

245.

a) $x = -2$, $x = 0$ ja $x = 1$

b) $-2 < x < 0$ tai $1 < x$

c) Vähintään 3. (Kuvaajassa näkyvän alueen ulkopuolella voisi olla lisää.)

246. $(a + b + 4)(a + b - 4)$.

Opastus: Älä kerro aluksi sulkuja auki.

$16 = 4^2$

247.

a) 0

b) $(x - y)^2$

248.

a) $x = \frac{7}{3}$

b) $x = -\frac{5}{6}$

c) 15

249.

a) $2 \leq x \leq 7$

b) $-3 < y \leq 0$

c) $z < 5$

250.

a) $x > -2$

b) $x < -\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}$

c) $x \geq -\frac{1}{4}$

251. 7 h tai sitä pidemmissä vuokrissa

252. Yksi karahvi painaa yhden kuudesosakirahvin.

253. $x \geq \frac{a}{a+2}$, kun $a > -2$

$x \leq \frac{a}{a+2}$, kun $a < -2$

$x \in \mathbb{R}$, kun $a = -2$

254.

a) $x = \pm\sqrt{13}$

b) $x = 0$ tai $x = -\frac{2}{5}$

c) $x = -3$ tai $x = \frac{1}{2}$

255.

a) $-2 < x < 3$

b) $x \leq 0$ tai $x \geq 5$

256. Vähintään 9, korkeintaan 21.

Ratkeaa epäyhtälöstä $x(30 - x) > 186$.

257. $k = 7 \pm 4\sqrt{3}$. Diskriminantti on

$D = (k - 1)^2 - 4 \cdot k \cdot 3$.

258. $c = -40$

259. $-1 < x < -\frac{4}{7}$ tai $2 < x < 5$.

Huomioi, että suorakulmion B sivut ovat positiiviset vain, kun $-1 < x < 5$.

260. $x = 0$ tai $x = \sqrt[5]{\frac{5}{2}}$

261.

a) esimerkiksi $x^4 = -1$

b) esimerkiksi $x^4(x+1) = 0$

c) mahdotonta

262. $x = \pm\sqrt{3}$

263. $x = 0$ tai $x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$

264. Luvut, jotka ovat pienempiä kuin -1 ja luvut välillä $]0,1[$.

265.

a) $0 < x < \sqrt[3]{5}$

b) $x < -3$ tai $0 < x < \frac{1}{2}$

266. $\sqrt{12} \text{ m} \approx 3,46 \text{ m}$

267. $x = \frac{6}{\sqrt[5]{2}-1}$

268. $x \approx 0,69$, $x \approx 1,86$ tai $x \approx 3,03$.

269.

a) Ei ole polynomi, sillä muuttujan t eksponentti ei ole luonnollinen luku.

b) Yhdeksän

c) 22

d) Esimerkiksi 1,9665 (reuna-arvot eivät kuulu välille!)

e) $1 + \sqrt{2}$

f) $x = 2$

g) laskeva suora

h) Suoraan muistikaavalla saadaan $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$.

270.

a) Avaa ensimmäisestä yhtälöstä sulut, kumoa ykköset ja yhdistä ensimmäisen asteen termit oikealle – totea yhtäläisyys

b) Korottamalla $\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$ neliöön ja käyttämällä muistikaavoja saadaan $11 + 4\sqrt{6}$.

271.

a) $x \leq -\frac{6}{5}$

b) $\frac{2}{5} < x < 2$

272.

a) $z = 0$ tai $z = \frac{1}{2}$ tai $z = \sqrt{2}$

b) $z = -1$ tai $z = 1$

273. Kaikilla paitsi $k = 0$

274. Jos pankin korkokerroin on

$x = (1 + \frac{p}{100})$, niin vuoden kuluttua tilillä on rahaa $1\,000x$. Kahden vuoden kuluttua tilillä on rahaa

$((1\,000x) + 1\,000)x$, mikä sisältää

molemmat talletukset ja kaksi vuosikorkoa. Saadaan yhtälö

$$((1\,000x) + 1\,000)x = 2\,100 \text{ eli}$$

sievennettynä ja uudelleen järjesteltynä

$$1\,000x^2 + 1\,000x - 2\,100 = 0.$$

Ratkaisukaavalla tai laskimella saadaan

kaksi ratkaisua, joista hyväksytään vain

positiivinen: $x = \frac{1}{10}(\sqrt{235} - 5) \approx 1,033$.

Pankin tarjoama vuosikorkokanta on

siten 3,3 %.

275. -6 (vetoaminen paraabelin

symmetrisyyteen, että pohja on

nollakohtien puolivälissä, tai vastaus

nähdään neliöön täydennetystä

lausekkeesta perustellen, että reaaliluvun

neliö voi olla vähintään nolla)

276.

- a) Purkamalla sulkeet lausekkeesta $(x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$ saadaan vaadittu $x^3 \pm y^3$. (Huomaa, toisiaan vastaavat etumerkit!)
- b) Kirjoitetaan epäyhtälö $z^3 - 8 \geq z - 2$ a-kohdan kaavan avulla muodossa $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) \geq z - 2$. Epäyhtälöstä voidaan jakaa tekijä $z - 2$ pois, mutta sitä varten tutkitaan erikseen tilanteet $z = 2$, $z < 2$, ja $z > 2$. Jos $z = 2$, niin alkuperäinen epäyhtälö yksinkertaistuu muotoon $0 \geq 0$, mikä pitää paikkansa. Jos $z > 2$, niin $z - 2 > 0$, eli lauseke $z - 2$ on positiivinen. Jakamalla epäyhtälö puolittain kyseisellä lausekkeella säilyttää suuruusjärjestyksen, eli epäyhtälömerkkiä ei tarvitse kääntää. Siis epäyhtälöstä $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) \geq z - 2$ on yhtäpitävä epäyhtälön $z^2 + 2z + 4 \geq 1$ kanssa. Tästä saadaan edelleen toisen asteen polynomiepäyhtälö $z^2 + 2z + 3 \geq 0$. Vasemman puolen polynomin diskrimanttia tutkimalla selviää, että kyseisellä polynomilla ei ole nollakohtia. Koska lisäksi kyseisen polynomin kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, voidaan päätellä, että polynomi $z^2 + 2z + 3$ saa vain positiivisia

arvoja. Epäyhtälö $z^2 + 2z + 3 \geq 0$ pitää siis paikkansa kaikilla kahta suuremmilla muuttujan z arvoilla.

Jos $z < 2$, epäyhtälö

$$(z - 2)(z^2 + 2z + 4) \geq z - 2$$

muuttuu muotoon $z^2 + 2z + 4 \leq 1$

eli $z^2 + 2z + 3 \leq 0$. Aiemmin jo todettiin, että vasemman puolen polynomi on aina positiivinen, joten epäyhtälö ei pidä paikkaansa millään kahta pienemmällä z :n arvoilla.

Yhdistämällä osatulokset

päädytään päätelmään, että

alkuperäisen epäyhtälön

$$z^3 - 8 \geq z - 2 \text{ ratkaisu on } z \geq 2.$$

277.

- a) Ei ole, sillä muuttujan t eksponentti (-2) ei ole luonnollinen luku.
- b) kuusi
- c) 18
- d) $\pi < x \leq 42$
- e) Suoraan muistikaavalla saadaan $y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2$.
- f) $x + 10^{51}$
- g) alaspäin avautuva paraabeli
- h) $x = -23$
- i) kuusi

278.

- a) $t = \pm 3$, $t = 0$ tai $t = 1$
- b) $t = 0$ tai $t = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})$ tai $xt \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$

279. Diskriminantin lauseke on $16a^2 + 4a$, ja yhtälöllä on yksi

reaalijuuri (kaksoisjuuri) jos ja vain jos diskriminantin arvo on nolla.

Ratkaistaan siis yhtälö $16a^2 + 4a = 0$.

$$16a^2 + 4a = 0$$

$$4a(4a + 1) = 0$$

Eli $4a = 0$ tai $4a + 1 = 0$.

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan ratkaistua $a = 0$, ja toisesta $a = -\frac{1}{4}$.

280. Osoitetaan ensin, että keskiarvo $\frac{a+b}{2}$ on suurempi kuin a :

$$a < b \quad || + a$$

$$2a < a + b \quad || : 2$$

$$a < \frac{a+b}{2}$$

Osoitetaan sitten, että keskiarvo on pienempi kuin b :

$$a < b \quad || + b$$

$$a + b < 2b \quad || : 2$$

$$\frac{a+b}{2} < b$$

Koska keskiarvo on suurempi kuin a mutta pienempi kuin b , on se a :n ja b :n välissä. (Todistuksen kannalta ei ole väliä, minkä merkkisiä a ja b ovat.)

281. $n = -5$

282.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(q) &= 12,9q - 10q - 500 = \\ &= 2,9q - 500 \end{aligned}$$

b) Merkataan kilogrammahinnan euromääristä lisäystä x :llä. Nyt voittofunktion määrittelevä yhtälö on $P(q, x) = (12,9 + x)(q - 50x) - 10(q - 50x) - 500$, eli uusi kilogrammahinta on $12,9 + x$ ja myynnin määrä $q - 50x$.

Sijoitetaan tehtävänannossa annettu $q = 180$, niin saadaan

$$P(180, x) = (12,9 + x)(180 - 50x) - 10(180 - 50x) - 500.$$

Ottamalla tästä tai jo aiemmasta muodosta yhteinen tekijä saadaan lyhyempi muoto $P(180, x) = (12,9 + x - 10)(180 - 50x) - 500$ eli $P(180, x) =$

$$(2,9 + x)(180 - 50x) - 500 \text{ (vrt. a-kohdan sievennetty lauseke).}$$

Liiketoiminta on tappiotonta, kun

$$P(x) \geq 0, \text{ missä } P(x) = 0$$

tarkoittaisi tilannetta, että kauppiaan tulot kattavat täsmälleen kaikki kustannukset. Ratkaisemme siis epäyhtälön

$$(2,9 + x)(180 - 50x) - 500 \geq 0,$$

joka sievennettynä on

$$-50x^2 + 35x + 22 \geq 0. \text{ Polynomin}$$

$$-50x^2 + 35x + 22 \text{ nollakohdat}$$

ovat ratkaisukaavan tai laskimen

ratkaisuohjelman perusteella

$$x = -0,4 \text{ ja } x = 1,1. \text{ Koska}$$

polynomin korkeimman asteen

termin kerroin on negatiivinen,

olisi polynomin kuvaaja alaspäin

aukeava paraabeli, ja siten

kuvaajan perusteella voidaan päätellä, että funktio P saa positiiviset arvonsa nollakohtiensa välissä. Nollakohtia $x = -0,4$ ja $x = 1,1$ vastaavat kilohinnat ovat $12,9 - (-0,4) = 13,3$ ja $12,9 - 1,1 = 11,8$, molemmat yksikössä €/kg. Jotta myyntitappiolta välttyttäisiin, kauppiaan tulee asettaa kilohinnaksi vähintään 11,8 €/kg ja korkeintaan 13,3 €/kg. (Näiden rajojen välillä tulee voittoa., rajojen ulkopuolella tappiota.)

283.

- a) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
 b) Binomin kuutioksi täydentämällä saadaan yhtälö potenssiyhtälö $(x - 1)^3 = 8$, jonka ratkaisuna $x = 3$

284. Nollakohtien erotusfunktion määrittelee yhtälö $f(a) = \frac{\sqrt{4-8a^2}}{a}$. Määrittelyjoukkoa rajoittavia tekijöitä ovat neliöjuuri ja jakolasku. Nimittäjän perusteella vaaditaan $a \neq 0$, neliöjuuren perusteella $4 - 8a^2 \geq 0$. Epäyhtälöstä saadaan ratkaisuksi $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Yhdistämällä tiedot saadaan määrittelyjoukoksi kaksiosainen reaalilukuväli, jonka osat erottaa luku nolla: $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}] \setminus \{0\}$.

Arvojoukon voi päätellä asettamalla funktion arvoksi tuntematon t ja

ratkaisemalla yhtälöstä muuttuja x :

$$\frac{\sqrt{4-8x^2}}{x} = t$$

$$\sqrt{4-8x^2} = tx$$

$$4 - 8x^2 = (tx)^2 = t^2x^2$$

$$t^2x^2 + 8x^2 = 4$$

$$(t^2 + 8)x^2 = 4$$

$$x^2 = \frac{4}{t^2 + 8}$$

$$x = \pm \frac{2}{\sqrt{t^2 + 8}}$$

Huomataan, että saadun lausekkeen perusteella ei ole mitään syytä rajoittaa t :n arvoja. Funktion arvojoukko on siis koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$.

285.

- a) Ei ole, sillä muuttujan k eksponentti $\frac{1}{2}$ ei ole luonnollinen luku.
 b) kuusi
 c) 18
 d) $\pi < x \leq 42$
 e) $x \in]\frac{2}{3}, 100]$
 f) Jos $x \propto y$, niin voidaan kirjoittaa $x = ky$, missä k on vakio. Yksiterminen lauseke ky on polynomi.

286. Puretaan sulkeet auki ja

täydennetään binomien neliöiksi.

tulon nollasääntöä:

$$(a^2 + nb^2)(c^2 + nd^2)$$

$$y^{2n} - y^n = 0$$

$$= a^2c^2 + na^2d^2 + nb^2c^2 + n^2b^2d^2 \quad (y^n)^2 - y^n = 0$$

$$= a^2c^2 + n^2b^2d^2 + na^2d^2 + nb^2c^2 \quad y^n \cdot y^n - y^n = 0$$

$$= a^2c^2 + n^2b^2d^2 + na^2d^2 + nb^2c^2 + 2nabcd - 2nabcd$$

$$= a^2c^2 + 2nabcd + n^2b^2d^2 + na^2d^2 - 2nabcd + nb^2c^2$$

$$= (ac + nbd)^2 + na^2d^2 - 2nabcd + nb^2c^2$$

$$= (ac + nbd)^2 + n(a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2)$$

$$= (ac + nbd)^2 + n(ad - bc)^2$$

Eli joko $y^n = 0$ tai $y^n - 1 = 0$.

Ensimmäinen yhtälö voi päteä vain, jos

$y = 0$. (Jos käsitellään n :n eri arvoja,

niin eksponenttifunktio ei voi saada

milloinkaan arvoa 0.) Tällöin vaaditaan

yksikäsitteisyyden vuoksi $n \neq 0$, koska

0^0 ei ole määritelty.

Huom.! Voi myös ”lähteä lopusta”, eli purkaa lauseke

$(ac + nbd)^2 + n(ad - bc)^2$ ja sitten

ryhmitellä vastaus tulomuotoon

$(a^2 + nb^2)(c^2 + nd^2)$. Kumpikin käy.

Toisesta yhtälöstä saadaan $y^n = 1$, joka

voi olla tosi vain, jos joko $n = 0$ ja $y \neq 0$

(minkä tahansa nollasta poikkeavan luvun

nollas potenssi on arvoltaan yksi) tai

sitten $y = 1$ ja n on mielivaltainen.

287. Ammus osuu maahan noin 3,22 sekunnin päästä.

288. Ei millään t :n reaali-lukuarvoilla.

Yhtälön ratkaisut ovat siis: $y = 0$ ja

$n \neq 0$

$n = 0$ ja $y \neq 0$

$y = 1$ ja mikä tahansa n

289. Kun $1 - \sqrt{2} < x < 0$ tai $x > 1 + \sqrt{2}$

290. $t^5 - t^4 = t^2 - t^3$ vastaa yhtälöä $t^5 - t^4 + t^3 - t^2 = 0$, jonka taasen saa yhteisen tekijän (useaan kertaan) ottamalla muotoon $t^2(t - 1)(t^2 + 1) = 0$, eli reaaliset nollakohdat ovat $t = 0$ ja $t = 1$.

292. Lausekkeen perusteella

nollakohdat ovat $\frac{b}{a}$, $\frac{a^2+b^2}{2ab}$ ja $\frac{a}{b}$. Koska

$0 < a < b$, niin a on positiivinen, ja

kaksoisepäyhtälö voidaan jakaa sillä niin,

että järjestys säilyy (”merkkien suuntaa

ei tarvitse kääntää”): $0 < 1 < \frac{b}{a}$. Samoin

voidaan tehdä b :llä: $0 < \frac{a}{b} < 1$.

Vertailemalla nähdään, että selvästi

$\frac{a}{b} < \frac{b}{a}$. Kolmas nollakohta on kahden

muun aritmeettinen keskiarvo, joten se

291. Alkuperäinen yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $y^{2n} - y^n = 0$ kanssa. Sovelletaan

on varmasti niiden välissä.

293.

- a) On, sillä sievennetyssä muodossa $\frac{2}{3} + \frac{5}{3}t$ on selvästi ensimmäisen asteen polynomi.
- b) Yhdeksän
- c) 6
- d) $t \in]\infty, \pi]$
- e) $x = 2$
- f) $x - 2$

294. $P(2) = 0 \Rightarrow (k^2 + 2k) \cdot 2 + 2k = 0$

$$k^2 \cdot 2 + 2k \cdot 2 + 2k = 0$$

$$2k^2 + 4k + 2k = 0$$

$$k^2 + 2k + k = 0$$

$$(k + 1)^2 = 0$$

$$k + 1 = 0$$

$$k = -1$$

Tällöin siis

$P(x) = (1 - 2)x - 2 = -x - 2$, jonka kuvaaja on laskeva suora.

295. Diskriminantista $a^2 + 4a = 0$, josta kaksi juurta: $a = 0$ tai $a = -4$.

Tapaus $a = 0$:

$$x^2 + 0x - 0 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Tapaus $a = -4$:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

296. Merkataan x :llä kulkeneen datan määrää megatavuissa. Tällöin tarjouksen A hinta on $A(x) = 40$ (hinta aina 40 euroa, vakiofunktio) ja tarjouksen B hinta määritellään paloittain:

$$B(x) = \begin{cases} 25, & \text{kun } x \leq 100 \\ 0,12(x - 100) + 25, & \text{kun } x > 100 \end{cases}$$

Yhtäsuuruuden voi merkitä vaihtoehtoisesti myös jälkimmäisen lausekkeen ehtoon: $x \geq 100$.

Jälkimmäisessä ehdossa on pelkän x :n sijaan $x - 100$, jotta datamäärän lasku alkaisi nolasta, eikä heti sadan megatavun rajan ylitettyä tulisi $0,12 \cdot 100 = 12$ euron lisälaskua.

Alle sadan megatavun käytössä tarjous A ei voi olla halvempi, koska $40 > 25$. Sitä suuremmalla käytöllä sen sijaan tämä on mahdollista. Ratkaistaan siis epäyhtälö $40 < 0,12(x - 100) + 25$, josta selviää,

millä x :n arvoilla tarjous A on halvempi.

$$40 < 0,12(x - 100) + 25$$

$$15 < 0,12(x - 100)$$

$$125 < x - 100$$

$$225 < x$$

Tarjous A on siis halvempi, kun dataa siirretään kuukaudessa yli 225 megatavua.

297. Sieventämällä saadaan, että ratkaisut ovat muotoa

$$y = n^n(1 \pm \sqrt{1 + 2n}).$$
 Sijoittamalla

$n = 50$ saadaan laskimesta

kymmenpotenssimuodoiksi $-8,04 \cdot 10^{85}$ ja $9,81 \cdot 10^{85}$.

298.

$$x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 2x = x(x - \frac{1}{2})(x^2 - 4),$$

eli $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ tai $x = \pm 2$.

299.

a) Reaalilukujen joukko poislukien

$$t = -\frac{1}{3} \text{ ja } t = \pi$$

b) y -akseli leikkautuu, kun $t = 0$, eli

pisteessä $(0, \frac{\pi}{3})$. t -akseli leikkautuu

vain yhdessä pisteessä: $(-\pi, 0)$,

koska määrittejoukko ei sisällä

funktion lausekkeen osoittajan

toista nollakohtaa $-\frac{1}{3}$.

300. Katso luku Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava. (Johdosta on olemassa erilaisia variantteja.)

301. $x = 0$ tai $x = 4$

302.

a) $x > -3$

b) $x = -7$

303. $x = 0$ tai $x = 2$

304. $x = 4$

305. $x = 3$

306. $2x$

307. $x + 1$

308. $x < \frac{21}{22}$

309. 6

310.

a) $(x + 2)(x - 1)$

b) $A = \frac{1}{3}$ ja $B = -\frac{1}{3}$

311.

a) $x = 3$

b) $x = 0$ tai $x = -1$

c) $(x - 2)(x - 7)$

312. $x = -\frac{1}{12}$

313. $1 < x \leq 4$

314. $-1 \leq x \leq 2$

315. $4ab$

316. $x \geq \frac{3}{\sqrt{7}-4}$

317. $x = 2$ tai $x = -2$

318. $x = 0$ tai $x = -\frac{6}{7}$

319. $2\sqrt{a}$

320. $x > \frac{3}{2}$

321. $p = 4$, $q = -2$

322. $x = 0$ tai $x = 5$

$$323. x = -\frac{3}{2}$$

$$324. x \leq -\frac{1}{3}$$

$$325. x < \frac{5}{3}$$

$$326. x < -\frac{3}{4}$$

$$327. x = -\frac{2}{7} \text{ tai } x = 0 \text{ tai } x = 1$$

$$328. x = 1 \text{ tai } x = -\frac{1}{2}$$

$$329. x < \frac{2}{7}$$

$$330. x = 0 \text{ tai } x = \frac{6}{7}$$

$$331. 2x^3 + 6x$$

$$332. x = -\frac{1}{2}$$

$$333. x = \pm\sqrt{5}$$

$$334. -6 < a < 2$$

$$335. \frac{2x}{1-x^2}$$

$$336. x = \frac{1}{2}a(1 - \sqrt{5}) \text{ tai } x = \frac{1}{2}a(1 + \sqrt{5})$$

$$337. x < \frac{3}{2}$$

$$338. -2 \leq x \leq 0$$

$$339. x < 1, x \neq 0$$

$$340. x = -2 \text{ tai } x = \frac{1}{2}$$

$$341. a \leq -\frac{19}{3} \text{ tai } a \geq \frac{17}{3}$$

A

alaspäin aukeava, 125
aste, 11
asteluku, 11
avoin väli, 46

B

bikvadraattinen yhtälö, 101
binomi, 11
binomin neliö, 27

D

diskriminantti, 78

E

epänegatiivinen, 32

H

huippu, 127

K

kaksoisjuuri, 79
kerroin, 10

M

merkkikaavio, 104
monomi, 11
muistikaavat, 26

N

nollakohta, 39

P

paraabeli, 60
polynomi, 9
polynomifunktio, 14
polynomin aste, 11
puoliavoin väli, 46

S

suljettu väli, 46

T

termi, 10
trinomi, 11
tulon nollasääntö, 33

V

väli, 45
vakiotermi, 11

Y

ylöspäin aukeava, 125