Differentiaaliyhtälöistä

Markus Kettunen

24. helmikuuta 2009

Sisältö

1 Differentiaaliyhtälöistä

1.1 Johdanto

Differentiaaliyhtälö on yhtälö jossa esiintyy tuntemattoman funktion derivaattoja. Tarkoituksena on ratkaista kyseinen tuntematon funktio. Yhden muuttujan funktioiden tapauksessa puhutaan *tavallisista differentiaaliyhtälöistä.*

Esimerkkejä differentiaaliyhtälöistä ovat esimerkiksi

- $y'(x) = y(x)$
- $y'(x) = xy(x)^2 + y(x)$
- $y''(x) = y'(x)/x^2$, $x \neq 0$.

Tarkoituksena on löytää kaikki yhtälön ja annetut lisäehdot toteuttavat funktiot.

Usein kyllästytään merkitsemään parametria funktion perään, silloin kun se käy ilmi asiayhteydestä. Edelliset differentiaaliyhtälöt tavataan kirjoittaa muodossa

- $y' = y$
- $y' = xy^2$
- $y'' = y'/x^2$, $x \neq 0$,

jossa tulee muistaa y:n olevan funktio ja x:n funktion parametri.

1.2 Ratkaisun yksikäsitteisyydestä

Ratkaisun yksikäsitteisyys on minkä tahansa sovelluksen kannalta ehdottoman tärkeää. Jos tiedetään ongelman ratkaisun noudattavan tiettyä differentiaaliyhtälöä, mutta annetut ehdot täyttäviä funktioita on useampi kuin yksi, ei ratkaisua voida soveltaa. Myös numeerinen ratkaisu on hyödytöntä, sillä ei voida tietää mitä mahdollisista ratkaisuista numeerinen ratkaisu noudattaa milloinkin.

Yleisesti, jos lisäehtoja ei ole annettu, tavallisella differentiaaliyhtälöllä on joko äärettömän monta ratkaisua tai sitten ei yhtään. Esimerkiksi yhtälöllä $y'(x)^2 = -1$ ei ole yhtään ratkaisua, kun taas mikä tahansa funktio Ce^x, jossa C on reaaliluku, toteuttaa yhtälön $y'(x) = y(x)$, sillä $y'(x) = Ce^x$ ja $y(x) = Ce^x$.

Yksikäsitteisyydestä lisää myöhemmin.

1.3 Separoituvat differentiaaliyhtälöt

Usein yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $y' = f(x)g(y)$. Esimerkkejä tällaisista *separoituvista* differentiaaliyhtälöistä ovat muun muassa

- $y' = \underbrace{x^2}_{f(x)}\underbrace{y^2}_{g(y)}$
- $y' = \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{y}_{g(y)}$
- $y'' = -y = \underbrace{1}_{f(x)}\underbrace{(-y)}_{g(y)}$
- $y' = x = \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{1}_{g(y)}$.

Separointi tarkoittaa muuttujien erottelua. Tällöin, jos $g(y) \neq 0$, voidaan yhtälö

$$y' = f(x)g(y)$$

jakaa puolittain tekijällä $g(y)$, jolloin päästään muotoon

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x).$$

Nyt yhtälö on separoitu. Integroidaan puolittain muuttujan x suhteen. Huomataan, että yhtälön vasemmalla puolella on $\frac{1}{g(y(x))}$ ja sisäfunktion derivaatta $y'(x)$, joten integrointi on ainakin periaatteessa helppoa, jos $\frac{1}{g}$ osataan integroida.

Näin integroimalla saadusta yhtälöstä voidaan ratkaista y, jolloin puhutaan eksplisiittisestä yhtälöstä y:lle, tai vähintään kirjoittaa sille tavallinen yhtälö, jolloin puhutaan implisiittisestä yhtälöstä y:lle.

Ratkaisussa tulee koko ajan kiinnittää huomiota siihen, että jokainen välivaihe on yhtäpitävä edellisen välivaiheen kanssa.

Esimerkki 1. *Ratkaistaan tavallinen separoituva differentiaaliyhtälö $y' = x^2 - x^2y$, kun $y > 1$.*

Kirjoitetaan ensin yhtälön oikea puoli tulomuotoon, $x^2 - x^2y = x^2(1-y)$. Yhtälö on siis

$$y' = x^2(1-y),\ y > 1.$$

Koska $y > 1$, *on* $1-y < 0$ *ja voidaan jakaa tekijällä* $(1-y)$. *Yhtälö on nyt muodossa*

$$\frac{y'}{1-y} = x^2.$$

Integroidaan muuttujan x *suhteen ja saadaan yhtäpitävästi*

$$\int \frac{y'}{1-y}\ dx = \int x^2\ dx.$$

Vasemmanpuoleinen integraali voidaan kirjoittaa muotoon

$$\int \frac{dy}{1-y} = -\int \frac{dy}{y-1} = -\ln(y-1) + C_1.$$

Oikeasta puolesta tulee

$$\int x^2\ dx = \frac{1}{3}x^3 + C_2.$$

Siirretään integraalien vakiotermit oikealle puolelle vakioksi $C_3 = C_2 - C_1$ *ja saadaan yhtälö yhtäpitävästi muotoon*

$$\begin{aligned} -\ln(y-1) &= \frac{1}{3}x^3 + C_3, \\ \ln(y-1) &= -\frac{1}{3}x^3 - C_3, \\ y - 1 &= e^{-\frac{1}{3}x^3 - C_3}, \\ y &= 1 + e^{-\frac{1}{3}x^3}e^{-C_3}. \end{aligned}$$

Tässä C_3 *on mielivaltainen reaaliluku, joten* $-C_3$ *voi myös olla mikä tahansa. Näin ollen* e^{-C_3} *voi olla mikä tahansa positiivinen luku. Merkitään nyt* $C = e^{-C_3}$, $C > 0$, *ja alkuperäinen yhtälö on yhtäpitävästi kirjoitettu muotoon*

$$y = 1 + Ce^{-\frac{1}{3}x^3},\ C > 0.$$

Vakio C *voidaan kiinnittää vaatimalla esimerkiksi lisäehto* $y(3) = 5$, *joka siis tarkoittaa*

$$\begin{aligned} y(3) = 1 + Ce^{-\frac{1}{3}3^3} = 1 + Ce^{-9} = 5,\ \textit{eli} \\ C = 4e^9. \end{aligned}$$

Todetaan vielä, että $C > 0$ *kuten pitääkin. Siis ehdon* $y(3) = 5$ *toteuttava yhtälön* $y' = x^2 - x^2y$, $y > 1$ *ratkaisu on*

$$y(x) = 1 + 4e^9 e^{-\frac{1}{3}x^3}.$$