Differentiaaliyhtälöistä

Markus Kettunen

17. maaliskuuta 2009

Sisältö

1 Differentiaaliyhtälöistä

1.1 Johdanto

Differentiaaliyhtälö on yhtälö jossa esiintyy tuntemattoman funktion derivaattoja. Tarkoituksena on ratkaista kyseinen tuntematon funktio. Yhden muuttujan funktioiden tapauksessa puhutaan *tavallisista differentiaaliyhtälöistä.*

Esimerkkejä differentiaaliyhtälöistä ovat esimerkiksi

- $y'(x) = y(x)$
- $y'(x) = xy(x)^2 + y(x)$
- $y''(x) = y'(x)/x^2$, $x \neq 0$.

Tarkoituksena on löytää kaikki yhtälön ja annetut lisäehdot toteuttavat funktiot.

Usein kyllästytään merkitsemään parametria funktion perään, silloin kun se käy ilmi asiayhteydestä. Edelliset differentiaaliyhtälöt tavataan kirjoittaa muodossa

- $y' = y$
- $y' = xy^2$
- $y'' = y'/x^2$, $x \neq 0$,

jossa tulee muistaa y:n olevan funktio ja x:n funktion parametri.

1.2 Ratkaisun yksikäsitteisyydestä

Ratkaisun yksikäsitteisyys on minkä tahansa sovelluksen kannalta ehdottoman tärkeää. Jos tiedetään ongelman ratkaisun noudattavan tiettyä differentiaaliyhtälöä, mutta annetut ehdot täyttäviä funktioita on useampi kuin yksi, ei ratkaisua voida soveltaa. Myös numeerinen ratkaisu on hyödytöntä, sillä ei voida tietää mitä mahdollisista ratkaisuista numeerinen ratkaisu noudattaa milloinkin.

Yleisesti, jos lisäehtoja ei ole annettu, tavallisella differentiaaliyhtälöllä on joko äärettömän monta ratkaisua tai sitten ei yhtään. Esimerkiksi yhtälöllä $y'(x)^2 = -1$ ei ole yhtään ratkaisua, kun taas mikä tahansa funktio Ce^x, jossa C on reaaliluku, toteuttaa yhtälön $y'(x) = y(x)$, sillä $y'(x) = Ce^x$ ja $y(x) = Ce^x$.

Yksikäsitteisyydestä lisää myöhemmin.

2 Separoituvat differentiaaliyhtälöt

Usein yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $y' = f(x)g(y)$. Esimerkkejä tällaisista *separoituvista* differentiaaliyhtälöistä ovat muun muassa

- $y' = \underbrace{x^2}_{f(x)}\underbrace{y^2}_{g(y)}$
- $y' = \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{y}_{g(y)}$
- $y'' = -y = \underbrace{1}_{f(x)}\underbrace{(-y)}_{g(y)}$
- $y' = x = \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{1}_{g(y)}.$

Separointi tarkoittaa muuttujien erottelua. Tällöin, jos $g(y) \neq 0$, voidaan yhtälö

$$y' = f(x)g(y)$$

jakaa puolittain tekijällä $g(y)$, jolloin päästään muotoon

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x).$$

Nyt yhtälö on separoitu. Integroidaan puolittain muuttujan x suhteen. Huomataan, että yhtälön vasemmalla puolella on $\frac{1}{g(y(x))}$ ja sisäfunktion derivaatta $y'(x)$, joten integrointi on ainakin periaatteessa helppoa, jos $\frac{1}{g}$ osataan integroida.

Näin integroimalla saadusta yhtälöstä voidaan ratkaista y, jolloin puhutaan eksplisiittisestä yhtälöstä y:lle, tai vähintään kirjoittaa sille tavallinen yhtälö, jolloin puhutaan implisiittisestä yhtälöstä y:lle.

Ratkaisussa tulee koko ajan kiinnittää huomiota siihen, että jokainen välivaihe on yhtäpitävä edellisen välivaiheen kanssa. Lopuksi tulee vielä huomata, että ratkaisu on olemassa vain väleillä, joilla $g(y(x)) \neq 0$. Tämä tulee tarkistaa erikseen sijoittamalla y funktion $g(y)$ lausekkeeseen ja ratkaisemalla mahdolliset nollakohdat.

Esimerkki 1. Ratkaistaan tavallinen separoituva differentiaaliyhtälö $y' = x^2 - x^2y$, kun $y > 1$.

Kirjoitetaan ensin yhtälön oikea puoli tulomuotoon, $x^2 - x^2y = x^2(1-y)$. Yhtälö on siis

$$y' = x^2(1-y),\ y > 1.$$

Koska $y > 1$, on $1-y < 0$ ja voidaan jakaa tekijällä $(1-y)$. Yhtälö on nyt muodossa

$$\frac{y'}{1-y} = x^2.$$

Integroidaan muuttujan x suhteen ja saadaan yhtäpitävästi

$$\int \frac{y'}{1-y}\,dx = \int x^2\,dx.$$

Vasemmanpuoleinen integraali voidaan kirjoittaa muotoon

$$\int \frac{dy}{1-y} = -\int \frac{dy}{y-1} = -\ln(y-1) + C_1.$$

Oikeasta puolesta tulee

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C_2.$$

Siirretään integraalien vakiotermit oikealle puolelle vakioksi $C_3 = C_2 - C_1$ ja saadaan yhtälö yhtäpitävästi muotoon

$$\begin{aligned} -\ln(y-1) &= \frac{1}{3}x^3 + C_3, \\ \ln(y-1) &= -\frac{1}{3}x^3 - C_3, \\ y-1 &= e^{-\frac{1}{3}x^3 - C_3}, \\ y &= 1 + e^{-\frac{1}{3}x^3}e^{-C_3}. \end{aligned}$$

Tässä C_3 on mielivaltainen reaaliluku, joten $-C_3$ voi myös olla mikä tahansa. Näin ollen e^{-C_3} voi olla mikä tahansa positiivinen luku. Merkitään nyt $C = e^{-C_3}$, $C > 0$, ja alkuperäinen yhtälö on yhtäpitävästi kirjoitettu muotoon

$$y = 1 + Ce^{-\frac{1}{3}x^3},\ C > 0.$$

Vakio C voidaan kiinnittää vaatimalla esimerkiksi lisäehto $y(3) = 5$, joka siis tarkoittaa

$$y(3) = 1 + Ce^{-\frac{1}{3}3^3} = 1 + Ce^{-9} = 5, \text{ eli}$$

$$C = 4e^9.$$

Todetaan vielä, että $C > 0$ kuten pitääkin. Siis ehdon $y(3) = 5$ toteuttava yhtälön $y' = x^2 - x^2 y$, $y > 1$ ratkaisu on

$$y(x) = 1 + 4e^9 e^{-\frac{1}{3}x^3}.$$

3 Lineaariset differentiaaliyhtälöt

Differentiaaliyhtälö on lineaarinen jos se on muotoa

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x).$$

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on lineaarinen jos se on muotoa

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x),$$

ja ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö jos se on muotoa

$$y' + p(x)y = r(x).$$

3.1 Homogeeniyhtälöt

Lineaarista yhtälöä kutsutaan homogeeniseksi, jos $r(x) = 0$. Homogeenisen yhtälön ratkaisujen summat ja tulot ovat myös homogeenisen yhtälön ratkaisuja. Toisin sanoen, jos y_1 ja y_2 ovat homogeenisen yhtälön ratkaisuja, myös $\alpha y_1 + \beta y_2$ on saman homogeenisen yhtälön ratkaisu, jossa α ja β ovat mielivaltaisia reaalilukuja.

Toisen kertaluvun tapauksessa, jos $f = \alpha y_1 + \beta y_2$, pätee

$$f'' + p(x)f' + q(x)f'' = (\alpha y_1 + \beta y_2)'' + p(x)(\alpha y_1 + \beta y_2)' + q(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) =$$

$$\alpha(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + \beta(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$

joten $\alpha y_1 + \beta y_2$ on aina homogeeniyhtälön ratkaisu jos y_1 ja y_2 ovat homogeeniyhtälön ratkaisuja.

Homogeeninen lineaarinen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö voidaan ratkaista esimerkiksi separoimalla.

Esimerkki 2. Ratkaistaan esimerkin vuoksi homogeeninen lineaarinen ensimmäisen kertaluvun tavallinen differentiaaliyhtälö $y' + 3y = 0$.

$$y' + 3y = 0$$

$$y' = -3y$$

Selvästi $y = 0$ on ratkaisu. Tutkitaan ratkaisua välillä, jolla $y(x) \neq 0$. Tällöin yhtäpitävästi

$$\frac{y'}{y} = -3$$
$$\ln|y| = -3x + C_1$$
$$|y| = e^{-3x} e_1^C$$
$$y = \pm e_1^C e^{-3x} = C_2 e^{-3x},$$

jossa $C_2 \neq 0$. Huomataan kuitenkin, että jos $C_2 = 0$, saadaan tästä triviaaliratkaisu $y = 0$, joten $C_2 = 0$ käy myös.

Siis yleinen ratkaisu on $y = Ce^{-3x}$.

3.2 Epähomogeeniset yhtälöt

Oletetaan, että y_1 ja y_2 ovat epähomogeenisen lineaarisen differentiaaliyhtälön

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

ratkaisuja. Tällöin $(y_1 - y_2)$ toteuttaa homogeenisen differentiaaliyhtälön:

$$(y_1 - y_2)'' + p(x)(y_1 - y_2)' + q(x)(y_1 - y_2)$$

$$= y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 - (y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)$$
$$= r(x) - r(x) = 0.$$

Siis aina kun y_1 ja y_2 ovat epähomogeenisen yhtälön ratkaisuja, on $y_1 - y_2$ on vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisu. Jos siis tunnetaan jokin epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu y_1, pätee väistämättä epähomogeenisen yhtälön ratkaisulle y yhtälö $y(x) = y_1(x) + H(x)$, jossa $H(x)$ on jokin homogeenisen yhtälön ratkaisu.

Siis epähomogeenisen yhtälön kaikki ratkaisut saadaan kun lisätään homogeenisen yhtälön ratkaisuihin jokin epähomogeenisen yhtälön ratkaisu. Yksittäisratkaisu taas voidaan esimerkiksi arvata, vetää hatusta (n.s. Stetson-Harrison -menetelmä), tai kysyä oraakkelilta.

Esimerkki 3. Ratkaistaan yhtälö $y' = 2y + e^{2x}$.

Kirjoitetaan se ensin muotoon $y' - 2y = e^{2x}$ ja ratkaistaan aluksi homogeeniyhtälö $y' - 2y = 0$. Tämän ratkaisu saadaan mm. separoimalla ja se on Ce^{2x}.

Tarvitaan vielä jokin yhtälön

$$y' - 2y = e^{2x}$$

ratkaisu. Eksponenttifunktio olisi varmaan hyvä arvaus, sillä yhtälö sisältää eksponenttifunktiota ja homogeeniyhtälön ratkaisussa on eksponenttifunktio. Kokeillaan yritettä $y = Ae^{Bx}$.

Tällä yritteellä yhtälön vasen puoli menee muotoon

$$y' - 2y = ABe^{Bx} - 2Ae^{Bx} = (AB - 2A)\ e^{Bx}$$

ja oikea puoli muotoon e^{2x}. Jotta tämä yhtälö toteutuisi, tulisi olla $B = 2$ ja $AB - 2A = 1$, eli $2A - 2A = 0 = 1$. Tämä on ristiriita, joten arvaus meni pieleen.

Luultavasti ratkaisussa pitäisi silti olla mukana e^{2x}, mutta ilmeisesti jotain muutakin. Yksinkertainen yrite voisi olla esimerkiksi $y = A\ xe^{2x}$.

Sijoittamalla saadaan yhtälön vasemmalle puolelle

$$y' - 2y = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} - 2Axe^{2x} = Ae^{2x}.$$

Tämän tulisi olla yhtä kuin e^{2x}, ja näin selvästikin käy kun valitaan $A = 1$. Siis yksittäisratkaisuksi kelpaa $y = xe^{2x}$.

Loput ratkaisut ovat muotoa yksittäisratkaisu + homogeenisen yhtälön ratkaisu, joten kaikki ratkaisut ovat $y = xe^{2x} + Ce^{2x}$.

3.3 Vakion variointi

Vakion variointi on helppo ja toimiva menetelmä yksittäisratkaisun löytymiseen lineaariselle yhtälölle. Ratkaisun ideana on ratkaista ensin homogeeninen yhtälö. Sen jälkeen yritetään löytää yksi yksittäisratkaisu epähomogeeniselle yhtälölle varioimalla vakiota, eli korvaamalla homogeenisen yhtälön ratkaisun integrointivakio jollakin funktiolla, joka pyritään määrittämään.

Valaistaan menetelmää esimerkin kautta.

Esimerkki 4. Ratkaistaan yhtälö $y' = 2y + e^{2x}$ vakion varioinnilla. Oletetaan tunnetuksi homogeenisen yhtälön ratkaisu $y = Ce^{2x}$. Ratkaistaan epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu asettamalla $C = C(x)$ ja käytetään yritettä $y = C(x)e^{2x}$.

Yhtälön vasen puoli on nyt $y' = C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x}$.

Oikeaksi puoleksi saadaan $2y + e^{2x} = 2C(x)e^{2x} + e^{2x}$. Yhtälö on siis

$$C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} = 2C(x)e^{2x} + e^{2x}, \text{ eli}$$

$$C'(x)e^{2x} = e^{2x}.$$

Tästä seuraa $C'(x) = 1$ eli $C(x) = x + C_2$. Koska yksi ratkaisu riittää, valitaan $C_2 = 0$.

Siis $y = C(x)e^{2x} = xe^{2x}$ on haluttu yksittäisratkaisu. Loput ratkaisut saadaan lisäämällä tähän homogeenisen yhtälön ratkaisut, $y(x) = xe^{2x} + Ce^{2x}$.

3.4 Integroivan tekijän menetelmä

Integroivan tekijän menetelmä on usein mukavampi, mutta saattaa johtaa vaikeisiin integraaleihin ja soveltuu kunnolla vain ensimmäisen kertaluvun lineaarisiin differentiaaliyhtälöihin. Menetelmän etuna on, että homogeenisen yhtälön ratkaisua ei tarvitse tietää etukäteen.

Tutkitaan yhtälöä $a(x)y' + b(x)y = c(x)$. Oletetaan, että $a(x) \neq 0$, jolloin voidaan jakaa tekijällä $a(x)$ ja saattaa yhtälö normaalimuotoon,

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{c(x)}{a(x)}.$$

Merkitään nyt $\frac{b(x)}{a(x)} = p(x)$ ja $\frac{c(x)}{a(x)} = r(x)$ ja kirjoitetaan yhtälö muotoon

$$y' + p(x)y = r(x).$$

Menetelmän idea on kertoa yhtälö sopivalla funktiolla $\mu(x)$ niin, että yhtälön vasen puoli saadaan kirjoitettua tulon μy derivaattana.

Yhtälö $y' + p(x)y = r(x)$ päätyy siis kertomisen jälkeen muotoon

$$\mu y' + p(x)\mu y = \mu r(x),$$

jossa μ valitaan niin, että yhtälön vasen puoli on tulon μy derivaatta $\mu' y + \mu y'$.

Saadaan siis funktiolle μ yhtälö

$$\mu y' + p(x)\mu y = (\mu y)' = \mu' y + \mu y',$$

joka sievenee separoituvaksi yhtälöksi

$$p(x)\mu = \mu'.$$

Huomataan, että funktioksi μ kelpaa mikä tahansa edellisen yhtälön ratkaisu. Se voidaan myös arvata, tai integrointivakio voidaan valita itse esimerkiksi nollaksi.

Kun μ on tunnettu, voidaan alkuperäinen yhtälö kirjoittaa muotoon

$$(\mu y)' = \mu r(x)$$

ja integroida, jolloin y ratkeaa jakamalla yhtälö puolittain funktiolla μ,

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) r(x)\, dx.$$

Esimerkki 5. Ratkaistaan yhtälö $y' = 2y + e^{2x}$ integroivan tekijän menetelmällä.

Kirjoitetaan aluksi yhtälö muotoon $y' - 2y = e^{2x}$ ja kerrotaan puolittain funktiolla $\mu(x)$.

Nyt yhtälö on $\mu y' - 2\mu y = \mu e^{2x}$, jossa μ valitaan niin, että vasen puoli $\mu y' - 2\mu y$ on tulon μy derivaatta eli $\mu' y + \mu y'$. Tämä yhtälö sievenee muotoon $\mu' = -2\mu$, jonka ratkaisu saadaan separoimalla tai ulkomuistista, $\mu = e^{-2x}$.

Siis yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$e^{-2x}y' + (-2e^{-2x})y = e^{-2x}e^{2x}, \text{ eli}$$

$$e^{-2x}y' + (e^{-2x})'y = (e^{-2x}y)' = 1,$$

$$e^{-2x}y = x + C, \text{ ja lopuksi}$$

$$y = xe^{2x} + Ce^{2x}.$$

3.5 Toisen kertaluvun vakiokertoimiset yhtälöt

Yleinen toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x).$$

Tällaisen yhtälön ratkaisu on yleensä hankalaa. Usein funktiot p, q ja r ovat kuitenkin vakioita. Tutkitaan nyt tällaista tapausta, jossa lisäksi $r = 0$.

3.5.1 Homogeeninen tapaus

Tutkittavana on nyt differentiaaliyhtälö $y'' + py' + qy = 0$, jossa p ja q ovat reaalivakioita.

Lineaarisesta toisen kertaluvun homogeeniyhtälöstä tiedetään, että sillä on täsmälleen kaksi toisistaan lineaarisesti riippumatonta epätriviaalia ratkaisua, eli nollasta poikkeavaa ratkaisua y_1 ja y_2, joita ei saada toisistaan vakiolla kertomalla.

Kaikki ratkaisut saadaan näistä ratkaisujen y_1 ja y_2 lineaarikombinaatioina, eli $y = \alpha y_1 + \beta y_2$, jossa α ja β ovat mielivaltaisia reaalilukuja.

Tämän yhtälön ensimmäisen kertaluvun vastineen $y' + py = 0$ ratkaisu on $y = e^{-px}$. Etsitään siis toisen kertaluvun lineaariselle homogeeniselle vakiokertoimiselle differentiaaliyhtälölle ratkaisua yritteellä $y = e^{\lambda x}$. Saadaan

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= 0 \\ \lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^2 + p\lambda + q &= 0. \end{aligned}$$

Tämä on yhtälön $y'' + py + qy = 0$ karakteristinen yhtälö. Funktio $y = e^{\lambda x}$ siis toteuttaa alkuperäisen yhtälön $y'' + py' + qy = 0$ jos ja vain jos λ on karakteristisen yhtälön juuri.

Olkoot λ_1 ja λ_2 nyt karakteristisen yhtälön ratkaisut.

Jos saadaan kaksi erisuurta reaaliratkaisua, y_1 ja y_2, $y_1 \neq y_2$, tiedetään nyt ratkaisuiksi $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Näin ollen kaikki ratkaisut ovat $Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$, jossa A ja B ovat mielivaltaisia reaalilukuja.

Jos reaaliratkaisuja ei saada lainkaan, saadaan kaksi kompleksiratkaisua, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ja $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Nyt, kuten edellä, $e^{\lambda_1 x} = e^{\alpha x + i\beta x}$ ja $e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x - i\beta x}$ ovat ratkaisuja. Siis myös

$$\frac{e^{\alpha x}e^{i\beta x} + e^{\alpha x}e^{-i\beta x}}{2} = e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad \text{ja}$$

$$\frac{e^{\alpha x}e^{i\beta x} - e^{\alpha x}e^{-i\beta x}}{2i} = e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} = e^{\alpha x}\sin(\beta x) \quad \text{ovat}$$

ratkaisuja. Näitä ratkaisuja ei saada toisistaan vakiolla kertomalla, joten kaikki ratkaisut ovat $Ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + Be^{\alpha x}\sin(\beta x)$, tai vaihtoehtoisessa muodossa $Ce^{\alpha x}\sin(\beta x + \phi)$, jossa A, B, C ja ϕ mielivaltaisia reaalivakioita.

Jos saadaan täsmälleen yksi reaaliratkaisu λ, on $y = e^{\lambda x}$ edelleen ratkaisu. Näin saadaan kuitenkin vain yksi ratkaisu, eikä siten suoraan voida päätellä kaikkia ratkaisuja. Yritetään jossain mielessä seuraavaksi helpointa yritettä, $y = xe^{\lambda x}$, jolle

$$y = xe^{\lambda x},$$

$$y' = e^{\lambda x} + \lambda xe^{\lambda x},$$
$$y'' = 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 xe^{\lambda x}.$$

Nyt

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= xe^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) + e^{\lambda x}(2\lambda + p) \\ &= xe^{\lambda x}(0) + e^{\lambda x}(0) = 0, \end{aligned}$$

sillä i) λ on yhtälön $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ juuri, ja ii) äskeisellä yhtälöllä on vain yksi ratkaisu, joten toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta $\lambda = \frac{-p\pm\sqrt{D}}{2} = -\frac{p}{2}$, sillä diskriminantti on nolla. Tästä ratkaistuna $2\lambda + p = 0$, joten $xe^{\lambda x}$ toteuttaa differentiaaliyhtälön.

Kootaan vielä lyhyesti:

- Jos karakteristisella yhtälöllä on reaalijuuret λ_1, λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ratkaisut ovat

$$Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}.$$

- Jos karakteristisella yhtälöllä on kompleksijuuri $\lambda = \alpha + i\beta$, ratkaisut ovat

$$Ae^{\alpha x}\cos\beta x + Be^{\alpha x}\sin\beta x.$$

- Jos karakteristisella yhtälöllä on vain yksi reaalijuuri λ, ratkaisut ovat

$$Ae^{\lambda x} + Bxe^{\lambda x}.$$

3.5.2 Vakiotapaus

Jos yhtälö on muotoa $y'' + py' + qy = r$, jossa r on vakio, etsitään yksittäisratkaisu yritteellä $y = vakio$. Tällöin y' ja y'' häviävät ja jää jäljelle $qy = r$, josta $y = r/q$. Kaikki ratkaisut saadaan lisäämällä tähän vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisut.

3.5.3 Yleinen tapaus

Tutkitaan yhtälöä $y'' + py' + qy = r(x)$, jossa p ja q ovat reaalivakioita. Sopivalla yritteellä voidaan usein arvata yksittäisratkaisu, jolloin kaikki ratkaisut saadaan lisäämällä homogeenisen yhtälön ratkaisut. Joskus tämä voi olla vaikeaa, mutta onneksi on vaihtoehto.

Tunnetusti voidaan derivaattaa y' merkitä myös Dy. Vastaavasti toiselle derivaatalle $y'' = (y')' = D(Dy) = D^2y$. Derivaatan voi myös kertoa vakiolla, $(aD)y = ay'$ ja näitä voidaan laskea yhteen: $(D^2 + pD + q)y = D^2y + pDy + qy = y'' + py' + qy$.

Karakteristinen polynomi $\lambda^2+p\lambda+q$ voidaan kirjoittaa tulomoutoon $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$, jossa λ_1 ja λ_2 ovat karakteristisen polynomin juuret. Täsmälleen samalla tavalla, koska p ja q eivät ole funktioita vaan vakioita, voidaan kirjoittaa $D^2 + pD + q = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)$. Todetaan vielä, että tässä ei olla huijattu:

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = (D - \lambda_1)(y' - \lambda_2 y) = y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y = y'' + py' + qy,$$

kuten pitääkin. Tämä on siis vain toinen tapa kirjoittaa sama asia.

Ratkaistaan nyt yhtälö $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = r(x)$ merkitsemällä

$$g = (D - \lambda_2)y = y' - \lambda_2 y.$$

Nyt yhtälö on muodossa $(D - \lambda_1)g = r(x)$, eli $g' - \lambda_1 g = r(x)$. Tämä ratkeaa esimerkiksi integroivan tekijän menetelmällä, ja ratkaisuksi saadaan

$$g(x) = e^{\lambda_1 x} \int e^{-\lambda_1 x} r(x)\ dx.$$

Tiedetään edelleen, että $(D - \lambda_2)y = g$, jossa g on nyt jo tunnettu funktio. Voidaan siis ratkaista y esimerkiksi integroivan tekijän menetelmällä,

$$y = e^{\lambda_2 x} \int e^{-\lambda_2} g(x)\ dx,$$

joka on haluttu ratkaisu. Funktio g laskettiin muutamaa riviä ylempänä.

Esimerkki 6. Ratkaistaan esimerkin vuoksi yhtälö $y''+y'-2y = e^x$. Karakteristisen yhtälön $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ juuret ovat $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = -2$. Voidaan siis kirjoittaa alkuperäinen yhtälö muotoon $(D-1)(D+2)y = e^x$. Merkitään $(D+2)y = y'+2y = g$ ja ratkaistaan $(D - 1)g = g' - g = e^x$.

$$g' - g = e^x$$

$$\begin{aligned} e^{-x}g' + (-1)e^{-x} &= 1 \\ (e^{-x}g)' &= 1 \\ e^{-x}g &= x + C_1 \\ g &= xe^x + C_1e^x. \end{aligned}$$

Jos vakiot C_1 ja tuleva integraalivakio C_2 pidetään mukana, saadaan tästä kaikki ratkaisut. Tehdään tällä kertaa niin, että etsitään vain yksi yksittäisratkaisu, ja lisätään siihen lopuksi homogeeniyhtälön ratkaisut. Valitaan siis $C_1 = 0$ laskujen helpottamiseksi, jolloin $g = xe^x$.

Tiedetään, että $(D+2)y = g$, eli

$$\begin{aligned} y' + 2y &= g = xe^x \\ e^{2x}y' + 2e^{2x}y &= xe^{3x} \\ (e^{2x}y)' &= xe^{3x} \\ e^{2x}y &= \int xe^{3x}\ dx \\ e^{2x}y &= x\frac{e^{3x}}{3} - \int 1\frac{e^{3x}}{3}\ dx \\ e^{2x}y &= x\frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + \underbrace{C_2}_{=0} \\ y &= \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{9}e^x. \end{aligned}$$

Siis ratkaisut ovat $y = \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{9}e^x + Ae^x + Be^{-2x}$, josta termi $\frac{1}{9}e^x$ voidaan sisällyttää vakiotermiin A. Siis

$$y = \frac{1}{3}xe^x + Ae^x + Be^{-2x},$$

jossa A ja B ovat mielivaltaisia reaalilukuja.