

Fourier-muunnos

Pekka Hintikan kurssi Helsingin matematiikkalukiossa 2011

Teoriaa ja tehtäviä, 3.oppitunti (kirj. Joni Teräväinen)

Määritelmä: Funktion f sinimuunnos on integraali

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt$$

ja kosinimuunnos

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt.$$

Yhdessä näitä kutsutaan funktion f *Fourier-muunnoksiksi* (mikäli suppenevat).

Muunnoksista tekee mielenkiintoisia se, että ne on helppo kääntää:

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\omega) \sin \omega t \, d\omega.$$

ja

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\omega) \cos \omega t \, d\omega.$$

Nillä on myös selvä yhteys funktion esittämiseen sinien tai kosinien äärettömänä summana.

Sovelluksia

Matematiikka

- Tavallisten differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen, esim. $y'' + ay' + by = f(x)$
- Osittaisdifferentiaaliyhtälöt, esim. aaltoyhtälö

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

- Tiettyjen integraalien, esim. $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$ laskeminen.

Fysiikka

- Spektrit
- Signaalit

Muunnoskaavoja

Muunnosten määritelmästä havaitaan helposti, että ne ovat lineaarisia, toisin sanoen summan muunnos on muunnosten summa ja vakiolla kerrotun funktion muunnos on funktion muunnos kerrottuna samalla vakiolla. Tehtävässä 5 johdetaan kaava derivaatan Fourier-muunnokselle. Emme kuitenkaan perehdy sen syväisemmin muunnoksen ominaisuuksiin, sillä tulemme myöhemmin käsittelemään Laplace-muunnosta, joka on operaattorina helpompi.

Esimerkki Fourier-muunnoksesta

Muodosta funktion $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$ kosinimuunnos.

Ratkaisu

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a 1 \cdot \cos \omega t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1}{\omega} \sin \omega t \right]_0^a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\omega}{\omega}.$$

Seuraus:

$$\text{Käänteismuunnoksella } \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\omega}{\omega} \cos \omega t \, d\omega = \begin{cases} 1, & |t| < a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$$

Erityisesti sijoittamalla $t = 0$ saadaan

$$\int_0^\infty \frac{\sin a\omega}{\omega} \, d\omega = \frac{\pi}{2}, a > 0.$$

Vaihtoehtoinen Fourier-muunnos

Yleensä Fourier-muunnos on tapana kirjoittaa muodossa

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} \, dt,$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi t} \, d\xi$$

Me käytämme kuitenkin kosini- ja sinimuunnosta, jotta emme tarvitsisi Eulerin kaavaa ja kompleksifunktion integrointia.

Tehtäviä

1. Muodosta funktion $f(x) = e^{-ax}$, missä a on positiivinen vakio, kosinimuunnos.

2. Laske

$$\int_0^\infty \frac{\cos \omega}{a^2 + \omega^2} \, d\omega.$$

3. Muodosta funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi] \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

sinimuunnos.

4. Laske integraali

$$\int_0^\infty \frac{\sin \pi x \sin x}{1-x^2} \, dx.$$

5. a) Merkitään funktion $y(x)$ kosinimuunnosta $F_C(y)$ ja sinimuunnosta $F_S(y)$

(muuttujana ω). Osoita, että

$$F_S(y') = -\omega F_C(y).$$

b) Muodosta tämän avulla funktion $f(x) = e^{-ax}$ sinimuunnos.

Käymme ratkaisut läpi maanantaina 21.3. kello 15.45.