

Fourier-sarjat

Pekka Hintikan kurssi Helsingin matematiikkalukiossa 2011

Teoriaa ja tehtäviä, 1.oppitunti (kirj. Joni Teräväinen)

Idea: Esitetään annettu jaksollinen funktio f sinien ja kosinien äärettömänä summana:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x + a_2 \cos 2\omega x + b_2 \sin 2\omega x + \dots,$$

missä $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T on jakson pituus.

Motivaatio:

Matematiikka

- Tiettyjen summien määrittäminen, esim. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
- Jatkuvan funktion, joka ei ole missään derivoituva, konstruointi.
- Jotkin differentiaaliyhtälöt, esim. Sturmin-Liouvillen differentiaaliyhtälö.

Fysiikka

- Lämpöyhtälön ratkaiseminen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

- Signaalin- ja kuvankäsittely
- Optiikka
- Kvanttimekaniikka

Laskeminen

Fourier-sarjan kertoimet saadaan kaavoista

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \cos(n\omega x) dx, \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \sin(n\omega x) dx, \quad n \geq 1.$$

Todistamme väitteen, kun $\omega = 1$, eli funktion jakso on 2π . Mieti itse, miten todistus menee mielivaltaiselle ω .

Todistus perustuu siihen, että jos m ja n ovat kokonaislukuja, niin:

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = 0, m \neq n$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = 0, m \neq n.$$

Tämä käy selväksi, jos esimerkiksi piirrät integroitavat funktiot graafisella laskimella joillakin m ja n ja etsit symmetrioita.

Nyt olkoon $f(x)$ funktio, jonka jakso on 2π (ts. 2π on pienin luku siten, että $f(x+2\pi) = f(x)$) ja jolla on esitys suppenevana Fourier-sarjana:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Kerrotaan yhtälö puolittain $\sin mx$:llä, missä m on annettu luonnollinen luku. Saadaan

$$f(x) \sin mx = \frac{a_0}{2} \sin mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \sin mx + b_n \sin nx \sin mx).$$

Nyt integroidaan puolittain 0:sta 2π :hin, ja sovelletaan tietoa, että integraalien summa on summan integraali

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin mx \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \sin mx \, dx + \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \sin mx + b_n \sin nx \sin mx) \, dx.$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \sin mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx \, dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx).$$

Soveltamalla äsken lueteltuja kaavoja ja kaavaa $\int_0^{2\pi} \sin^2 x = \pi$ (todista sieventämällä integroitavaa lauseketta kaavalla $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$) saamme

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin mx \, dx = 0 + 0 + \dots + \pi b_m,$$

minkä jälkeen kaava b_n :lle seuraa. Samalla tavalla todistetaan a_n :n laskentakaava paitsi, että nyt kerrotaan lausekkeella $\cos mx$.

Esimerkki

Muodosta funktion $f(x) = x$ Fourier-sarja välillä $[0, 2\pi]$.

Ratkaisu

Lasketaan kertoimet osittaisintegroimalla ($f' = \cos nx, g = x, [\]_0^{2\pi}$ tarkoittaa sijoitusta 0:sta 2π :hin).

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} x \cos nx \, dx$$

$$= [x \frac{\sin nx}{n}]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 1 \cdot \frac{\sin nx}{n} \, dx = 0 - \frac{1}{n} \cdot [-\frac{\cos nx}{n}]_0^{2\pi} = 0, n \geq 1$$

(tämä olisi nähty helpommin siitä, että $f(x) \cos nx$ on pariton.)

Jos taas $n = 0$, niin $a_0 = 2\pi$. Samalla tavalla saadaan sinien kertoimet ($f' = \sin nx, g = x$).

$$\pi b_n = \int_0^{2\pi} x \sin nx \, dx$$

$$= [x \frac{-\cos nx}{n}]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 1 \cdot \frac{-\cos nx}{n} \, dx = -\frac{2\pi}{n} - \frac{1}{n} \cdot [-\frac{\sin nx}{n}]_0^{2\pi} = -\frac{2\pi}{n}.$$

eli $b_n = -\frac{2}{n}$. Siispä

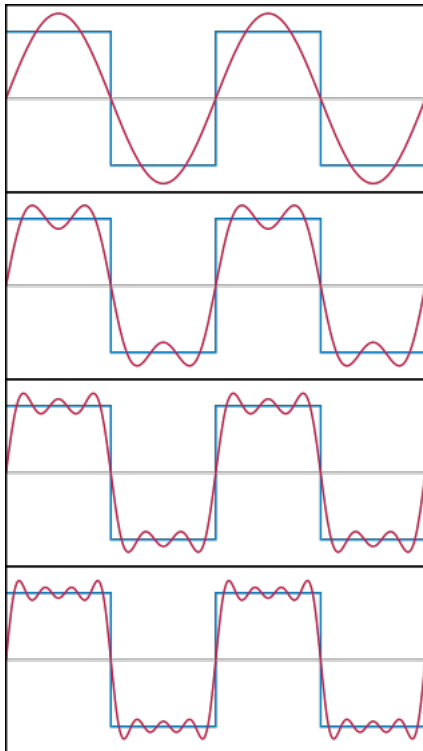
$$x = \frac{2\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -2 \frac{\sin nx}{n} = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, x \in [0, 2\pi].$$

Havaitaan, että funktion arvo 0:ssa on 0, mutta Fourier-sarjan arvo onkin π . Tämä ei kuitenkaan ole ristiriita, koska epäjatkuvuuskohdissa, kuten 0:ssa, sarja suppenee vasemman- ja oikeanpuoleisen raja-arvon keskiarvoon.

Suppeneminen

On olemassa jaksollisia funktioita, joille Fourier-sarja ei suppene tai supenee väärään funktioon. Kuitenkin, jos f on jatkuva välillä $[0, T]$, niin Fourier-sarja supenee funktioon f tällä välillä. Siksi suppenevuus ei ole kovin suuri ongelma.

Havainnollistus



Neliöaalton $f(x) = 1, x \in [0, 2\pi], f(x) = f(x + 2\pi)$ Fourier-kehitelmiä. Raja-arvona on funktio itse. Huomaa, että epäjatkuvuuspisteissä $f(x)$:n Fourier-sarja supenee sitä ympäröivien arvojen keskiarvoon.

Vaihtoehtoinen esitysmuoto

Funktion f Fourier-sarja voidaan esittää myös kompleksisten eksponenttifunktioiden summana, koska Eulerin kaavan nojalla

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Voidaan siis kirjoittaa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

missä

$$c_n + c_{-n} = a_n, n \text{ parillinen}$$

$$(c_n - c_{-n})i = b_n, n \text{ pariton.}$$

Tehtäviä

1. Muodosta funktioiden

a) $f(x) = 1, x \in [0, 2\pi]$

b) $f(x) = \sin x$

c) $f(x) = 2, x \in [0, 2\pi]$

d) $f(x) = \sin^2(x)$

Fourier-sarjat. (Vinkki: kaikilla edellä mainituilla on melko triviaalit Fourier-sarjat.)

2. Määritä funktion $f(x) = x, f(x+1) = x$ Fourier-sarja.

3. Muodosta

a) neliöaallon

b) kolmioaallon

c) sahalaita-aallon

jonka aallonpituus on 2 ja amplitudi 1, Fourier-sarja.

5. Osoita seuraavat kaavat:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{1}{2}(\pi - 1)$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n} = \frac{1}{2}(\pi - 2)$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{1}{12}(3 + 2\pi(\pi - 3))$

6. Ratkaise kuuluisa Baselin ongelma, eli laske Riemannin zeeta-funktio

arvolla 2, eli määritä $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Jos jokin tehtävä ei ratkea, siirry seuraavaan, ja palaa siihen myöhemmin.

Käymme ratkaisut läpi maanantaina 7.3. kello 15.45. Teoriasta ja tehtävistä voi toki kysyä muulloinkin.

Lähde: Wikipedia