

Laplace-muunnos

Pekka Hintikan kurssi Helsingin matematiikkalukiossa 2011

Teoriaa ja tehtäviä, 5.oppitunti (kirj. Joni Teräväinen)

Määritelmä

Funktion f Laplace-muunnos on integraali

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Tämä muunnos muuntaa funktion f t -avaruudesta s -avaruuteen. Merkitsemme muunnosta operaattorilla $\mathcal{L}$.

Sovelluksia

Matematiikka

- Tavallisten differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen, esim. $y'' + ay' + by = f(x)$
- Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Fysiikka

- Virtapirit
- Harmoniset värähtelijät

Ominaisuuksia

Suoraan Laplace-muunnoksen määritelmästä seuraa Laplace-muunnoksen lineaarisuus; toisin sanoen

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

funktiolle f ja g sekä vakioille a ja b .

Yksittäisten funktioiden Laplace-muunnoksista olisi hyvä muistaa Pekka Hintikan kirjassa sivuilla 46-47 luetellut ja todistetut muunnokset. Hankalempien funktioiden muunnokset selvitetään esimerkiksi:

- Sijoittamalla määritelmään ja osittaisintegroimalla tai käyttämällä sijoitusmenetelmää
- Muuntamalla rationaalifunktio osamurroiksi. Osamurtomenetelmää käsitellään esimerkiksi kurssissa MAA 12.
- Käyttämällä muunnoksen ominaisuuksia, esimerkiksi sen derivointikaavaa.

Muunnokselle saadaan osittaisintegroimalla derivointikaavat:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

ja integrointikaava

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)dx\right\} = \frac{1}{s}F(s).$$

Näistä kaavoista seuraa, että Laplace-muunnos muuntaa yhden muuttujan differentiaali -ja integraaliyhtälöt tavallisiksi yhtälöiksi.

Hyödyllinen ominaisuus on myös muunnoksen siirto:

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, missä F on f :n Laplace-muunnos ja a on vakio. Todistus on harjoitustehtävänä.

Differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen

Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'' + 2y' + y = e^t, y(0) = y'(0) = 0$.

Ratkaisu Otetaan puolittain Laplace-muunnos. Saamme

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + 2\mathcal{L}\{y'(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{e^t\} \text{ eli}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2sY(s) - 2y(0) + Y(s) = \frac{1}{s-1}.$$

Sijoittamalla alkuarvot ja sieventämällä

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+2s+1)} = -\frac{1}{4(s+1)} - \frac{1}{2(s+1)^2} + \frac{1}{4(s-1)}.$$

Tästä käyttämällä muunnoksen siirtoa saamme ratkaisuksi

$$y(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{4}e^t.$$

Tehtäviä

1. Muodosta suoraan määritelmästä funktion $f(t) = t^2$ Laplace-muunnos.
2. Funktion Laplace-muunnos on $F(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s-1}$. Mikä on kyseinen funktio?
3. Osoita, että $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$.
4. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y' + 2y = x^2, y(0) = 0$.
5. Pekka Hintikan kirja: sivu 69, tehtävä 4.

Käymme ratkaisut läpi tiistaina 5.4. kokeiden jälkeen.