

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

Harjoitus 1

11. 9. 2006 alkavalle viikolle

Näissä harjoituksissa opetellaan epäyhtälöiden huolellista käyttöä reaalityöjen suuruuden tutkimisessa. Ratkaisussa ei saa vedota raja- arvoihin, jatkuvuuteen tai derivaattoihin (-olemme opettelemassa perusasioita niiden käsitteiden täsmällistä käsittelyä varten.) Vastaukset pitää pyrkiä perustelemaan mahdollisimman vakuuttavasti.

1. Luvun x käänteisluku on sellainen yksikäsitteinen luku y , että $xy = 1$. Miksi luvulla 0 ei ole käänteislukua; ts. miksi nolllalla ei saa jakaa?
2. Miksi $x^2 < x$ aina kun $0 < x < 1$? Miten tämä liittyy monisteessa ja luennoilla käsiteltyihin suuruusjärjestyksen ominaisuuksiin?
3. Miksi $x^2 \leq y^2$ aina kun $0 < x < y$?
4. Pitääkö epäyhtälö $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ paikkansa kun $0 \leq x < y$? Tässä saa käyttää tietoa, että kun $0 \leq a$, niin \sqrt{a} on sellainen yksikäsitteinen luku, jonka neliö on a .
5. Päteekö seuraava väite: Jos $2 < x < 2 + 7^{-7777}$, niin

$$0 < \frac{x}{x+1} - \frac{2}{3} < 7^{-7777}?$$

Vihje: tutki erotusta $\frac{x}{x+1} - \frac{2}{3}$ ja huomaa, että nimittäjän pienentäminen kasvattaa tutkittavaa erotusta; osoita, että saatava suurempi lauseke on pienempi kuin 7^{-7777} .

6. Etsi sellainen $h > 0$, että kaikilla välille $]4 - h, 4[$ kuuluvilla luvuilla x pätee $2 - 10^{-10000} < \sqrt{x} < 2$.